NEKI METODSKI PRILOZI MATEMATIČKOJ TEORIJI VIŠE GEODEZIJE

*Manojlo MILADINOVIĆ — Beograd**

1. UVOD

Za matematički definisanu površ koja dovoljno tačno predstavlja oblik Zemlje, uzima se obrtni elipsoid sa malom spljoštenošću. Određivanje zemljinog elipsoida sastoji se u određivanju parametara, koji karakterišu njegovu veličinu, oblik i orijentaciju u zemljinom telu.

Praktično izučavanje oblika Zemlje svodi se na određivanje koordinata tačaka neke površi u jednom, opštem sistemu za celu Zemlju.

U našoj i svetskoj literaturi iz ove oblasti, odnosi između geometrijskih veličina interpretiraju se i izučavaju klasičnim metodama matematike a čije osnove nalazimo još u radovima Gausa, Helmerta, Kleroa itd.

U ovom radu smo pokušali, da primenom savremenih matematičkih metoda definišemo neke probleme matematičke teorije više geodezije.

1.1. *Primena tenzora i vektora u geometriji*

Za izražavanje veza između geometrijskih veličina i između fizičkih veličina koristimo se algebrom i analizom. Među njima razlikujemo skalare, vektore i tenzore.

Može se reći da su tenzori opšte veličine za izražavanje odnosa između geometrijskih i fizičkih veličina, a vektori i skalari se smatraju posebnim vrstama tenzora.

Koordinate ma koje tačke, u koordinatnom sistemu, su komponente vektora.

Kako su koordinate tačke U u stvari i koordinate pomeranja $\overrightarrow{OP}$ (O je koordinatni početak), to znači da svakom vektoru odgovara pomeranje tačke iz koordinatnog početka.

U odnosu na neki Dekartov pravougli koordinatni sistem y′ kvadrat linijskog elementa koji definiše metriku Euklidovog prostora, određuje se obrascem

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{N} (dy^i)^2 = \sum_{i=1}^{N} dy^i \cdot dy^i$$

* Manojlo Miladinović, dipl. inž. Zavoda za fotogrametriju Beograd, Admirala Geprata 14

ako se radi o Euklidovom prostoru E_N od N dimenzija. Ako umesto Dekartovih uvedemo generalisane koordinate

