RAČUNANJE LANCA TROUGLOVA UMETNUTOG IZMEĐU DVE DATE TAČKE

Aleksandar *ZLATKOVIĆ* — Beograd*

Pogledajmo lanac trouglova koji je razvijen između datih tačaka o i n (sl. 1). Neka su u svim trouglovima uglovi izmereni i izravnati, tako da je

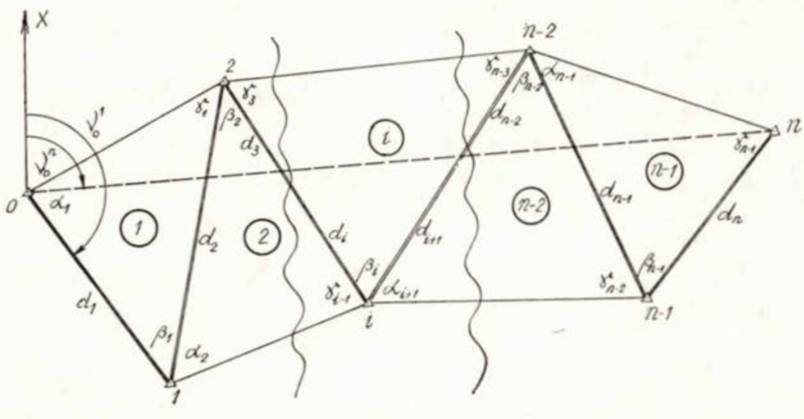
$$\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = \pi \quad \text{i}$$

$$[\alpha_i] + [\beta_i] + [\gamma_i] = (n-1)\pi$$

gde je (n—1) — broj trougolva. U lancu nije izmerena nijedna strana, niti su poznati orijentacioni uglovi na datim tačkama o i n.

Ako bismo mogli da nađemo razmeru u kojoj bi dužine d_i imale odgovarajuće vrednosti u sistemu u kome date tačke imaju svoje koordinate i ako bismo zadržali vrednosti izravnatih uglova, onda bi se lanac mogao smestiti između datih tačaka tako da se odgovarajuća temena prvog i zadnjeg trougla poklope sa datim tačkama o i n. Kako se ovako urazmeren lanac samo na jedan nčin može smestiti između tačkaka o i n, pod uslovom da se ne zameni položaj krajnjih tačaka ili se ceo lanac ne obrne oko pravca o—n za 180°, ostaje samo da se nađe matematičko rešenje problema.

Prvi deo problema je određivanje dužina d_i u odgovarajućoj razmeri, znači urazmeravanje lanca, a drugi deo je određivanje direkcionog ugla prve strane



Sl. 1

* Adresa: Aleksandar Zlatković dipl. inž., Beograd, Zavod za fotogrametriju

ν_0^1, odnosno njegovo orijentisanje. Kada se ovo postigne, lako će se tačke 1, 2, . . . , (n—1) sračunati u poligonom vlaku o, 1, 2, . . . , (n—1), n.

Uz način označavanja uglova u trouglovima koji je primenjen na sl. 1, za dužine strana d_i mogu se napisati sledeći izrazi:

$$\begin{aligned}
d_1 &= d_2 \frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha_1} = d_3 \frac{\sin\gamma_1 \sin\gamma_2}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2} = \cdots = d_n \frac{\sin\gamma_1 \sin\gamma_2 \cdots \sin\gamma_{n-1}}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cdots \sin\alpha_{n-1}} \\
d_2 &= d_3 \frac{\sin\gamma_2}{\sin\alpha_2} = d_4 \frac{\sin\gamma_2 \sin\gamma_3}{\sin\alpha_2 \sin\alpha_3} = \cdots = d_n \frac{\sin\gamma_2 \sin\gamma_3 \cdots \sin\gamma_{n-1}}{\sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \cdots \sin\alpha_{n-1}} \\
&\cdots \\
d_i &= d_{i+1} \frac{\sin\gamma_i}{\sin\alpha_i} = d_{i+2} \frac{\sin\gamma_i \sin\gamma_{i+1}}{\sin\alpha_i \sin\alpha_{i+1}} = \cdots = d_n \frac{\sin\gamma_i \sin\gamma_{i+1} \cdots \sin\gamma_{n-1}}{\sin\alpha_i \sin\alpha_{i+1} \cdots \sin\alpha_{n-1}} \\
d_{n-1} &= d_n \frac{\sin\gamma_{n-1}}{\sin\alpha_{n-1}}
\end{aligned} \qquad (1)$$

