GENERALISANJE PROBLEMA IZRAVNANJA U TRIANGULACIJI

Krunislav *MIHAILOVIĆ* — Beograd*

Nedavno je pod ovim nazivom objavljen rad u Geodetskom listu [1]. U ovom radu učinjen je pokušaj da se sistematizuju razne mogućnosti koje nam stoje na raspolaganju prilikom izravnanja trigonometrijskih, odnosno geodetskih mreža. Takođe autor je želeo da ukaže na nepravilnosti koje se čine prilikom ocene tačnosti slobodnih mreža. Ovo je u stvari kritički osvrt na rad Mitermajera koji je objavljen u međunarodnom geodetskom časopisu [2].

Nisam siguran da sam dobro i verno interpretirao želje autora, pa svaki propust treba shvatiti kao omašku koja neće umanjiti vrednost autorovog rada.

Apriori ne negirajući klasifikaciju mogućih slučajeva pri izravnanju koje je predložio dr Stevanović, mišljenja sam da ovakva sistematizacija nije neophodna. Sve moguće kombinacije mogu se veoma uspešno ilustrovati na opšte-poznatu podelu geodetskih mreža na slobodne (lokalne) i one koje to nisu (vezane).

Kada je mreža slobodna tada prethodno moramo na poznati način definisati koordinatni sistem, pa tek onda pristupiti izravnanju mreže. Činjenica je, da će se u ovom slučaju dobiti prividan utisak o tačnosti položaja tačaka u izabranom lokalnom koordinatnom sistemu. Tačke koje su bliže koordinatnom sistemu imaće manju položajnu gre.ku u odnosu na one tačke koje se nalaze na velikoj udaljenosti od koordinatnog početka. Time se stiče pogrešan utisak da su tačke koje su bliže koordinatnom sistemu određene sa većom tačnošću. Ova problematika je detaljno razmatrana u radovima [2], [3] i [4].

Neslobodne mreže su one mreže koje imaju više datih podataka nego što je neophodno potreban da bi se definisao koordinatni sistem. Takav se slučaj pojavljuje u svim mrežama koje su klasificirane u redove, mreža koje se sukcesivno razvijaju ili mreža kod kojih se koordinate (ili elemnti koordinata) mogu odrediti neposrednim merenjem, odnosno indirektnim putem.

U takvom slučaju, pri izravnanju, nužno je imati u vidu tri logična i jedino moguća slučaja,

$$m_1 < m_2$$

$$m_1 = m_2$$

$$m_1 > m_2.$$

---

* Adresa autora: Prof. dr Krunislav Mihailović, Geodetski otsek Građevinskog Fakulteta Beograd.

Prvi slučaj najviše se koristi u praksi i on je uvek prisutan kada se pri izravnanju mreža primenjuje opštepoznati princip »od većeg ka manjem«, tj. predhodni radovi su veće tačnosti u odnosu na radove koji se kasnije obavljaju.

Drugi slučaj asocira na metodu dvogrupnog ili višegrupnog izravnanja.

Treći slučaj se pojavljuje kada se radovi veće tačnosti oslanjaju na radove manje tačnosti. Tada se ozbiljno nameće pitanje kako sačuvati tačnost preciznih merenja. Klasičan način obrade nije pravilno primeniti, jer će on izazvati deformaciju precizno obavljenih merenja.

Kada se radovi veće tačnosti oslanjaju na radove manje tačnosti može da se postupi na tri načina:

1) ponovo preračunati celu mrežu a o nejednakoj tačnosti merenih veličina voditi računa posredstvom težina [5],

2) pri izravnanju uzeti u obzir greške datih veličina [5],

3) visokopreciznu mrežu izravnati u lokalnom koordinatnom sistemu a zatim putem transformacije naći najbolji položaj ove mreže u državnom koordinatnom sistemu [5]. Tu postoje dve mogućnosti da se primeni transformacija sa promenom dužina (Helmertova transformacija) ili bez promene dužine (strogo uklapanje [5]). U prvom i drugom slučaju oblik mreže se ne menja tj. zadovoljen je uslov konfornosti. Moguće je sprovesti i takvu transformaciju gde će se promeniti uglovne i linearne veličine. Koja će se transformacija primeniti zavisi od konkretnog slučaja.

U prvom delu rada [1] razmatra se slučaj izravnanja kada se vodi računa o greškama datih veličina. U tom slučaju jednačine odstupanja u opštem obliku glase:

$$\begin{array}{ll} \text{Za date veličine} & V_1 = Ex_1 + f_1 \\ \text{Za mrežu koja se izravnava} & V_2 = A_2x_1 + B_2x_2 + f_2. \end{array} \Bigg\} \quad (1)$$

Iz praktičnih razloga svrsishodno je svesti vektor $f_1 = 0$, time što će se usvojiti vrednosti datih veličina za približne vrednosti traženih veličina.

