MATEMATIČKA OBRADA PODATAKA MEHANIČKIM PUTEM

Ivan MOLNAR — Novi Sad*

Kao što je poznato, metoda matematičke abrade podataka ima mnogo, ali centralno mesto među njima ima metoda najmanjih kvadrata. U geodetskoj praksi se najčešće koristi postupak K. F. Gaussa (1777—1855) koji bazira na računu verovatnoće.

Metoda najmanjih kvadrata, međutim, ne bazira na potpuno diskutabilnim osnovama. Izvođenja vezana za izravnanja primenom ove metode sadrže neke slabosti. Tako npr. da greške slede zakon grešaka, odnosno da je funkcija, zakon grešaka pretpostavlja veoma velik broj merenja, a u praksi se ostvaruje mali broj merenja uz pretpostavku pojave podjednakog broja pozitivnih i negativnih grešaka, itd.

I pored proizvoljnosti učinjenim pretpostavkama, metoda najmanjih kvadrata je opšte prihvaćena kao koristan princip i najšire se koristi kao postupak. Princip ΣPVV = minimum je pogodan da svim oblastima koje koriste merenja, ponudi najprihvatljivija rešenja matematičke obrade podataka.

Jedna od mogućih metoda matematičke obrade rezultata merenja je i metoda zasnovana na principima mehanike. U prošlosti su u geodetskoj literaturi postojali pokušaji da se obrada rezultata merenja ostvari na osnovama principa mehanike. Autor [1] smatra da se:... »Metoda najmanjih kvadrata može ostvariti bez zaključaka baziranih na teoriji verovatnoće, isključivo na osnovama mehanike, odnosno na osnovu paralelograma sila, virtuelnih brzina i zakona najmanjeg rada.«

Pri matematičkoj obradi podataka zasnovanoj na principima mehanike, greške merenja postaju samo u prenosnom smislu mehanički pojam. Svaki pojedini rezultat merenja se može smatrati fiktivnom silom, i povratnim dejstvom,, svakoj popravci merenja takođe odgovara po jedna sila. Najverovatnije vrednosti traženih veličina se dobivaju na osnovu uslova ravnoteže sistema sila popravaka. U nastavku se daje jedan od mogućih načina izravnanja koordinata tačke na osnovu merenih dužina strana metodom koji se zasniva na statičkim principima.

Zamislimo da popravke opaženih pravaca i merenih dužina obrazovane u cilju određivanja koordinata neke tačke uspostavljaju, u mestu definitivne (izravnate) vrednosti tačke, takav sistem sila u ravni sa zajedničkom presečenom tačkom, koji se nalazi u ravnoteži. Sila F koja pripada opažanom pravcu odgovara popravci merenja v na jediničnom rastojanju i javlja se kao odstupanje upravno na pravac, koje nastoji da tačku dovede u pravu koja odgovara rezultatu merenja.

* Adresa: Mr Ivan Molnar, Novi Sad — Maršala Tita 16.

Sila, pak koja pripada merenoj dužini, odnosno deo popravke merene dužine koja otpada na jedinicu dužine, nastoji da točku dovede u pravac merene dužine prema orgovarajućem mestu rezultata merenja. Svakom pojedinačnom opaženom pravcu ili merenoj dužini pripada po jedna sila.

Obzirom da je u izravnatom mestu tačke sistem sila u ravnoteži, to je izbor pozitivnog smisla sila proizvoljan. Smatrajmo silu pozitivnu tada, kada je popravka merenja pozitivna. Saobrazno tome, sila koja pripada opažanom pravcu je:

$$F = \frac{v''}{\rho''} \cdot 1 = \frac{v''}{\rho''} \qquad \text{I}$$

dok je sila koja pripada merenoj dužini, obeležavajući dužinu sa d

$$F = \frac{v_d}{d} \qquad \text{II}$$

Ravnotežu izražava stav, da su projekcije sume sila pojedinačno po koordinatnim osama ravne nuli

$$\Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_x = 0 \qquad \text{III}$$

