TRANSFORMACIJA KOORDINATA OSLANJAJUĆI SE NA KOORDINATE DVE TAČKE

*Marko KAČANSKI — Novi Sad**

Pod gornjim naslovom objavio sam u br. 10—12 Geod. Lista 1971. godine transformaciju koordinata iz jednog koordinatnog sistema u drugi pomoću koordinatnih razlika uzastopnih tačaka.

Niže donosimo još jedan način transformacije uzimajući u račun pune koordinate datih tačaka.

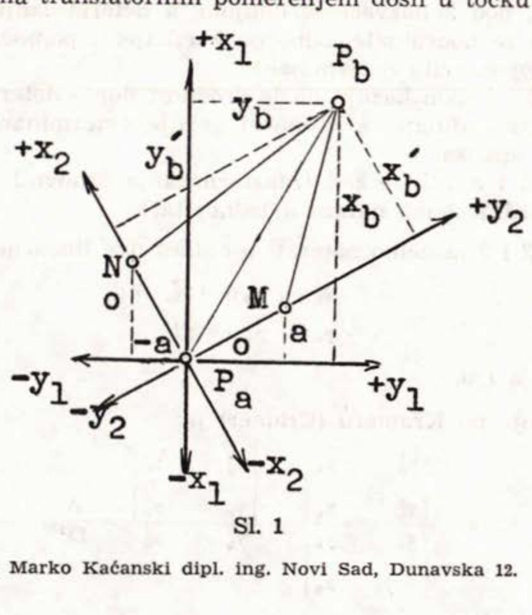
Date dve tačke na čije se koordinate u računanju oslanjamo označene su sa P_a i P_b. Njihove koordinate za I. i II. koordinatni sistem su Y_a, X_a i Y_a', X_a' za tačku P_a, i Y_b, X_b i Y_b', X_b' za tačku P_b.

Koordinatne razlike y_b, x_b i y_b', x_b' tačaka P_a i P_b su:

$$\begin{aligned} y_b &= Y_b - Y_a,\ x_b = X_b - X_a \text{ za prvi,} \\ y_b' &= Y_b' - Y_a',\ x_b' = X_b' - X_a' \end{aligned} \tag{1}$$

za drugi koord. sistem.

Koordinatne razlike y_b, x_b iz obr. 1 su redukovane koordinate tačke P_b, a $y_b' x_b'$ su njene transformisane redukovane koordinate, kada su centri oba koordinatna sistema translatornim pomerenjem došli u točku P_a (Sl. 1).



Sl. 1

* Adresa autora: Marko Kačanski dipl. ing. Novi Sad, Dunavska 12.

Translatorno pomerene glavne ose I. koord. sistema su y_1, x_1, a II. koord. sistema y_2, x_2.

Koeficijente za transformaciju koordinata tačaka iz I. u II. koord. sistem određujemo iz redukovanih koordinata tačke P_b.

Na pozitivnim osama $+y_2, +x_2$ II. koord. sistema postavićemo tačke M, odnosno N, na odstojanju jedne dužinske jedinice od tačke P_a.

Na sl. 1 se vidi da su koordinate tačke M: o, a, a tačke N:-a, o.

Dvostruku površinu trougla ΔP_aP_bN daje determinanta čiji su elementi koordinate tačke P_b i tačke N. Istu površinu daje i produkt osnovice 1,00 i y_b' visine toga trougla.

Izjednačenjem ovih površina imamo:

$$\begin{vmatrix} y_b & x_b \\ -a & 0 \end{vmatrix} = 1{,}00\, y_b'.$$

Dvostruku površinu trougla ΔP_aMP_b daje determinanta čiji su elementi koordinate pomoćne tačke M i tačke P_b, kao i produkt iz osnovice 1,00 i visine trougla x_b'. Izjednačenjem ovih površina dobijamo:

$$\begin{vmatrix} 0 & a \\ y_b & x_b \end{vmatrix} = 1{,}00\, x_b'.$$

Delenjem gornjih determinanta sa 1,00 a i o koordinate postaju prosti brojevi t. j. koeficijenti, pa možemo pisati:

$$\begin{vmatrix} y_b & x_b \\ -a & 0 \end{vmatrix} = y_b', \tag{2}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a \\ y_b & x_b \end{vmatrix} = x_b' \tag{3}$$

Determinantu pod 2 nazvaćemo donjom, a determinantu pod 3 gornjom, prema tome da li se koordinate, odnosno koeficijenti pomoćnih tačaka nalaze u donjem, ili gornjem redu determinante.