Tada će (1) dobiti praktičniji oblik [5]

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = E\,x'_1 \\ V_2 = A_2\,x'_1 + B_2\,x'_2 + f'_2. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Na osnovu uopštenog principa najmanjih kvadrata dobiće se vektori x_1, x_2, x_1' i x_2'. Svođenje vektora $f_1 = 0$ nema uticaja na ocenu tačnosti navedenih vektora. Zato ista formula služi za kofaktore definitivnih koordinata [5].

$$K_x = K_{x'} = \begin{Vmatrix} K_{\xi}^{-1} + A_2^{*} K_{f_2}^{-1} A_2 & A_2^{*} K_{f_2}^{-1} B_2 \\ B_2^{*} K_{f_2}^{-1} A_2 & B_2^{*} K_{f_2}^{-1} B_2 \end{Vmatrix} \quad (3)$$

U radu [1] se tvrdi da (3) predstavlja kofaktore samo za jednačine odstupanja (1), a ne i za (2) tj. da $K_x \neq K_{x'}$. Ovakvo tvrđenje bazira na tezi da nisu isti kofaktori za definitivne koordinate i popravke

$$K_X \neq K_V \text{ ili } K_{X'} \neq K_V.$$

Ova nejednakost je opštepoznata, no iz ovoga ne može da sledi zaključak da nisu isti kofaktori koji se odnose na jednačine odstupanja (1) i (2) tj. da $K_x \neq K_{x'}$.

Pokušaćemo da na jednostavan način objasnimo da izbor vrednosti za približne koordinate nemaju uticaja na kofaktore (na ocenu tačnosti).

Definitivne koordinate mogu se ovako prikazati

$$X_i = x_{oi} + x_i \tag{4}$$

ili

$$X_i = x'_{oi} + x'_i \tag{5}$$

Za približne veličine x_{oi} ili x'_{oi} mogu se usvojiti sasvim proizvoljne vrednosti koje su dovoljno bliske vrednostima traženih veličina X_i. U takvim slučajevima približne vrednosti nemaju nikakvog uticaja na vrednosti traženih veličina. Sasvim je irelevantno šta će se usvojiti za približne vrednosti traženih veličina x_{oi} ili x'_{oi}.

Iz (4) i (5) neposredno sledi

$$K_{X_i} = K_{x_i} = K_{x'_i}$$

jer je dispersija približnih vrednosti jednaka nuli

$$D[x_{oi}] = D[x'_{oi}] = 0.$$

Ako su date veličine »proglašene« za približne vrednosti traženih veličina, onda one dok obavljaju tu funkciju imaju tretman kao i ostale približne vrednosti. Dakle, njihova dispersija jednaka je nuli.

Kod strogog izravnanja imaju isti tretman merene i date veličine. Ne predstavlja nikakvu smetnju što su date veličine ustvari funkcije nekih prethodno merenih veličina koje su iskorišćene za određivanje vrednosti datih veličina. Prilikom izravnanja i merene i date veličine služe istom cilju tj. na osnovu njih treba odrediti vektore traženih veličina,

$$X_1 = x_{1 \cdot o} + x_1 = x'_{1 \cdot o} + x'_1 \tag{6}$$

$$X_2 = x_{2 \cdot o} + x_2 = x'_{2 \cdot o} + x'_2. \tag{7}$$

Vektor X_1 predstavlja poboljšane vrednosti elemenata vektora datih veličina ξ.

Neposredno iz (6), (7) i (3) sledi

$$K_{X_1} = K_{x_1} = K_{x'_1} = K_\xi + A_2^* K_{f_2}^{-1} A_2 \tag{8}$$

$$K_{X_2} = K_{x_2} = K_{x'_2} = B_2^* K_{f_2}^{-1} B_2 \tag{9}$$

gde je K_ξ kovarjaciona matrica kojom se definiše zavisnost između datih veličina.

Na osnovu izloženog može se izvesti zaključak da važi jednakost $K_{x_1} = K_{x'_1}$ i $K_{x_2} = K_{x'_2}$. Ukoliko nas interesuje kovarijaciona matrica popravaka K_v, onda se moramo dopunski angažovati da bi smo odredili njene elemente [5].