IZRAVNANJE PUTEM MERENIH DUŽINA STRANA

Ako je *d* izravnata (definitivna) dužina strane između date A_i i tražene tačke T, rezultat merene dužine strane d', tada je popravka merene dužine strane

$$V_d = d - d' \qquad (1)$$

Suma projekcije sila po koordinatnim osovinama obrazovane prema (II) jesu:

$$F_y = \frac{V_d}{d} \sin \nu, \qquad F_x = \frac{V_d}{d} \cos \nu \qquad (2)$$

Razlika između privremene dužine d_0 i rezultata merene dužine d', naziva se odstupanje dužine

$$S = d_0 - d' \qquad (3)$$

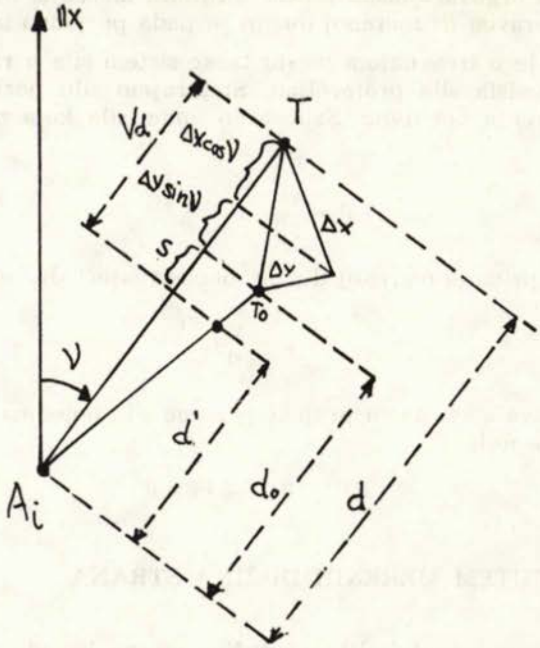
Popravka merene dužine, na osnovu slike 1. je

$$V_a = \Delta y \sin \nu + \Delta x \cos \nu + S \qquad (4)$$

Obzirom da sume projekcija sila treba da su ravne nuli, projekcije sila se mogu izmnožiti sa ρ''. Učinivši to i računajući priraštaje koordinata i jedinicama desimetra, jedinične ravnoteže u matričnom obliku glase:

$$\begin{Vmatrix} [b] & -[c] \\ -[c] & [d] \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \Delta y \\ \Delta x \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} [s \sin \nu] \\ [s \cos \nu] \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \qquad (5)$$

gde su a, b i c koeficijenti pravaca



Sl. 1

$$d_i = + \frac{0{,}1\,\rho''\cos^2\nu_i}{d_i}, \quad b_i = + \frac{0{,}1\,\rho''\sin^2\nu_i}{d_i}$$

$$c_i = - \frac{0{,}1\,\rho''\sin\nu_i\cos\nu_i}{d_i} \tag{6}$$

dok je vrednost:

$$s = \frac{S\,\rho''}{d} \tag{7}$$

U cilju računanja koeficijenata pravaca, sem merene i privremene dužine strana treba poznavati i privremenu vrednost direkcionog ugla merene strane, jer se pri računanju koristi vrednost sinusa odnosno ovog ugla.

Multiplikacijom projekcija sila sa ρ'' uspostavljene su, zapravo, projekcije sila, upravne na pravac merene dužine prema traženoj tački (direkcioni uglovi su manji za 90°) i jednake su projekcijama sila koje pripadaju zamišljenim (fiktivnim) merenjima pravaca. U tom smislu vrednosti računate na osnovu (7) mogu se smatrati odstupanjima pravaca fiktivnih pravaca.

Priraštaji direkcionih uglova za fiktivno opažene pravce koji zamenjuju merene dužine strana, računaju se prema izrazu

$$\Delta\nu_i = \frac{b_i\,\Delta y + c_i\,\Delta x}{+\sin\nu_i} \qquad \text{ili} \qquad \Delta\nu_i = \frac{-\,c_i\,\Delta y + d_i\,\Delta x}{+\cos\nu_i} \tag{8}$$

dok se popravke određuju po formuli

$$\upsilon_i = \Delta\nu_i + s_i \tag{9}$$

Odgovarajuće popravke merenih strana, na osnovu popravaka fiktivnih pravaca se računaju uspostavljanjem veza

$$\upsilon_{di} = \frac{\upsilon_i}{\rho''} d_i \tag{10}$$

Iz osnovnog principa izravnanja sledi, da unutar granice tačnosti računanja, moraju biti zadovoljeni uslovi, putem popravaka fiktivno opaženih pravaca

$$[\upsilon \cos \nu] = 0 \quad \text{i} \quad [\upsilon \sin \nu] = 0 \tag{11}$$