Uvedimo sledeće oznake

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{\sin\gamma_1 \sin\gamma_2 \cdots \sin\gamma_{n-1}}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cdots \sin\alpha_{n-1}} \\
\varphi_2 &= \frac{\sin\gamma_2 \sin\gamma_3 \cdots \sin\gamma_{n-1}}{\sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \cdots \sin\alpha_{n-1}} \\
&\cdots \\
\varphi_i &= \frac{\sin\gamma_i \sin\gamma_{i+1} \cdots \sin\gamma_{n-1}}{\sin\alpha_i \sin\alpha_{i+1} \cdots \sin\alpha_{n-1}} \\
&\cdots \\
\varphi_{n-1} &= \frac{\sin\gamma_{n-1}}{\sin\alpha_{n-1}}
\end{aligned} \qquad (2)$$

pa će izrazi (1) dobiti sledeći oblik

$$\begin{aligned}
d_1 &= d_n \varphi_1 \\
d_2 &= d_n \varphi_2 \\
&\cdots \\
d_i &= d_n \varphi_i \\
&\cdots \\
d_{n-1} &= d_n \varphi_{n-1}
\end{aligned} \qquad (3)$$

Za određivanje dužine d_i potrebno je odrediti dužinu zadnje strane d_n, jer su veličine φ_i određene. Napišimo zato sledeći izraz:

$$y_n - y_0 = \Delta y = d_1 \sin\nu_0^1 + d_2 \sin\nu_1^2 + \cdots + d_{n-1} \sin\nu_{n-2}^{n-1} + d_n \sin\nu_{n-1}^n$$

Koristeći (3), prethodni izraz napisaćemo u obliku

$$\Delta y = d_n \varphi_1 \sin\nu_0^1 + d_n \varphi_2 \sin\nu_1^2 + \cdots + d_n \varphi_{n-1} \sin\nu_{n-2}^{n-1} + d_n \sin\nu_{n-1}^n$$

odnosno

$$\Delta y = d_n (\varphi_1 \sin\nu_0^1 + \varphi_2 \sin\nu_1^2 + \cdots + \varphi_{n-1} \sin\nu_{n-2}^{n-1} + \sin\nu_{n-1}^n)$$

i analogijski (4)

$$\Delta x = d_n (\varphi_1 \cos\nu_0^1 + \varphi_2 \cos\nu_1^2 + \cdots + \varphi_{n-1} \cos\nu_{n-2}^{n-1} + \cos\nu_{n-1}^n)$$

Uvodimo sledeće oznake

$$\begin{aligned}
a &= \varphi_1 \sin\nu_0^1 + \varphi_2 \sin\nu_1^2 + \cdots + \varphi_{n-1} \sin\nu_{n-2}^{n-1} + \sin\nu_{n-1}^n \\
b &= \varphi_1 \cos\nu_0^1 + \varphi_2 \cos\nu_1^2 + \cdots + \varphi_{n-1} \cos\nu_{n-2}^{n-1} + \cos\nu_{n-1}^n
\end{aligned} \qquad (5)$$

pa ćemo imati

$$d_n = \frac{\Delta y}{a} = \frac{\Delta x}{b} \tag{6}$$

$$\operatorname{tg} \nu_0^n = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a}{b} \tag{7}$$

Da bismo dobili dužinu d_n moramo rešiti izraze (5). Kako je

$$\nu_1^2 = \nu_0^1 + \beta_1 + \pi$$

$$\nu_2^3 = \nu_0^1 + \beta_1 - \beta_2 + 2\pi$$

$$\nu_{n-1}^n = \nu_0^1 + \beta_1 - \beta_2 + \cdots \pm \beta_{n-1} + (n-1)\pi$$

izraz za a iz (5) napisaćemo u obliku

$$a = \varphi_1 \sin \nu_0^1 - \varphi_2 \sin(\nu_0^1 + \beta_1) + \varphi_3 \sin(\nu_0^1 + \beta_1 - \beta_2) - \cdots \pm$$
$$\pm \varphi_{n-1} \sin(\nu_0^1 + \beta_1 - \beta_2 + \cdots \pm \beta_{n-2}) \pm \sin(\nu_0^1 + \beta_1 - \beta_2 + \cdots \pm \beta_{n-1})$$

