TRIGONOMETRIJSKI NIVELMAN — NOVE FORLULE ZA OCJENU TAČNOSTI

*Gligorije PEROVIĆ — Beograd**

Prema onome što je do sada urađeno na polju ocjene tačnosti trigonometrijskog nivelmana, kao metode određivanja visina tačaka, može se zaključiti da ima dosta pitanja bez tačnih odgovora. Neka od tih pitanja bila bi izvori slučajnih i sistematskih grešaka mjerenih elemenata i veličine tih grešaka. Ovaj rad je upravo tome posvećen.

Jedno od bitnih pitanja razmatranih u ovom radu jeste preciznije definisanje grešaka mjerenih elemenata ili, bolje rečeno, bliže određivanje broja i vrste grešaka mjerenih elemenata.

Pri ovoj analizi prethodno su uočene neke greške koje nisu uzimane u obzir u dosadašnjim formulama, a zatim u toku same analize otkriveno je da neke greške, sadržane u dosadašnjim formulama kao nezavisne, ne postoje kao takve.

Prije objašnjenja novih formula treba napomenuti da one same po sebi nisu bile cilj ovoga rada, kao i to da nisu izvedene pri detaljnoj analizi (statističkoj analizi). Cilj ovoga rada je dakle tačnije definisanje i određivanje veličine grešaka mjerenih elemenata. Cijela analiza, tj. ocjena tačnosti, izvedena je samo na osnovi dvostrukih mjerenja visinskih razlika kod nas — u SFRJ, jer su jedino ti podaci bili lako dostupni.

Za ovu analizu učinjene su dvije pretpostavke:

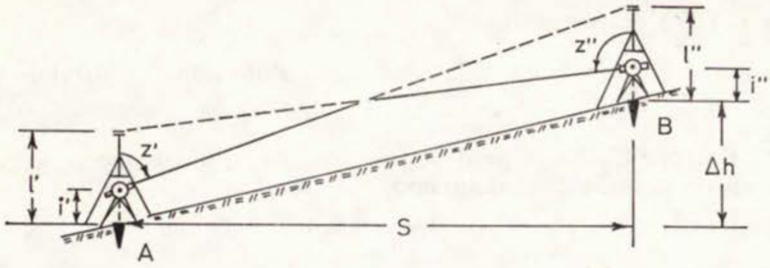
1. Da postoji sistematska greška u mjerenju zenitne daljine prouzrokovana načinom viziranja, naime prilikom viziranja vrha signala horizontalni konac tangira signal odozgo;

2. Da se srednja vrijednost koeficijenata refrakcije na jednoj određenoj teritoriji razlikuje od vrijednosti koja se uzima u račun (kod nas ta vrijednost koja se uzima u račun iznosi $k = 0{,}13$), što je opet jedan sistematski uticaj tj. sistematska greška. U koliko postoje ove (i druge) sistematske greške onda matematička nada razlike »uspon« — »pad« neće biti jednaka nuli. Odavde se izvlači zaključak da, u koliko imamo srednje vrijednosti (ovdje smo matematičku nadu zamijenili sa srednjom vrijednošću inače ne bi mogli doći do rješenja) razlika »uspon« — »pad« visinskih razlika za određenu teritoriju i za različite dužine možemo odrediti vrijednosti ovih sistematskih grešaka, što je i urađeno. Izvori podataka za ovaj deo bili su:

1. Inž. N. Svečnikov, VIŠA GEODEZIJA — druga knjiga, Beograd 1955,
2. Ing. Dragmio M. Bošković — Beograd; SREDNJE ODSTUPANJE PRI TRIGONOMETRIJSKOM ODREĐIVANJU VISINA, Geodetski list broj 9—10, Zagreb 1953.

* Gligorije Perović dipl. inž. — Građevinski fakultet Beograd

A sada pređimo na dokaz. Radi određivanja visinske razlike Δh između tačaka A i B izmjerena je (sl. 1.) u objema tačkama: zenitn daljina, visina signala i visina instrumenata. Pored toga određena je i dužina S između tačaka A i B.