$$y^I = y^I(x^1, x^2, \dots, x^N)$$

biće

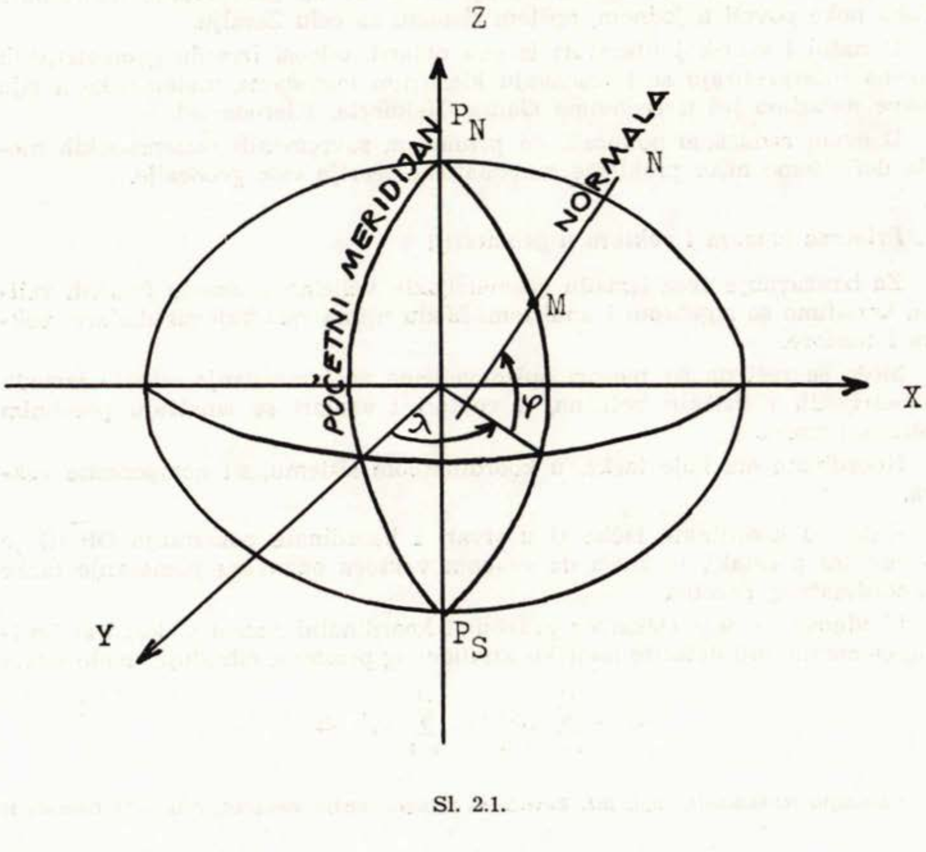
$$ds^2 = g_{IJ}\, dx^I\, dx^J$$

$$g_{IJ} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial y^k}{\partial x^I} \cdot \frac{\partial y^k}{\partial x^J}$$

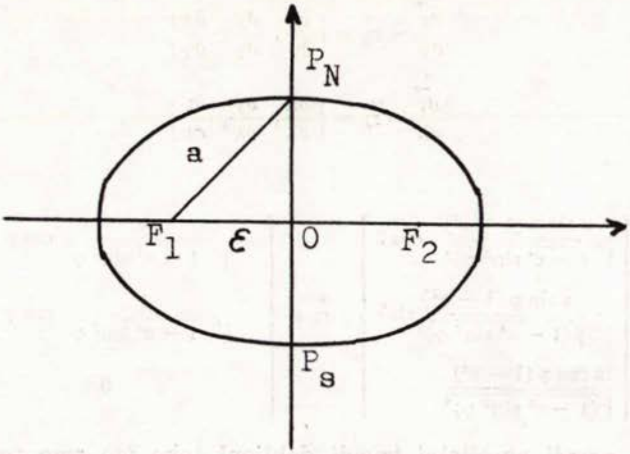
g_{ij} je simetrični dvostruki tenzor. Zove se i osnovni (fundamentalni) metrički tenzor drugog reda ili samo metrički tenzor.

2. PARAMETRI ZEMJINOG ELIPSOIDA. VEKTORSKA JEDNAČINA ELIPSOIDNE POVRŠI

Na slici 2.1 dat je obrtni elipsoid. Za dati elipsoid uveli smo geografske koordinate (unutrašnje koordinate) φ i λ.



Sl. 2.1.



Sl. 2.2.

Geografska širina φ tačke M je ugao obrazovan normalom N na površi elipsoida u toj tački sa ravni ekvatora, pri čemu je $\varphi \in [-\pi/2, +\pi/2]$ odnosno imamo severne i južne geografske širine.

Geografska dužina λ tačke M je ugao između ravni nultog odnosno početnog meridijana i meridijana tačke M. Geografske dužine se računaju istočno i zapadno od početnog meridijana i to $\lambda \in [-\pi, +\pi]$.

Za početak ortonormiranog prostornog sistema uzeta je početna tačka O. Osovina Oz poklapa se sa obrtnom osovinom elipsoida.

Jednačina elipsoida u vektorskom obliku $\vec{r} = \vec{r}(\varphi, \lambda)$ ili koordinate tačke M glase:

$$\vec{r}(\varphi, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \cos \varphi \cos \lambda = X = x(\varphi, \lambda) \\ \dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \cos \varphi \sin \lambda = Y = y(\varphi, \lambda) \\ \dfrac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \sin \varphi \quad = Z = z(\varphi, \lambda) \end{cases}$$

gde je a = velika poluosovina elipse

$b = a\sqrt{1 - e^2}$ = mala poluosovina elipse

$e = \dfrac{\varepsilon}{a}$, ε — odstojanje žiže od centra $F_1O = F_2O = \varepsilon$

Veličina ε često se naziva prvi brojni ekscentricitet elipse [vidi 1].

