PRILOG DISKUSIJI O OCENI TAČNOSTI ZA SLUČAJEVE KADA SE U IZRAVNAVANJE UKLJUČUJU PRIBLIŽNE ODNOSNO MERENE VREDNOSTI

Jovan *STEVANOVIĆ* — Beograd*

U radu »Generalisanje problema izravnavanja u triangulaciji«, »Geodetski list« br. 1—3, 1976. god., Zagreb, je izraženo mišljenje da inverzne matrice date jednačinom 26 i jednačinom 30 u navedenom radu nemaju isti tretman pri oceni tačnosti. Dok je inverzna matrica data jednačinom 26 ujedno i matrica kofaktora nepoznatih odnosno definitivno izravnatih koordinata, matrica data jednačinom 30 teorijski to nije, bez obzira što se radi o dvema jednakim matricama.

Nakon publikovanja ovog rada usledile su diskusije koje osporavaju ovakvo mišljenje. Da bi se otklonili nesporazumi i ukazalo na stvarnu suštinu problema, u sledećem će biti obrađen jedan od najprostijih primera, koji bi ujedno bio i ilustracija ispravnosti u citiranom radu navedenog mišljenja.

Radi maksimalnog pojednostavljivanja problema, primer će da se odnosi na problematiku nivelmana, što neće da ima nekog bitnog značaja na opštost zaključivanja, jer je u citiranom radu navedeno da se izneta gledanja u tom radu u istom stepenu odnose i na nivelman i na gravimetriju kao i na triangulaciju.

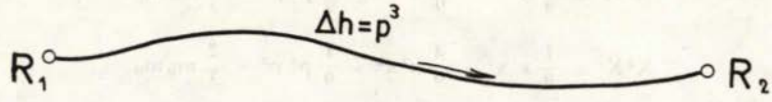
Neka su odgovarajućim metodama određene kote repera R_1 i R_2. Po pretpostavci reperi su na obalama mora, a kote su određene posredstvom mareografa. Između ovih repera sproveden je nivelman i određena je visinska razlika između njih. Pored ovoga, pretpostavimo još i da su obe kote repera i visinska razlika između njih određene sa istom tačnošću, odnosno sa srednjom greškom m_0.

Pri svemu ovome, u skladu sa oznakama u citiranom radu, neka su:

x^1, x^2 — merenjem određene vrednosti kota
p^3 — nivelanjem određena visinska razlika
v^1, v^2, v^3 — popravke izravnavanja za sve ove vrednosti
$\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{p}^3$ — izravnate vrednosti odgovarajućih merenih veličina
x_0^1, x_0^2 — približne vrednosti kota
X^1, X^2 — priraštaji kota nakon izravnavanja ako su jednačine popravaka formirane preko približnih kota
X'^1, X'^2 — popravke kota nakon izravnavanja ako su jednačine popravaka formirane preko merenjem određenih kota.

* Adresa autora: dr Jovan Stevanović — Beograd, Geopremer.

Na slici je dat šematski raspored repera.



Pošto nesporazumi u gledanju na razmatran problem proizilaze iz mogućnosti da se u izravnavanje mogu uključiti ili približne kote ili merenjem određene kote, obrada ovog primera biće obavljena preko obeju ovih mogućnosti.

Jednačine popravaka bi bile:

a) Za slučaj da izravnavanje bazira na približnim kotama:

$$\begin{aligned} v^1 &= \bar{x}^1 - x^1 = X^1 + x_0^1 - x^1 \\ v^2 &= \bar{x}^2 - x^2 = X^2 + x_0^2 - x^2 \\ v^3 &= \bar{x}^2 - \bar{x}^1 - p^3 = X^2 - X^1 + x_0^2 - x_0^1 - p^3 \end{aligned} \tag{1}$$

b) Za slučaj ako se u izravnavanje uključuju direktno merenjem određene vrednosti kota:

$$\begin{aligned} v^1 &= X'^1 \\ v^2 &= X'^2 \\ v^3 &= X'^2 - X'^1 + x^2 - x^1 - p^3 \end{aligned} \tag{2}$$

Možemo uočiti kao bitno za razmatrani problem da kod slučaja b) u jednačinama popravaka za v^1 i v^2 ne egzistiraju slobodni članovi.