Dalje je

$$a = \varphi_1 \sin \nu_0^1 - \varphi_2 \sin \nu_0^1 \cos \beta_1 - \varphi_2 \cos \nu_0^1 \sin \beta_1 + \varphi_3 \sin \nu_0^1 \cos(\beta_1 - \beta_2) + \varphi_3 \cos \nu_0^1 \sin \cdot$$
$$\cdot (\beta_1 - \beta_2) - \cdots \mp \varphi_{n-1} \sin \nu_0^1 \cos(\beta_1 - \beta_2 + \cdots \pm \beta_{n-2}) \mp \varphi_{n-1} \cos \nu_0^1 \sin(\beta_1 - \beta_2 +$$
$$+ \cdots \pm \beta_{n-2}) \pm \sin \nu_0^1 \cos(\beta_1 - \beta_2 + \cdots \pm \beta_{o-1}) \pm \cos \nu_0^1 \sin(\beta_1 - \beta_2 + \cdots \pm \beta_{n-1})$$

odnosno

$$a = \sin \nu_0^1 [\varphi_1 - \varphi_2 \cos \beta_1 + \varphi_3 \cos(\beta_1 - \beta_2) - \cdots \mp \varphi_{n-1} \cos(\beta_1 - \beta_2 + \cdots \pm \beta_{n-2}) \pm$$
$$\pm \cos(\beta_1 - \beta_2 + \cdots \pm \beta_{n-1})] -$$
$$- \cos \nu_0^1 [\varphi_2 \sin \beta_1 - \varphi_3 \sin(\beta_1 - \beta_2) + \cdots \pm \varphi_{n-1} \sin(\beta_1 - \beta_2 + \cdots \pm \beta_{n-2}) \mp$$
$$\mp \sin(\beta_1 - \beta_2 + \cdots \pm \beta_{n-1})]$$

Ako uvedemo sledeće oznake

$$\left.\begin{aligned} p &= \varphi_1 - \varphi_2 \cos \beta_1 + \varphi_3 \cos(\beta_1 - \beta_2) - \cdots \mp \varphi_{n-1} \cos(\beta_1 - \beta_2 + \cdots \pm \beta_{n-2}) \pm \\ &\quad \pm \cos(\beta_1 - \beta_2 + \cdots \pm \beta_{n-1}) \\ q &= \varphi_2 \sin \beta_1 - \varphi_3 \sin(\beta_1 - \beta_2) + \cdots \pm \varphi_{n-1} \sin(\beta_1 - \beta_2 + \cdots \pm \beta_{n-2}) \pm \\ &\quad \pm \sin(\beta_1 - \beta_2 + \cdots \pm \beta_{n-1}) \end{aligned}\right| \tag{8}$$

dobićemo

$$a = p \sin \nu_0^1 - q \cos \nu_0^1 \tag{9}$$

Na isti način dobićemo iz (5) izraz za b

$$b = p \cos \nu_0^1 + p \sin \nu_0^1 \tag{10}$$

Ako u (7) uvedemo za a i b izraze (9) i (10), imaćemo

$$\operatorname{tg} \nu_0^n = \frac{p \sin \nu_0^1 - q \cos \nu_0^1}{p \cos \nu_0^1 + q \sin \nu_0^1}$$

odakle je

$$\operatorname{tg} \nu_0^1 = \frac{q + p \operatorname{tg} \nu_0^n}{p - q \operatorname{tg} \nu_0^n}$$

odnosno

$$\operatorname{tg} \nu_0^1 = \frac{\frac{q}{p} + \operatorname{tg} \nu_0^n}{1 - \frac{q}{p} \operatorname{tg} \nu_0^n}$$

Označimo (sl. 2)