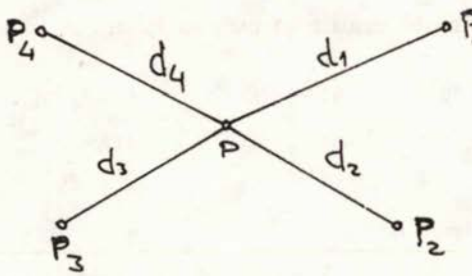
Ako se putem definitivnih koordinata tražene tačke sračunaju definitivne dužine strana d, tada se popravke dužina računaju prema izrazu

$$\upsilon_{di} = d_i - d'_i \tag{12}$$

koje sada u granicama tačnosti računanja treba da se slažu sa vrednostima računatim prema (10) i treba da zadovolje uslove

$$\left[\frac{\upsilon_d}{d} \sin \nu\right] = 0 \qquad \left[\frac{\upsilon_d}{d} \cos \nu\right] = 0 \tag{13}$$

Primer* Sa svojim koordinatama zadane su tačke P_1, P_2, P_3, P_4. Određuju se koordinate tačke P merenjem stranica d_1, d_2, d_3, d_4 (lučni presek). Koordinate tačke P se određuju mehaničkim izravnanjem.



Sl 2

Koordinate datih tačaka		merene dužine
Y_i m	X_i m	d'_i m
+9,84	+39,35	104,25
+14,76	+121,18	90,67
+167,26	+186,94	111,59
+127,91	+29,52	94,57

* Primer uzet iz knjige Prof. dr ing. Nikole Čubranića »Teorija pogrešaka s računom izjednačenja«. (strana 106.)

TABELA A

Merenje	ν ° ′ ″			d′ m	d_0 m	S m	s″	d m	V_d m
P_1	45	11	53	104,250	104,517	+0.267	+526,9	104,267	+0,017
P_2	130	31	14	90,670	91,084	+0,414	+937,5	90,699	+0,020
P_3	228	23	36	111,590	111,351	−0,239	−442,7	111,621	+0,031
P_4	332	15	21	94,570	94,324	−0,246	−537,9	94,600	+0,030

TABELA B

Merenje	a	b	c	s	sin ν_0	cos ν_0	ssin ν	scos ν
P_1	+98,1	+99,5	−98,9	+526,9	+0,710	+0,705	+374,1	+371,5
P_2	+95,8	+130,9	+111,9	+937,5	+0,760	−0,650	+712,5	−609,4
P_3	+81,7	+103,9	−92,1	−442,7	−0,749	−0,664	+331,6	+294,0
P_4	+171,2	+47,5	+90,1	−537,9	−0,466	+0.885	+250,7	−476,0
[ ]	+446,8	+381,8	+11,0				+1668,9	−419,9

Proces izravnanja se može pratiti na osnovu tabela A, B i C. Jednačine ravnoteže glase

$$\begin{Vmatrix} 381,8 & -11,0 \\ -11,0 & 446,8 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \Delta Y \\ \Delta X \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1668,9 \\ 419,9 \end{Vmatrix} \quad \text{tj.}$$

$$A_x = f$$

inverzna matrica matrice A

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} Q'_{yy} & Q'_{yx} \\ Q'_{xy} & Q'_{xx} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0,002621 & 0,000065 \\ 0,000065 & 0,002240 \end{Vmatrix}$$

Priraštaji koordinata su

$$x^T = \|\Delta y\ \Delta x\| = \|-4,347 + 0,833\|$$

Obzirom da je na osnovu tabela A [dss] = 158091,2, to je iz jednačine

$$-f^T x + \frac{1}{20,63} ds^T s = \frac{1}{20,63} dv^T v$$

vrednost $dv^T v$ = 1211. U tabeli C ova vrednost iznosi 1294,9. Slaganje je unutar granice tačnosti računanja.