2. *Koordinatni vektori elipsoida*

Parcijalni izvodi vektorske funkcije $\vec{r} = \vec{r}(\varphi, \lambda)$ po φ i λ zovu se koordinatni vektori površi i obeležavaju se sa $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$ i $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \lambda}$. U zadatoj tački elipsoida imali bi

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \vec{r}_\varphi = \left\{\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right\}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \lambda} = \vec{r}_\lambda = \left\{\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \frac{\partial z}{\partial \lambda}\right\}$$

odnosno,

$$\vec{r}_\varphi = \begin{Bmatrix} \dfrac{-a \sin\varphi\,(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} \cos\lambda \\ -\dfrac{a \sin\varphi\,(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} \sin\lambda \\ \dfrac{a \cos\varphi\,(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} \end{Bmatrix}; \quad \vec{r}_\lambda = \begin{Bmatrix} -\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \cos\varphi \sin\lambda \\ \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \cos\varphi \cos\lambda \\ 0 \end{Bmatrix}$$

pri čemu su gornji parcijalni izvodi dobijeni tako što smo prethodno našli sledeće izvode:

$$\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\right)' = \frac{-\sin\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi} + \dfrac{1}{2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\,2e^2\sin\varphi\cos^2\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi} =$$

$$= -\frac{\sin\varphi\,(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}$$

kao i

$$\left(\frac{\sin\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}\right)' = \frac{\mathrm{sos}\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi} + \dfrac{1}{2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\,2e^2\sin^2\varphi\cos\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)} =$$

$$= \frac{\cos\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}$$

3. METRIČKI TENZOR ELIPSOIDA (TENZOR PRVE KVADRATNE FORME)

Definicija: U svakoj regularnoj tački (regularna tačka površi je ona u kojoj je rang matrice jednak dva ili drugim rečima u kojoj je ispunjen uslov $\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\lambda \neq 0$) elipsoida, koordinatni vektori $\vec{r}_\varphi$ i $\vec{r}_\lambda$ određuju po jednu ravan kojoj pripadaju tangentni vektori svih glatkih krivih koje leže na toj površi i prolaze kroz tu tačku.

Veličina

$$\| g \|_{2,2} = \begin{Vmatrix} g_{\varphi\varphi} & g_{\varphi\lambda} \\ g_{\lambda\varphi} & g_{\lambda\lambda} \end{Vmatrix}^{*)}$$

zove se metrički tenzor prve kvadratne forme elipsoida, odnosno

$$g_{\varphi\varphi} = \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\varphi = \frac{a^2(1-e^2)^2}{(1-e^2\sin^2\varphi)^3} \equiv E, \text{[vidi 1]}$$

* Simboli i metod izlaganja u ovom radu uzeti su prema [3]

$$g_{\varphi\lambda} = g_{\lambda\varphi} = 0 \equiv F,$$

$$g_{\lambda\lambda} = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \equiv G,$$

tj.

$$\| g \|_{2,2} = \begin{Vmatrix} \frac{a^2 (1 - e^2)^2}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3} & 0 \\ 0 & \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1, - e^2 \sin^2 \varphi} \end{Vmatrix} \tag{3,1}$$

4. PRVA (GAUSOVA FUNDAMENTALNA) KVADRATNA FORMA POVRŠI

Definicija: Izraz $ds^2 = g_{\varphi\varphi} (d\varphi)^2 + 2g_{\lambda\varphi} \, d\lambda \, d\varphi + g_{\lambda\lambda} (d\lambda)^2$ zove se prva kvadratna forma površi. Za obrtni elipsoid bi imali:

$$ds^2 = \frac{a^2 (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3} (d\varphi)^2 + \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} (d\lambda)^2$$

5. LAMEOVI (LAMÈ) KOEFICIJENTI

Veličine:

$$H_1 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\varphi} = \sqrt{g_{\varphi\varphi}}$$

$$H_1 = \frac{a (1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}} = M$$

gde je M poluprečnik krivine luka meridijana u datoj tački [vidi 1]

$$H_2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \lambda} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2} = \sqrt{\vec{r}_\lambda \cdot \vec{r}_\lambda} = \sqrt{g_{\lambda\lambda}}$$

$$H_2 = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = N \cos \varphi$$

gde je $N\cos\varphi$ poluprečnik krivine luka paralele u datoj tački i nazivaju se Lameovi koeficijenti.

6. DRUGA KVADRATNA FORMA POVRŠI (TENZOR DRUGE KVADRATNE FORME)

Definicija: Za elipsoid $\vec{r} = \vec{r}(\varphi, \lambda)$ gde je $\vec{r}$ dva puta diferencijabilna funkcija parametara φ, λ izraz $h_{\varphi\varphi} \, d\varphi)^2 + 2 \, h_{\varphi\lambda} \, d\varphi d\lambda + h_{\lambda\lambda}(d\lambda)^2$ nazivamo drugom kvadratnom formom površi elipsoida.