Sl 1

Neka je

$$\Delta h' = S \operatorname{cotg} Z' - k' \frac{s^2}{2r} + i' - l'' + \frac{s^2}{2r} + K \tag{1}$$

visinska razlika iz podataka u tački A — »uspon« i

$$\Delta h'' = S \operatorname{cotg} Z'' - k'' \frac{s^2}{2r} + i'' - l' + \frac{s^2}{2r} - K \tag{2}$$

visinska razlika iz podataka u tački B — »pad«.

Razlika iz vrijednosti »uspon« »pad« dobiće se ustvari kao zbir (1) i (2). Označimo ovu razliku sa d, pa će biti

$$d = \Delta h' + \Delta h'' = S(\operatorname{cotg} Z' + \operatorname{cotg} Z'') - \frac{s^2}{2r}(k' + k'') + (i' + i'') - (l' + l'') + \frac{s^2}{2r} \tag{3}$$

Dalje, treba definisati sve greške koje ulaze u razliku (3), pa zatim naći matematičku nadu veličine d.

Prvo, uvedimo oznake:

Δs — ukupna — totalna greška strane S;
Δi — ukupna — totalna greška visine instrumenata;
Δl — ukupna — totalna greška visine signala;
$\Delta z = c_z + T_z$ — ukupna — totalna greška zenitne daljine sastavljena iz sistematske greške c_z i slučajne greške T_z;
$\Delta k = c_k$ — ukupna — totalna greška koeficijenta refrakcije k sastavljena samo od sistematske greške c_k. (4)

Tačne vrijednosti pojedinih elemenata koji ulaze u (3) označimo sa indeksom »O« — nula.

Napomena. Prema načinu merenja visine signala i instrumenta može se smatrati da nema sistematskih grešaka pa za njihove greške možemo uzeti

$$\begin{aligned} \Delta i &= \tau_i \\ \Delta l &= \tau_l \end{aligned} \tag{4'}$$

gdje su τ_i i τ_l slučajne greške.

Grešku Δs strane S za sada smatrajmo slučajnom, tj. uzmimo da je

$$\Delta s = \tau_s \tag{4''}$$

Ako mjerene elemente predstavimo pomoću njihovih tačnih vrijednosti i odgovarajućih grešaka tada dobijamo

$$d = d_o + \Delta d \tag{5}$$

gdje je:

$$d_o = \Delta h'_o + \Delta h''_o = S_o (\operatorname{cotg} Z'_o + \operatorname{cotg} Z''_o) - \frac{S_o^2}{2r}(c'_k + c''_k) +$$

$$+ i'_o + i''_o - (l'_o + l''_o) + \frac{S_o^2}{r} = 0 \tag{6}$$

tačna vrijednost razlike d;

$$\Delta d = \tau_s \left[\operatorname{cotg} Z'_o + \operatorname{cotg} Z''_o - \frac{S_o}{r}(k'_o + k''_o) + \frac{2S}{r}\right] + S_o \left(\frac{c'_z + \tau'_z}{\sin^2 Z'_o} - \frac{c''_z + \tau''_z}{\sin^2 Z''_o}\right) -$$

$$- \frac{S_o^2}{2r}(c'_k + c''_k) + \tau'_i + \tau''_i - (\tau'_l + \tau''_l) \tag{7}$$

greška razlike d.

Ako sada potražimo matematičku nadu razlike d imajući u vidu (6) i (7) dobićemo

$$M\{d\} = M\{d_o + \Delta d\} = M\{d_o\} + M\{\Delta d\} =$$

$$M\left\{\tau_s\left[\operatorname{ctg} Z'_o + \operatorname{ctg} Z''_o - \frac{S_o}{r}(k'_o + k''_o) + \frac{2S_o}{r}\right]\right\} +$$

$$+ S_o\left(\frac{c'_z + \tau'_z}{\sin^2 Z'_o} + \frac{c''_z + \tau''_z}{\sin^2 Z''_o}\right) - \frac{S^2_o}{2r}(c'_k + c''_k) + \tau'_i + \tau''_i - (\tau'_l + \tau''_l) \tag{8}$$