Srednja greška jedinice težine

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{1294\ 9}{2}} = \sqrt{647,45} = \pm 25\ 4$$

TABELA C

Merenje	$-C\Delta Y$	$a\Delta X$	[ ]	$+\cos\nu_s$	$\Delta\nu$	s"	v"	$v\sin\nu$	$v\cos\nu$	d km	dvv	V_d m
P_1	−429,92	+81,72	−348,20	+0,705	−439,90	+526,90	+33,00	+23,27	+23,27	0,104	113,5	+0,017
P_2	+486,43	+79,80	+566,23	−0,650	−871,12	+937,50	+66,38	+50,45	−43,15	0,091	399,6	+0,029
P_3	−400,36	+68,06	−332,30	−0,664	+500,45	−442,70	+57,75	−43,25	−38,35	0,112	372,3	+0,031
P_4	+391,66	+142,61	+534,27	+0,885	+603,69	−537,90	+65,79	−30,66	+58,22	0,095	409,5	+0,030
								−0,03	−0,01		1294,9	

Uzmimo kao primer srednju grešku prve merene dužine strane

$$\mu_1 = 25{,}4 \frac{1000}{\rho''} \sqrt{0{,}10} = \pm\, 0{,}039 \text{ m.}$$

Prilikom rešavanja ravnotežnih jednačina, dobivene su za koordinate koeficijentama težina proporcionalne vrednosti Q'yy = 0,002621 i Q'xx = 0,002240. U ovakvom slučaju srednje greške koordinata se računaju prema izrazu

$$\mu_y = 0{,}1 \sqrt{\frac{Q'_{yy}}{20{,}63}}\,\mu_0 = 0{,}022 \sqrt{Q'_{yy}}\,\mu_0 \quad \text{i} \quad \mu_x = 0{,}022 \sqrt{Q'_{xx}}\,\mu_0$$

$$\mu_y = 0{,}022 \sqrt{0{,}002621} \cdot 25{,}4 = \pm\, 0{,}029 \text{ m.}$$

$$\mu_x = 0{,}022 \sqrt{0{,}002240} \cdot 25{,}4 = \pm\, 0{,}026 \text{ m.}$$

U tabeli C su za kontrolu računate sume komponenata dejstvujućih sila na nepoznate. Dobivene vrednosti su:

$$\sum_{i=1}^{4} v_i \sin \nu_i = -\,0{,}03 \approx 0 \qquad \sum_{i=1}^{4} v_i \cos \nu_i = -\,0{,}01 \approx 0$$

Postignuti rezultati izravnanja dobiveni primenom metode mehaničkog izravnanja se potpuno slažu sa rezultatima postignutim u primeru u knjizi Prof. dr. ing. N. Čubranića.

LITERATURA:

[1] Fridrich D.K.: Zwei aus den Grundgesetzen der Mechanik abgeleitete Beweise für die Richtigkeit der Methode der kleinsten Quadrate (Zeitschrift für Vermelsungswesen 72. Stuttgart, 1943.)

[2] Wolf.: Ausgleichungerechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate (Hamburg, 1961)

[3] Hazay I.: Die mechanischen Grundprincipien der Augleichung. Acta Techn. Hungar. XXX, 1, 2 Budapest 1960.

[4] Molnar I.: Primena S krivina kod produženja stanica, Železnice br. 3, Beograd 1966 g.

ZUSAMMENFASSUNG

In der geodätischen Praxis wurde die mathematische Bearbeitung von Messungsergebnissen überwiegend auf der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufgebaut und zwar ausgehend vom GAUSS-schen Fehlerfortpflanzugsgesetz. Die Bedingung [pvv] = Min. ist tatsächlich günstig allen jenen Bereichen, welche die Beobachtungen verwenden, die annehmenswerte Lösungen anzubieten.

Einer der benutzbaren Methoden der numerischen Auswertung von Messungsdaten kommen die Prinzipien aus der Mechanik zugute. Bei ihrer Anwendung werden den Messungen bzw. Beobachtungen nur im übertragenen Sinne eine mechanische Bedeutung zugeschrieben. Wenn man von denselben Ausgangsdaten startet, werden dann die identischen Resultate wie nach dem sonst in der Methode der kleinsten Quadrate üblichen Wege erhalten.