Koeficijenti druge kvadratne forme $h_{\varphi\varphi}, h_{\varphi\lambda} = h_{\varphi\lambda}, h_{\lambda\lambda}$ određuju tenzor druge kvadratne forme

$$\| h \|_{2,2} = \begin{Vmatrix} h_{\varphi\varphi} & h_{\varphi\lambda} \\ h_{\lambda\varphi} & h_{\lambda\lambda} \end{Vmatrix}$$

i određuju se po formulama:

$$h_{\varphi\varphi} = \frac{(\vec{r}_{\varphi\varphi}, \vec{r}_\varphi, \vec{r}_\lambda)}{\left| \vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\lambda \right|}; \quad h_{\lambda\varphi} = h_{\varphi\lambda} = \frac{(\vec{r}_{\varphi\lambda}, \vec{r}_\varphi, \vec{r}_\lambda)}{\left| \vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\lambda \right|}; \quad h_{\lambda\lambda} = \frac{(\vec{r}_{\lambda\lambda}, \vec{r}_\varphi, \vec{r}_\lambda)}{\left| \vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\lambda \right|}.$$

Za obrtni elipsoid bi imali:

$$\vec{r}_{\varphi\varphi} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{-\,a \cos\varphi\,(1 - e^2)\,(1 + 2\,e^2 \sin^2\varphi)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^5}} \cos\lambda \\[2ex] \dfrac{-\,a \cos\varphi\,(1 - e^2)\,(1 + 2\,e^2 \sin^2\varphi)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^5}} \sin\lambda \\[2ex] \dfrac{-\,a \sin\varphi\,(1 - e^2)\,(1 - e^2 - 2\,e^2 \cos^2\varphi)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^5}} \end{array} \right\},$$

$$\vec{r}_{\lambda\varphi} = \overleftarrow{r}_{\varphi\lambda} = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{a \sin\varphi \cos\varphi\,(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^3}} \sin\lambda \\[2ex] \dfrac{-\,a \sin\varphi \cos\varphi\,(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^3}} \cos\lambda \\[2ex] 0 \end{array} \right\},$$

$$\vec{r}_{\lambda\lambda} = \left\{ \begin{array}{c} -\,\dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}} \cos\varphi \cos\lambda \\[2ex] -\,\dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}} \cos\varphi \cos\lambda \\[2ex] 0 \end{array} \right\}$$

pri čemu su gornji parcijalni izvodi dobijeni tako što smo prethodno našli sledeće zvode:

$$\left[\frac{\sin\varphi}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^3}}\right]' = \frac{\cos\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi)^3} + \dfrac{1}{2\sqrt{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^3}} \cdot}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^3}$$

$$\cdot\, \frac{3\,(1 - e^2 \sin^2\varphi) \cdot 2\,e^2 \sin^2\varphi \cos\varphi}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^3} = \frac{\cos\varphi\,(1 + 2\,e^2 \sin^2\varphi)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^5}}$$

$$\left[\frac{\cos\varphi}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^3}}\right]' = \frac{-\sin\varphi \sqrt{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^3} + \dfrac{1}{2\sqrt{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^3}} \cdot}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^3}$$

$$\cdot\, \frac{3\,(1 - e^2 \sin^2\varphi)^2 \cdot 2\,e^2 \sin\varphi \cos^2\varphi}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^3} = \frac{-\sin\varphi\,(1 - e^2 - 2\,e^2 \cos^2\varphi}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^5}}.$$

Izračunajmo i veličinu

$$\left| \vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\lambda \right| = \sqrt{g_{\varphi\varphi} \cdot g_{\lambda\lambda} - g_{\lambda\varphi}} = W$$

odnosno

$$W = \sqrt{\frac{a^4 \cos^2\varphi\,(1 - e^2)^2}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^4}} = \frac{a^2 \cos\varphi\,(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2\varphi)^2}$$