Ovdje je neophodno pretpostaviti da je

$$\begin{aligned} k'_o &= k''_o = k_o \\ c'_k &= c''_k = c_k \\ Z'_o &= Z''_o = Z_o = 90^\circ \end{aligned} \tag{9}$$

kao i to da je

$$\begin{aligned} S_o &< 10\,\text{km} \\ \tau_s &\lesssim 0{,}1\,\text{m}. \end{aligned} \tag{9'}$$

Imajući u vidu (9) i (9') dobijemo

$$M\{d\} = M\left\{\tau_s\left[\operatorname{cotg} Z'_o + \operatorname{cotg} Z''_o - \frac{S_o}{r}(k'_o + k''_o) + \frac{2S_o}{r}\right]\right\} +$$

$$+ M\{S_o(2c_z + \tau'_z + \tau''_z)\} - M\left\{\frac{S^2_o}{r}c_k\right\} + M\{\tau'_1 + \tau''_1\} - M\{\tau'_2 + \tau''_2\} \tag{10}$$

odnosno

$$M\{d\} = 2\,S_o\,M\{c_z\} - \frac{S^2_o}{r}M\{c_k\}, \tag{11}$$

pošto je

$$M\{\tau'\} = M\{\tau''\} = 0. \tag{12}$$

Pošto su c_z i c_k sistematske greške sa konstantnim predznakom i konstantnom vrijednošću to je

$$M\{c_z\} = c_z$$
$$M\{c_k\} = c_k, \tag{13}$$

pa je

$$M\{d\} = 2\,S_o\,c_z - \frac{S^2_o}{r}c_k.$$

Radi lakšeg pisanja izbrišemo indeks »0« — nula pa imamo

$$\boxed{M\{d\} = 2\,Sc_z - \frac{S^2}{r}c_k} \tag{14}$$

Očigledno je $M\{d\} \neq 0$ osim u slučaju

$$c_z = \frac{S}{2r}c_k.$$

U praksi nemamo M {d} već srednju vrijednost $\overline{d}$. I za dužine S imamo diskretne vrijednosti, pa konačno možemo napisati

$$\overline{d}_i = 2\,S_ic_z - \frac{S_i^2}{r}c_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{14'}$$

Dalja aproksimacija u (14') sastojala bi se u tome da podatke razdjelimo po grupama zavisno od dužina. Ovdje je baš iskorišćena podjela u grupe koju je naveo u svom radu Ing. D. Bošković, tako da je dobijeno svega pet grupa, a to su:

I grupa (i = 1), za dužine od 0,5 do 1 km,
II grupa (i = 2), za dužine od 1 do 1,5 km,
III grupa (i = 3), za duž'ne od 1,5 do 2 km,
IV grupa (i = 4), za dužine od 2 do 2,5 km,
V grupa (i = 5), za dužine od 2,5 do 3 km.

Nedostatak ovih podataka je u tome što nemaju srednju vrijednost dužine u grupi, pa se pri ovom računanju umjesto srednje vrijednosti S morala uzeti vrijednost dužine koja odgovara sredini intervala, tako je uzeto:

za I grupu S_1 = 0,75 km,
za II grupu S_2 = 1,25 km,
za III grupu S_3 = 1,75 km,
za IV grupu S_4 = 2,25 km,
za V grupu S_5 = 2,75 km.

Srednja vrijednost $\bar{d}_i$ u grupi i dobijena je tako što je zbir razlika d podijeljen sa brojem razlika u toj grupi. Tako su definitivno dobijene funkcijske veze koje odgovaraju funkciji veze kod posrednog izravnanja gdje su nepoznate c_z i c_k.

Polazni podaci su dati u Tabeli 1.