U radu [1], da bi se ukazalo na nepravilnosti koje se navodno čine kod ocene tačnosti slobodnih mreža po postupku koji je predložio Mitermajer [2], dr Stevanović uzima slučaj da su merenjem određene koordinate za sve tačke u mreži. Zatim, smatra korisnim da se problem razmotri u dve varijante (alternative). Naime, jednačine odstupanja za merenjem određene koordinate mogu se obrazovati na dva načina,

I ALTERNATIVA

$$V_1 = A_1 x + f_1 \tag{10}$$

$$V_2 = E x + F_2 \tag{11}$$

II ALTERNATIVA

$$V_1 = A_1 x' + f'_1 \tag{12}$$

$$V_2 = E x'. \tag{13}$$

Na osnovu ove dve alternative u radu [1] se izvodi zaključak da x predstavlja vektor priraštaja privremenih koordinata, a navodno x′ su popravke za merenjem određene koordinate. Ovakvo tvrđenje na prvi pogled postaje sasvim razumljivo (vidi jednač.inu [13]), no samo prividno. U suštini x i x′ su vektori priraštaja privremenih koordinata, s tim što se pogodnim izborom privremenih koordinata vrednosti priraštaja mogu izjednačiti sa vrednostima popravaka ($v_i = x_i'$). No to ne znači da se karakter priraštaja x′ promenio. Računskim putem je podešeno da budu iste vrednosti za priraštaje privremenih koordinata i za popravke. Time se ne mogu niti smeju priraštaji privremenih koordinata proglasiti popravkama. Priraštaji zadržavaju karakter priraštaja, a popravke karakter popravaka.

Polazeći od gore navedenog pogrešnog zaključka, u radu [1] se čine novi propusti, tvrdnjom da K_x predstavlja kofaktore definitivnih koordinata, a K_x' navodno nisu kofaktori definitivnih koordinata, ($K_X = K_x$, ali $K_X \neq K_x'$). Ovakvo tvrđenje nije logično i mora da važi jednakost $K_X = K_x = K_x'$.

Isto tako, ponuđene dve alternative ne mogu zajedno (istovremeno) egzistirati. To je jedan od problema sa dva moguća praktična rešenja. Prvo rešenje kada postoji F_2 i drugo kada je $F_2 = 0$. Oba rešenja daju potpuno iste rezultate. Iz praktičnih razloga u praksi bolje je primeniti drugo rešenje »drugu alternativu«.

Na osnovu jednačina odstupanja (10), obrazujemo normalne jednačine i dopišimo jednačine odstupanja (11)

$$\begin{aligned} N x + n &= 0 \\ V_2 &= E x + F_2. \end{aligned} \tag{14}$$

Ove nas jednačine podsećaju na izravnanje po metodi posrednih merenja kada nepoznate stoje u nekom matematičkom odnosu. Prema tome, možemo odmah napisati

$$x = [N^* (NN^*)^{-1} N - E] F_2 - N^* (NN^*)^{-1} n \tag{15}$$

$$K_x = E - N^* (NN^*)^{-1} N + N (NN^*)^{-1} K_n (NN^*)^{-1} N. \tag{16}$$

Ovo važi za $P_F = E$.

Ako je $F_2 = 0$, (vidi jednačine odstupanja [13]) dobije se

$$x' = -N^{*}(NN^{*})^{-1}n' \tag{17}$$

$$K_{x'} = K\,x. \tag{18}$$

Vektor definitivnih koordinata, biće

$$X = x_0 + x = x'_0 + x'$$

$$K_X = K_x = K_{x'}.$$

Kada matrica N nije singularna (det $N \neq 0$), nema nikakvog smisla naknadnim merenjem odrediti koordinate, jer iz (15), (16), (17), (18) sledi

$$x = -N^{-1}n \quad i \quad x' = -N^{-1}n'$$

$$K_x = K_x = K_{x'} = N^{-1}.$$

Upravo se dobijaju vrednosti kao da nisu merene koordinate tačaka.

Uzmimo još slučaj kada u mreži nisu merenjem određene koordinate svih tačaka,

$$V = A_1 x_1 + A_2 x_2 + f.$$

Odgovarajuće normalne jednačine, biće [3]

$$\begin{aligned} A_1^{*} K_f^{-1} A_1 x_1 + A_1^{*} K_f^{-1} A_2 x_2 + A_1^{*} K_f^{-1} f = 0 \\ A_2^{*} K_f^{-1} A_1 x_1 + A_2^{*} K_f^{-1} A_2 x_2 + A_2^{*} K_f^{-1} f = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

ili

$$\begin{aligned} N_{11} x_1 + N_{12} x_2 + n_1 = 0 \\ N_{21} x_1 + N_{22} x_2 + n_2 = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Neka su merenjem određene samo koordinate tačaka koje pripadaju vektoru x_1. Tada jednačine odstupanja mogu da glase

$$V_2 = E\,x_1 + F_2 \tag{21}$$

ili

$$V_2 = E\,x'_1. \tag{22}$$

Ovde, takođe, svođenje vektora F_2 na nulu ($F_2 = 0$) ima trivijalan značaj. Te, iz praktičnih razloga najbolje je jednačine odstupanja (22) rešiti metodom najmanjih kvadrata, pod uslovom da budu zadovoljene normalne jednačine (20).