Da bismo izračunali veličine $h_{\varphi\varphi}$, $h_{\lambda\varphi} = h_{\varphi\lambda}$, $h_{\lambda\lambda}$ napišimo ih u razvijenom obliku:

$$h_{\varphi\varphi}=\frac{1}{W}\begin{vmatrix} \frac{-a\cos\varphi(1-e^2)(1+2e^2\sin^2\varphi)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^5}}\cos\lambda & \frac{-a\cos\varphi(1-e^2)(1+2e^2\sin^2\varphi)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^5}}\sin\lambda & \frac{-a\sin\varphi(1-e^2)(1-e^2-2e^2\cos^2\varphi)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^5}} \\ \frac{-a\sin\varphi(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}\cos\lambda & \frac{-a\sin\varphi(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}\sin\lambda & \frac{a\cos\varphi(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} \\ \frac{-a\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\sin\lambda & \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\cos\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

Ako izračunamo gornju determinantu dobićemo:

$$h_{\varphi\varphi}=\frac{(1-e^2\sin^2\varphi)^2}{a^2\cos\varphi(1-e^2)}\cdot\frac{a^2\sin\varphi\cos\varphi(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^2}\cdot\frac{a\sin\varphi(1-e^2)(1-e^2-2e^2\cos^2\varphi)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^5}}+$$

$$+\frac{a\cos\varphi(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}\cdot\frac{(1-e^2\sin^2\varphi)^2}{a^2\cos\varphi(1-e^2)}\cdot\frac{a^2\cos^2\varphi(1-e^2)(1+2e^2\sin^2\varphi)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^2}=$$

$$=\frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^5}}[\sin^2\varphi(1-e^2-2e^2\cos^2\varphi)+\cos^2\varphi(1+2e^2\sin^2\varphi)]=$$

$$=\frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2)^3}}=M$$

Vrlo lako se može dokazati da je $h_{\lambda\varphi}=h_{\varphi\lambda}=0$. Na isti način ćemo izračunati i $h_{\lambda\lambda}''$.

$$h_{\lambda\lambda}=\frac{1}{W}\begin{vmatrix} -\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\cos\varphi\cos\lambda & -\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\cos\varphi\sin\lambda & 0 \\ -\frac{a\sin\varphi(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}\cos\lambda & -\frac{a\sin\varphi(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}\sin\lambda & \frac{a\cos\varphi(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} \\ -\frac{a}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)}}\cos\varphi\sin\lambda & \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\cos\varphi\sin\lambda & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{(1-e^2\sin^2\varphi)^2}{a^2\cos\varphi(1-e^2)}\cdot\frac{a\cos\varphi(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}\cdot\frac{a^2\cos^2\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}=\frac{a\cos^2\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=N\cos^2\varphi,\ \text{ili}$$

$$\|h\|_{2,2}=\begin{Vmatrix}\frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} & 0 \\ 0 & \frac{a\cos^2\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\end{Vmatrix}$$

Uporedimo tenzore I i II kvadratne forme, ako prethodno uvedemo odgovarajuće zamene za M i N

$$\|g\|_{2,2}=\begin{Vmatrix}M^2 & 0 \\ 0 & N^2\cos^2\varphi\end{Vmatrix};\qquad \|h\|_{2,2}=\begin{Vmatrix}M & 0 \\ 0 & N\cos^2\varphi\end{Vmatrix}\tag{6.1}$$

Iz gornjih matrica se jasno vidi u kakvom su odnosu koeficijenti prve i druge kvadratne forme. Očigledno je da su tenzori vrlo jednostavni što nam omogućuje da vrlo lako dođemo do ostalih podataka o površi obrtnog elipsoida.

7. NORMALNA KRIVINA KRIVE U PROIZVOLJNOM PRAVCU (AZIMUTU)

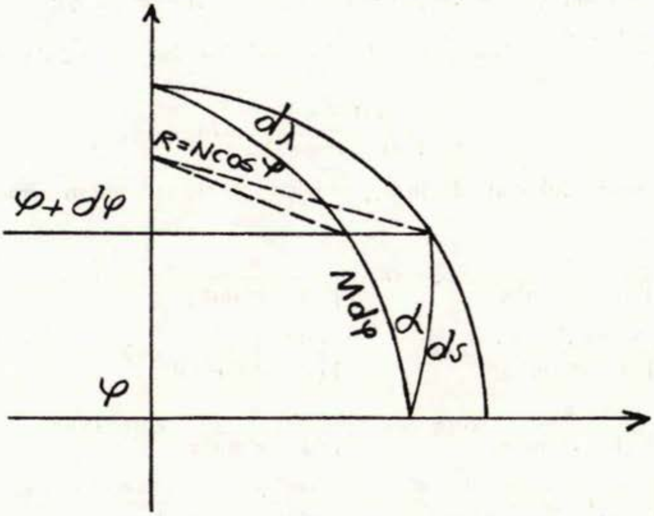
Normalna krivina krive definiše se kao količnik druge i prve kvadratne forme elipsoida