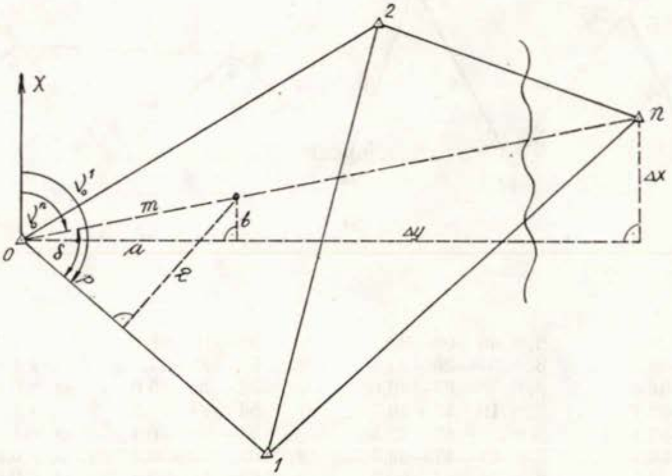
$$\frac{q}{p} = \operatorname{tg} \delta \tag{11}$$

pa ćemo imati

$$\operatorname{tg} \nu_0^1 = \frac{\operatorname{tg} \nu_0^n + \operatorname{tg} \delta}{1 - \operatorname{tg} \nu_0^n \operatorname{tg} \delta} = \operatorname{tg} (\nu_0^n + \delta)$$

odnosno

$$\nu_0^1 = \nu_0^n + \delta \tag{12}$$



Sl. 2

Vidimo da se vrednosti za p, q i ν^1_0 mogu sračunati iz merenih, odnosno izravnatih uglova, kao i koordinata datih tačaka o i n. Sa poznatim direkcionim uglom ν^1_0 iz (9) i (10) odredićemo vrednosti za a i b, zatim iz (6) dužinu zadnje strane d_n i konačno iz (3) ostale strane trouglova d_i, čime dobijemo sve elemente potrebne za računanje koordinata traženih tačaka u poligonom vlaku.

Dužinu zadnje strane d_n možemo dobiti i na jednostavniji način, bez računanja a i b.

Kvadriranjem i sabiranjem (9) i (10) dobija se

$$a^2 + b^2 = p^2 + q^2 \tag{13}$$

Kvadriranjem i sabiranjem jednačina (6) dobije se

$$\Delta y^2 + \Delta x^2 = S_{0n}^2 = d_n^2 (a^2 + b^2)$$

odnosno, s obzirom na (13)

$$S_{0n}^2 = d_n^2 (p^2 + q^2)$$

pa se za dužinu strane dobija

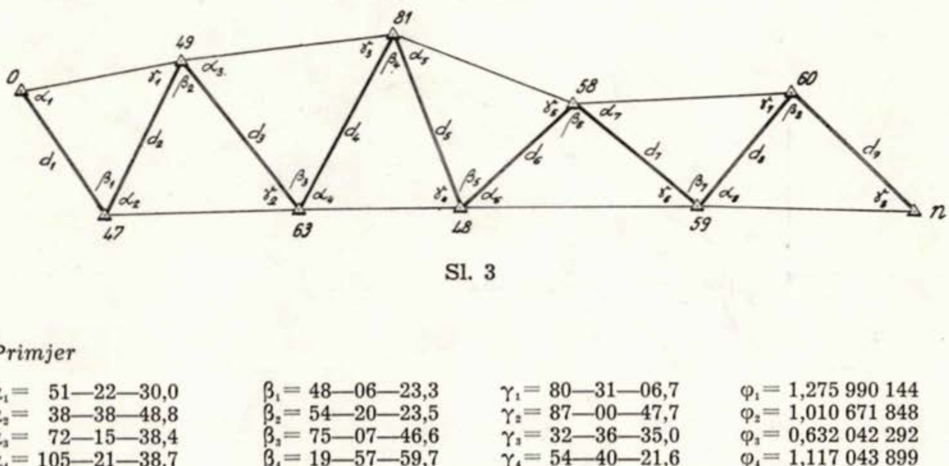
$$d_n = \frac{S_{0n}}{\sqrt{p^2 + q^2}} \tag{14}$$