U tom slučaju, dobiće se

$$\begin{aligned} N_{11}^2 k_1 + N_{11} N_{12} k_2 + N_{12} x_2 + n_1 &= 0 \\ N_{21} N_{11} k_1 + N_{22} N_{12} k_2 + N_{22} x_2 + n_2 &= 0 \\ N_{21} k_1 + N_{22} k_2 \qquad\qquad &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

Ovde je usvojeno da je $P_F = E$. Iz (23) određuje se vektor priraštaja nepoznatih veličina x_2 i vektori korelata x_1 i x_2. Zatim se na osnovu korelata određuje vektor priraštaja nepoznatih veličina

$$x_1 = N_{11} k_1 + N_{12} k_2.$$

Svođenje vektora F_2 na nulu nema nikakav uticaj na vrednost nepoznatih veličina, niti na njihovu ocenu tačnosti.

Literatura

1. J. Stevanović: Generalisanje problema izravnanja u triangulaciji, Geodetski list br. 1—3, Zagreb 1976.
2. E. Mittermayer: A generalisation of the least-squares method for the adjustment of free networks, Billten géodèsique, br. 104, Paris 1972.
3. K. Mihailović: Apsolutne i relativne greške traženih veličina u lokalnim mrežama, Z. G. I, br. 14, Beograd 1973.
4. D. Tomković: Posredno izravnanje slobodne geodetske mreže, Geodetski list, Zagreb 1975.
5. K. Mihailović: Geodezija II, prvi deo, Beograd 1974.

KRATAK SADRŽAJ

U radu [1] ukazuje se na nepravilnosti koje se navodno čine prilikom ocene tačnosti nepoznatih veličina, po postupku koji je predložio Mitermajer [2]. Ova tvrdnja bazira na tezi da nisu isti kofaktori za definitivne koordinate i popravke,

$$K_x \neq K_v \text{ ili } K_{x'} \neq K_v$$

Ova nejednakost je poznata, no iz ovoga ne može da sledi zaključak, koji se izvodi u radu [1] da nisu isti kofaktori koji se odnose na jednačine popravaka (1) i (2) to jest da $K_x \neq K_{x'}$.

U ovom radu na osnovu (4) i (5) izvodi se zaključak da važi jednakost,

$$K_X = K_x = K_{x'}$$

Isto tako se ukazuje da ponuđene dve alternative u radu [1] ne mogu zajedno egzistirati. To je jedan problem sa dva moguća praktična rešenja. Kada postoji vektor F_2 i kada je on jednak nuli $F_2 = 0$. Svođenje vektora F_2 na nulu nema nikakav uticaj na vrednost nepoznatih količina niti na njihovu ocenu tačnosti.

ZUSAMMENFASSUNG

In der Arbeit [1] wird behauptet, dass die Genauigkeitsbeurteilung nach dem Verfahren von Mittermayer [2] unrichtig sei. Diese Behauptung gründet man auf der Tatsache der Verschiedenheit der Kofaktoren der Unbekannten mit jenen der Verbesserungen. D. h. aus den Beziehungen

$$K_X \neq K_V, \text{ bzw. } K_{X'} \neq K_V.$$

Diese Verschiedenheit ist wohlbekannt, daraus aber darf man nicht, wie in der Arbeit [1] getan wurde, den Schluss ziehen, dass die Kofaktoren die

sich jeweils auf die Verbesserungsgleichungen (1) und (2) beziehen verschieden seien, d. h. dass daraus etwa

$$K_x \neq K_{x''}$$

folgt.

Im Gegensatz zu den angeführten Behauptungen, kommt man in dieser Arbeit, und zwar aufgrund von Beziehungen 4 und 5 zum Schluss, dass die nachstehende Gleichheit

$$K_x = K_x = K_{x''}$$

besteht.

Ausserdem weist man in dieser Arbeit nach, dass in der Arbeit [1] herausgestellten zwei Ausgleichungsprobleme in Wirklichkeit nur ein Ausgleichungsproblem darstellen. Bei der Durchführung der Ausgleichung kann man wohl, und zwar aus praktischen Erwägungen verschiedene Wege gehen. Z. B. man kann den Vektor F_2 auf Null bringen. Diese Operation hat aber weder eine Wirkung auf die Schätzung der Unbekannten noch beeinflusst sie die Kofaktoren der Unbekannten.