$$K_N = \frac{h_{\varphi\varphi}\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 + 2\,h_{\lambda\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\lambda} + h_{\lambda\lambda}}{g_{\varphi\varphi}\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 + 2\,g_{\lambda\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\lambda} + g_{\lambda\lambda}} \tag{7.1}$$

Nakon zamene koeficijenata iz (6.1) u (7.1) dobijamo

$$K_N = \frac{M\,(d\varphi)^2 + N\cos^2\varphi\,(d\lambda)^2}{M^2\,(d\varphi)^2 + N^2\cos^2\varphi\,(d\lambda)^2} \tag{7.2}$$

Obzirom da je $\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{M}{N}\cos\varphi\,\mathrm{ctg}\,\alpha$ (vidi sl. 7.1.)



Sl. 7.1.

imamo da je

$$K_N = \frac{M\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 + N\cos^2\varphi}{M^2\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 + N^2\cos^2\varphi} = \frac{\frac{M}{N}\,\mathrm{ctg}^2\alpha + 1}{N(1 + \mathrm{ctg}^2\alpha)} = \frac{N\cos^2\alpha + M\sin^2\alpha}{N\cdot M}$$

pa je

$$\frac{1}{r} = K_N = \frac{\cos^2\alpha}{M} + \frac{\sin^2\alpha}{N}$$

što je već poznata Ojlerova jednačina za računanje poluprečnika krivine u proizvoljnom azimutu α, ako su poznati poluprečnici krivina glavnih normalnih preseka M i N.

8. KRIVINE GLAVNIH NORMALNIH PRESEKA

Krivine glavnih normalnih preseka se dobijaju kao koreni jednačine

$$\begin{Vmatrix} h_{\varphi\varphi} - K\, g_{\varphi\varphi} & h_{\varphi\lambda} - K\, g_{\varphi\lambda} \\ h_{\lambda\varphi} - K\, g_{\lambda\varphi} & h_{\lambda\lambda} - K\, g_{\lambda\lambda} \end{Vmatrix} = 0$$

odakle se dobijaju krivine

$$K_1 = \frac{1}{M} \quad \text{i} \quad K_2 = \frac{1}{N}$$

9. GAUSOVA KRIVINA

Gausova krivina se dobija po formuli

$$K = K_1 \cdot K_2 = \frac{h_{\varphi\varphi} \cdot h_{\lambda\lambda} - h_{\lambda\varphi}^2}{g_{\varphi\varphi} \cdot g_{\lambda\lambda} - g_{\lambda\varphi}^2} = \frac{1}{M \cdot N}$$

10. SREDNJA KRIVINA

Srednja krivina se računa po formuli

$$H = \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = \frac{1}{2}\,\frac{h_{\varphi\varphi} \cdot g_{\lambda\lambda} + h_{\lambda\lambda} \cdot g_{\varphi\varphi}}{g_{\varphi\varphi} \cdot g_{\lambda\lambda}} = \frac{M + N}{2\,M \cdot N} \tag{10.1}$$

Do izraza (10.1) se vrlo lako došlo i to je algebarska vrednost srednjeg poluprečnika krivine.

Pri rešavanju mnogih zadataka više geodezije, koji se uglavnom odnose na računanje trigonometrijskih mreža viših redova, često se primenjuje taj postupak što se deo površine elipsoida zamenjuje površinom lopte sa tzv. srednjim poluprečnikom krivine. Ovaj poluprečnik se uzimao kao aritmetička sredina iz poluprečnika krivine svih normalnih preseka koji se mogu položiti kroz proizvoljnu tačku na površi elipsoida i računao se, prema tome, po formuli

$$r_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r(\alpha)\, d\alpha = \sqrt{M \cdot N} \tag{10.2}$$

gde je α azimut proizvoljnog pravca.