Stavimo da je

$$m = \sqrt{p^2 + q^2} \tag{15}$$

pa ćemo konačno imati

$$d_n = \frac{S_{0n}}{m} \tag{16}$$



Sl. 3

Primjer

$\alpha_1 =$ 51—22—30,0	$\beta_1 =$ 48—06—23,3	$\gamma_1 =$ 80—31—06,7	$\varphi_1 =$ 1,275 990 144
$\alpha_2 =$ 38—38—48,8	$\beta_2 =$ 54—20—23,5	$\gamma_2 =$ 87—00—47,7	$\varphi_2 =$ 1,010 671 848
$\alpha_3 =$ 72—15—38,4	$\beta_3 =$ 75—07—46,6	$\gamma_3 =$ 32—36—35,0	$\varphi_3 =$ 0,632 042 292
$\alpha_4 =$ 105—21—38,7	$\beta_4 =$ 19—57—59,7	$\gamma_4 =$ 54—40—21,6	$\varphi_4 =$ 1,117 043 899
$\alpha_5 =$ 48—10—57,1	$\beta_5 =$ 37—49—42,5	$\gamma_5 =$ 93—59—20,4	$\varphi_5 =$ 1,320 247 897
$\alpha_6 =$ 48—20—56,1	$\beta_6 =$ 67—47—33,8	$\gamma_6 =$ 63—51—30,1	$\varphi_6 =$ 0,986 334 202
$\alpha_7 =$ 69—56—36,7	$\beta_7 =$ 46—41—00,0	$\gamma_7 =$ 63—22—23,3	$\varphi_7 =$ 0,820 974 079
$\alpha_8 =$ 62—36—22,0	$\beta_8 =$ 67—24—11,1	$\gamma_8 =$ 49—59—26,9	$\varphi_8 =$ 0,862 678 161

$[\alpha] =$ 496—43—27,8 $[\beta] =$ 417—15—00,5 $[\gamma] =$ 526—01—31,7

$[\alpha] + [\beta] + [\gamma] =$ 1440—00—00,0

$p =$ 3,059 055 922
$q =$ 2,402 227 471
$m =$ 3,889 539 812
$S_{0n} =$ 20 164,577
$d_9 =$ 5 184,309
$\nu_0^n =$ 103—44—33,4
$\delta =$ +38—08—31,1
$\nu_0^{47} =$ 141—53—04,5

$\beta_1 =$ 48—06—23,3
$\beta_1 - \beta_2 =$ 353—45—59,8
$\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 =$ 68—53—46,4
$\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_4 =$ 48—55—46,7
$\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_4 + \beta_5 =$ 86—45—29,2
$\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_4 + \beta_5 - \beta_6 =$ 18—57—55,4
$\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_4 + \beta_5 - \beta_6 + \beta_7 =$ 65—38—55,4
$\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_4 + \beta_5 - \beta_6 + \beta_7 - \beta_8 =$ 358—14—44,3

TAČKA	ν_{i-1}^{i} β_i	d_i	Δy	Δx	y	x
Δ 0					42741,32	95056,90
	141—53—04,4	6615,13	4083,17	−5204,58		
Δ 47	48—06—23,3				46824,49	89852,32
	9—59—27,8	5239,64	909,05	5160,18		
Δ 49	305—39—36,5				47733,54	95012,50
	135—39—04,3	3276,70	2290,50	−2343,16		
Δ 63	75—07—46,6				50024,04	92669,34
	30—46—50,9	5791,62	2963,62	4975,31		
Δ 81	340—02—00,3				52987,66	97644,65
	190—48—51,2	6844,57	−1284,21	−6723,02		
Δ 48	37—49—42,5				51703,45	90921,63
	48—38—33,7	5113,46	3838,18	3378,73		
Δ 58	292—12—26,2				55541,63	94300,36
	160—50—59,9	4256,18	1396,21	−4020,66		
Δ 59	46—41—00,0				56937,84	90279,70
	27—31—59,9	4472,39	2067,43	3965,86		
Δ 60	292—35—48,9				59005,27	94245,56
	140—07—48,8	5184,31	3323,37	−3978,97		
Δ n					62328,64	90266,59
		46793,48	19587,32	−4790,31	19587,32	−4790,31
			$f_y = 0,00$	$f_x = 0,00$		

U navedenom primeru vidimo da nema odstupanja po koordinatnim osama, tj. $f_y = f_x = 0$, što u ovom slučaju predstavlja samo kontrolu računanja. Isti bi slučaj morao biti i kada se radi na način koji je opisan u literaturi, gde se takođe radi o urazmeravanju, ali uz drukčije izravnavanje uglova zbog merenih veznih uglova na datim tačkama, kao drukčiji način računanja dužina. Dozvoljeno odstupanje koje se u stručnoj literaturi navodi $(f_d \leqslant \pm 18\sqrt{[S]}\,\text{km})$ nema svoga opravdanja.

LITERATURA

K. Mihailović: Geodezija II, Beograd, 1974.