Nije teško doći do normalnih jednačina za oba razmatrana slučaja, kao i do odgovarajućih inverznih matrica i zaključiti da se one međusobno ne razlikuju:

$$\begin{vmatrix} +2 & -1 \\ -1 & +2 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} +\frac{2}{3} & +\frac{1}{3} \\ +\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} \end{vmatrix} \tag{3}$$

Isto tako, lako se može, na osnovu ovih matrica, uobičajenim i poznatim postupkom izravnavanja, doći do rešenja odnosno do traženih nepoznatih za oba slučaja:

a)
$$\begin{aligned} X^1 &= -x_0^1 + \frac{2}{3}x^1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}p^3 \\ X^2 &= -x_0^2 + \frac{1}{3}x^1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}p^3 \end{aligned} \tag{4}$$

b)
$$\begin{aligned} X'^1 &= -\frac{1}{3}x^1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}p^3 \\ X'^2 &= +\frac{1}{3}x^1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}p^3 \end{aligned} \tag{5}$$

Kofaktori ovih nepoznatih, ili što je isto, srednje greške nepoznatih jesu:

a)
$$\overline{X^1X^1} = \frac{4}{9}\overline{x^1x^1} + \frac{1}{9}\overline{x^2x^2} + \frac{1}{9}\overline{p^3p^3} = \frac{2}{3}m_0m_0$$
$$\overline{X^2X^2} = \frac{1}{9}\overline{x^1x^1} + \frac{4}{9}\overline{x^2x^2} + \frac{1}{9}\overline{p^3p^3} = \frac{2}{3}m_0m_0 \tag{6}$$

b)
$$\overline{X'^1X'^1} = \frac{1}{9}\overline{x^1x^1} + \frac{1}{9}\overline{x^2x^2} + \frac{1}{9}\overline{p^3p^3} = \frac{1}{3}m_0m_0$$
$$\overline{X'^2X'^2} = \frac{1}{9}\overline{x^1x^1} + \frac{1}{9}\overline{x^2x^1} + \frac{1}{9}\overline{p^3p^3} = \frac{1}{3}m_0m_0 \tag{7}$$

Ovako možemo pisati s obzirom na u početku navedenu pretpostavku da su sve veličine izmerene istom tačnošću zbog čega je: $\overline{x^1x^1} = \overline{x^2x^2} = \overline{p^3p^3} = m_0m_0$.

Na osnovu ovih jednačina možemo konstatovati da se kofaktori priraštaja pod a) i kofaktori popravaka pod b) međusobno razlikuju.

Definitivno izravnate kote bi bile:

a)
$$\bar{x}^1 = x_0^1 + X^1 = \frac{2}{3}x^1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}p^3$$
$$\bar{x}^2 = x_0^2 + X^2 = \frac{1}{3}x^1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}p^3 \tag{8}$$

b)
$$\bar{x}^1 = x^1 + X'^1 = \frac{2}{3}x^1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}p^3$$
$$\bar{x}^2 = x^2 + X'^2 = \frac{1}{3}x^1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}p^3 \tag{9}$$

Definitivne kote su i za slučaj pod a) i za slučaj pod b) međusobno jednake.

Očigledno je da će za slučaj pod a) kofaktori za izravnate kote biti jednaki kofaktorima nepoznatih priraštaja, kao i da je inverzna matrica ovog slučaja ujedno i matrica kofaktora definitivnih kota.

Međutim, kod slučaja pod b) kofaktori nepoznatih popravaka X^1 i X^2 nisu jednaki kofaktorima definitivnih kota. Kofaktori definitivnih kota, prema jednačini 31 citiranog rada, bi za slučaj pod b) koristeći vrednosti napred navedene jednačine 7, bili:

$$\overline{\bar{x}^1\bar{x}^1} = \overline{x^1x^1} - \overline{X'^1X'^1} = m_0m_0 - \frac{1}{3}m_0m_0 = \frac{2}{3}m_0m_0$$

i tako dalje.

Mislim da će ovaj prilog dat u ovakvom obliku doprineti da se rasčiste dileme koje su na početku navedene.