To je obrazac Gruntera i, prema tome, srednji poluprečnik krivine je geometrijska sredina iz poluprečnika krivine po meridijanu i prvom vertikalu. Sasvim opravdano se može postaviti pitanje koji od ova dva izraza realnije aproksimiraju deo obrtnog elipsoida u proizvoljnoj tački, površinom lopte.

Mi smo izvršili izvesna ispitivanja tako što smo sračunali efektivne vrednosti srednjih poluprečnika krivina (vidi tabelu 1) po formulama (10.1) i (10.2). Prilikom računanja uzeli smo da je (Beselov elipsoid):

$$a = 6\,377\,397.155 \text{ m}$$

$$a^2 = 0.006\,674\,261\,230.$$

TABLICA 1.

φ	M	N	$r_{sr} = H = \dfrac{2MN}{M+N}$	$r_o = \sqrt{MN}$	$r_o - r_{sr}$ [m]
0	6 334 832.03	6 377 397.16	6 354 842.68	6 355 478.07	635.39
10	6 336 744.91	6 378 039.00	6 356 199.15	6 356 795.05	595.90
20	6 342 258.19	6 379 888.20	6 360 092.77	6 360 582.65	489.88
30	6 350 720.55	6 382 724.46	6 366 024.26	6 366 373.22	348.96
40	6 361 126.91	6 386 208.83	6 373 246.97	6 373 457.36	210.39
42	6 363 334.57	6 386 947.53	6 374 769.48	6 374 955.22	185.74
44	6 365 559.79	6 387 691.94	6 376 300.72	6 376 463.26	162.54
46	6 367 791.74	6 388 438.42	6 377 833.23	6 377 974.13	140.90
50	6 372 232.37	6 389 923.08	6 380 872.41	6 380 975.05	102.64
60	6 382 697.57	6 393 419.26	6 387 984.36	6 388 021.38	37.02
80	6 396 842.66	6 398 138.72	6 397 489.63	6 397 490.16	0.53
90	6 398 786.85	6 398 786.85	6 398 786.95	6 398 786.85	0.00

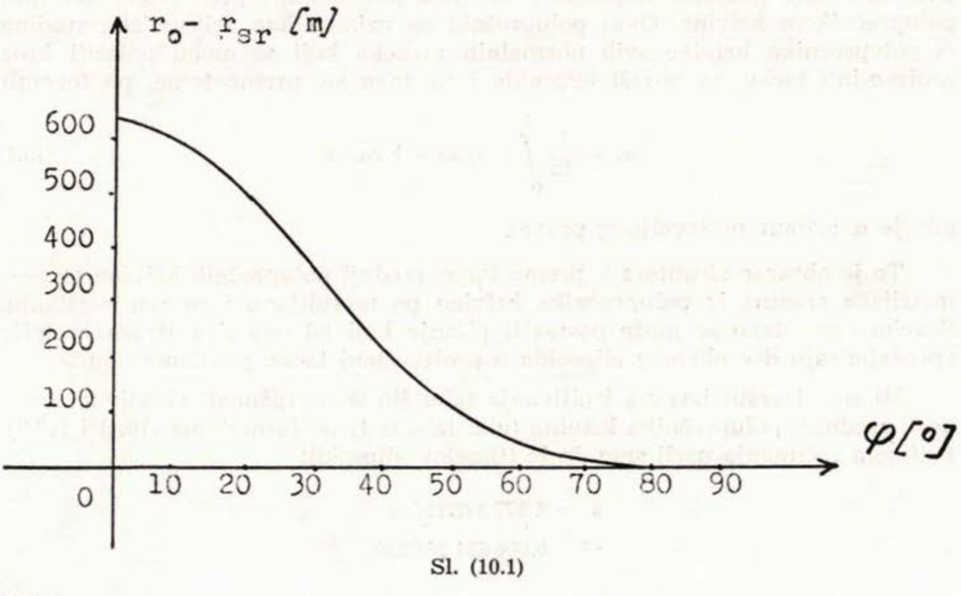
Na osnovu tablice 1 napravljen je dijagram odstupanja (sl. 10.1) $V_o - V_{sr}$. Za područje naše države razlika $V_o - V_{sr}$ nalazi se negde u granicama

$$140 \cdot 90_m < r_o - r_{sr} < 210 \cdot 3\ _m$$

Ostaje da se razjasni pitanje da li ova razlika ima praktičnih posledica pri geodetskim računanjima i koja je srednja vrednost polupečnika krivine teoretski ispravnija. U tom pravcu smo nastavili istraživanja a rezultate ćemo saopštiti u jednom od narednih radova.