Redni broj grupe i	Dužine strana u grupi od — do km	Broj razlika d u grupi n_i	Razlike $[d]_i=[u+q]_i$ (u—»uspon«) (q—»pad«) m	Srednja razlika $\bar{d}_i = \frac{[d]_i}{n_i}$ m	Strane S_i km	Primjedbe
1	0,5—1	1123	+0,02	+0,000 018	0,75	
2	1—1,5	1608	+6,84	+0,004 25	1,25	
3	1,5—2	1161	+18,18	+0,015 66	1,75	
4	2—2,5	402	+7,17	+0,017 84	2,25	
5	2,5—3	82	+3,40	+0,041 46	2,75	
Zbir:		4376	+35,61			

Sada je neophodno bilo uzeti u obzir i težine, i one su računate po formuli

$$p_i = \frac{k}{n_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

gdje je $k > o$.

Dalje, formirane su jednačine popravaka, a zatim normalne jednačine, koristeći se principom [pvv] = minimum, čije rešenje daje najvjerovatnije vrijednosti veličina c_z i c_k. Ovdje je dat samo opšti oblik jednačina popravaka koji izgleda ovako

$$v_{\bar{d}_i} = 2\, S_i\, v_z - \frac{S_i^2}{r} v_k + f_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \tag{16}$$

gdje je sa v označena popravka odgovarajuće veličine, a sa f slobodni član u jednačinama popravaka.

Na ovaj način za veličine c_z i c_k dobijene su vrijednosti

$$\begin{aligned} c_z &= -0{,}388'' \\ c_k &= -0{,}383. \end{aligned} \tag{17}$$

Ako sada sračunamo koeficijent refrakcije koji odgovara ovim vrijednostima dobićemo

$$\bar{k} = 0{,}13 - c_k = 0{,}168. \tag{18}$$

što predstavlja srednju vrijednost koeficijenta refrakcije za teritoriju Jugoslavije, pošto su pri ovom računanju korišćeni podaci iz trinaest srezova sa cijele teritorije SFRJ.

Na sličan način postupamo i sa kvadratom razlike d. Kvadrirajmo (5), odnosno (6) i (7), a zatim potražimo matematičku nadu, dobićemo

$$\begin{aligned} M\{d^2\} &= M\{(d_0 + \Delta d)^2\} = M\{d_0^2 + 2\,d_0\Delta d + (\Delta d)^2\} = M\{(\Delta d)^2\} = \\ &= M\left\{\left[\tau_s(\operatorname{ctg} Z'_0 + \operatorname{ctg} Z''_0) - \frac{S_0}{r}(k'_0 + k''_0) + \left(\frac{2S_0}{r}\right) + \right.\right. \\ &\left.\left. + S_0\left(\frac{c'_z + \tau'_z}{\sin^2 Z'_0} + \frac{c''_z + \tau''_z}{\sin^2 Z''_0}\right) - \frac{S^2_0}{2r}(c'_k + c''_k) + \tau'_1 + \tau''_1 - (\tau'_l + \tau''_l)\right]^2\right\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Postupajući kao kod dokaza sa $M\{d\}$ i imajući u vidu (9) i (9′) poslije nekoilko jednostavnih transfomacija dobijamo da je

$$\boxed{M\{d^2) = (M\{d\})^2 + 2\,S^2\,m^2_z + 2\,(m^2_1 + m^2_l)} \tag{20}$$

gdje je sa m^2 označena matematička nada kvadrata slučajne greške. U formuli (20) izostavljen je član koji proističe iz člana

$$\tau_s\left[(\operatorname{cotg} Z'_0 + \operatorname{cotg} Z''_0) - \frac{S_0}{r}(k'_0 + k''_0) + \frac{2S_0}{r}\right]$$

smatrajući ga zanemarljivom veličinom u odnosu na vrijednost razlike d.

U formuli (20) veličina $2\,(m_i^2 + m_l^2)$, koja potviče od greške visine instrumenta i signala, nije posebno raspravljana već je uzeto da je (m_t — nova oznaka)

$$2\,(m^2_1 + m^2_l) = m^2_t \tag{21}$$

I ovdje je $M\{d^2\}$ zamijenjeno sa srednjom vrijednošću $\overline{d^2}$ i izvršena podjela u pet grupa kao ranije, pa jednačine (20) prelaze u oblik

$$\overline{d^2_i} = (M\{d_i\})^2 + 2\,S^2_i\,m^2_z + m^2_t, \quad (i = 1, 2, 3, 4\ 5) \tag{22}$$

U jednačinama (22) nepoznate su samo m_z i m_t pošto $M\{d^2\}$ možemo sračunati prema (14) i (17).