11. OSNOVNA SVOJSTVA GEODETSKE LINIJE NA OBRTNOM ELIPSOIDU. JEDNAČINA GEODETSKE LINIJE

Zadatak se može rešiti i analitički, tj. rešavajući jednačine geodezijskih krivih vidi [4, str. 121].



Sl. (10.1)

Jednačine geodezijskih krivih glase:

$$2\frac{d}{ds}(g_{l1}\cdot \dot{u}^{l}) = \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^{l}}\cdot \dot{u}^{l}\cdot \dot{u}^{k}\,(l = 1{,}2) \tag{11.1}$$

gde tačka znači izvod po s. Za obrtni elipsoid bi imali

$$u^1 = \varphi \quad ; \quad u^2 = \lambda$$

$$\dot{u}^{l} = \frac{du^{l}}{ds};\quad \dot{u}^{1} = \frac{d\varphi}{ds};\quad \dot{u}^{2} = \frac{d\lambda}{ds} \tag{11.2}$$

Ako izraz (11.2) uvrstimo u (11.1) dobićemo

$$2\frac{d}{ds}\left(g_{\varphi\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{ds}\right) = \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi}\cdot\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2$$

i

$$2\frac{d}{ds}\left(g_{\lambda\lambda}\cdot\frac{d\lambda}{ds}\right) = \frac{\partial g_{\lambda\lambda}}{\partial \lambda}\cdot\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2$$

Obzirom da $g_{\lambda\lambda}$ ne zavisi od λ to iz druge jednačine dobijemo

$$2\frac{d}{ds}\left(g_{\lambda\lambda}\cdot\frac{d\lambda}{ds}\right) = 0$$

odnosno

$$g_{\lambda\lambda}\cdot\frac{d\lambda}{ds} = k = \text{konstanta} \tag{11.3}$$

Imali smo da linijski element, odnosno njegov kvadrat, na obrtnom elipsoidu iznosi

$$ds^2 = M^2\,(d\varphi)^2 + N^2\cos^2\varphi\,(d\lambda)^2 \tag{11.4}$$

i zamenom u izraz (11.3), koga smo prethodno kvadrirali, dobijamo

$$N^4\cos^4\varphi\,(d\lambda)^2 = k^2 M^2\,(d\varphi)^2 + k^2 N^2\cos^2\varphi\,(d\lambda)^2$$

odnosno

$$(d\lambda)^2\,(N^4\cos^4\varphi - k^2 N^2\cos^2\varphi) = k^2 M^2\,(d\varphi)^2$$

$$d\lambda\, N\cos\varphi\sqrt{N^2\cos^2\varphi - k^2} = k\,M\,d\varphi$$

obzirom da je

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{M}{N\cos\varphi\cdot\operatorname{ctg}\alpha}\quad \text{tada je}$$

$$N^2\cos^2\varphi - k^2 = k^2\,\operatorname{stg}^2\alpha$$

Kako je $R = N\cos\varphi$ tada konačno dobijemo

$$R^2 - k^2 = k^2\operatorname{ctg}^2\alpha$$

ili

$$\frac{R}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = R\sin\alpha = k$$

a što je već poznata Kleroova jednačina geodetske linije, pri čemu je R poluprečnik paralele.

Literatura

1. Aleksandar Živković — Viša geodezija, Beograd, 1972.
2. Milica Ilić-Dajović — Elementi tenzorskog računa, Beograd, 1966.
3. Milica Ilić-Dajović — Teorija površi sa osnovama tenzorskog računa, predavanja održana na postdiplomskom studiju Građ. fakulteta, Beograd, 1973.
4. Jože Ulčar — Projektivna i diferencijalna geometrija, Zbirka problema, Beograd, 1969.
5. D. F. Jegorov — Raboti po diferencijalnoj geometriji, Moskva, 1970.
6. Nikola Svečnikov — Viša geodezija I deo, Beograd, 1953.