Najvjerovatnije vrijednosti m_z i m_t dobijene su takođe pod uslovom [pvv] = minimum i iznose

$$\begin{aligned} m_z &= 8'',95, \\ m_t &= 3{,}40\ \text{sm}. \end{aligned} \tag{23}$$

Za težine su i ovdje uzete vrijednosti

$$p_i = \frac{k}{n_i}, \ (k < 0).$$

Podaci korišćeni pri ovom računanju navode se u Tabeli 2.

Redni broj grupe i	Dužine strana u grupi od—do km	Broj razlika d u grupi n_i	$[p\,d^2]_i^{*)}$	$[d^2]_i^{*)}$	Srednja vrijednost $\overline{d^2}_i = \frac{[d^2]_i}{n_i}$ m²
1	0,5—1	1123	60 612	34 094	30,360
3	1—1,5	1608	76 805	120 008	74,632
2	1,5—2	1161	47 182	14 4 495	124,457
4	2—2,5	402	16 724	84 665	210,610
5	2,5—3	82	3 052	23 081	281,473

$$m_t = 3{,}40 \text{ sm}. \tag{23}$$

Vidimo da u ovim formulama nema slučajne greške m_k koeficijenta refrakcije jer ona upravo i ne postoji

Dokaz. Neka je k kriva refrakcija (sl. 2) koja orgovara koeficijentu refrakcije k, a k' kriva refrakcije pri mjerenju. Zenitna daljina i koeficijent refrakcije povezani su formulama preko ugla ρ.

$$A = 180° - Z'_a = 180° - (Z_a + \rho_a). \tag{24}$$

$[d^2]_i$ moralo se svako $[pd^2]_i$ pomnožiti sa $\frac{1}{p_i} = S^2_i$, a S_i uzeti prema (15).

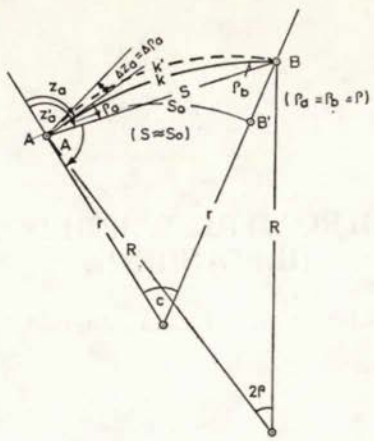
Ugao ρi koeficijenat refrakcije k povezani su formulom

$$\rho = k\frac{S}{2r}, \tag{25}$$

pa je sada (ako izostavimo indekse)

$$A = 180° - \left(Z + k\frac{S}{2r}\right)$$

* Za težinu p u izvornim podacima stoji vrijednost $p = 1:S^2$, pa da bi se dobilo $[d^2]_i$ moralo se svako $[pd^2]_i$ pomnožiti sa $\frac{1}{p_i} = S_i^2$ a S_i uzeti prema 15



Sl. 2

odakle se dobija

$$Z = 180^\circ - A - k\frac{S}{2r} \tag{26}$$

tj. Z je funkcija od k.

Diferenciranjem (26) dobijamo

$$\boxed{(\Delta Z)_k = -\Delta k\frac{S}{2r}} \tag{27}$$

pošto je A konstanta.

Dakle kada se mijenja refrakciona kriva, odnosno koeficijenat refrakcije, mijenja se i zenitna daljina proporcionalno koeficijentu -(S:2r) ili, drugačije rečeno, ova greška ostaje u ukupnoj grešci zenitne daljine; ili, matematički tačno definisano, *ona je komponenta greške zenitne daljine*. Prema tome ne može se izdvojiti u nezavisnu grešku odnosno prevesti u grešku koeficijenta refrakcije.