Obrasci pod 2 i 3 nam kazuju da je vrednost donje determinante transformisana redukovana ordinata, a vrednost gornje determinante je transformisana redukovana apscisa.

Obrasci pod 2 i 3 važe i kod transformisanja osnovnih koordinata, kada se centri oba koord. sistema nalaze u jednoj tački.

Obrasce pod 2 i 3 možemo napisati u obliku dve linearne jednačine:

$$x_b a + y_b o = y_b', \tag{4}$$

$$- y_b a + x_b o = x_b', \tag{5}$$

gde je nepoznato a i o.

Njihovo rešenje po Krameru (Cramer) je:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} y_b' & y_b \\ x_b' & x_b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_b & y_b \\ -y_b & x_b \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x_b' & x_b' \\ y_b & x_b \end{vmatrix}}{y_b^2 + x_b^2} = \frac{A}{D^2}, \tag{6}$$

$$o = \frac{\begin{vmatrix} x_b & y_b' \\ -y_b & x_b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_b & y_b \\ -y_b & x_b \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} y_b & x_b \\ -x_b' & y_b' \end{vmatrix}}{y_b^2 + x_b^2} = \frac{O}{D^2}. \tag{7}$$

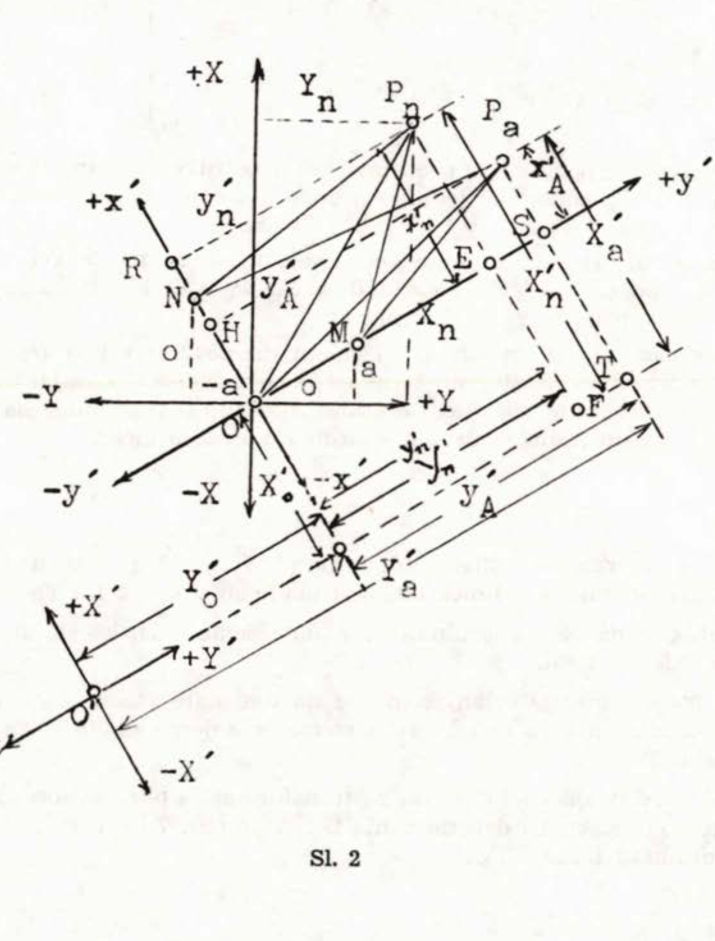
Kontrola za a i o je obr. 3.

Radi transformisanja osnovnih koordinata Y_n, X_n proizvoljne tačke P_n iz I. u II. koord. sistem translatorno ćemo pomeriti ose Y', X' II. koord. sistema, tako da njegov centar O' dođe u centar O I. koord. sistema (Sl. 2). Koordinate pomoćnih tačaka M i N, koje se nalaze na $+y'$ i $+x'$ osi imaju brojnu vrednost kojeficijenata iz obr. 6 i 7.

Dvostruke površine trougla $\Delta\, OP_aN$ i $\Delta\, OMP_a$ predstavljaju y_A' i x_A' koordinate tačke P_a u koord. sistemu $(y'\, O\, x')$ po obr. 2 i 3:

$$y_A' = \begin{vmatrix} Y_a & X_a \\ -a & o \end{vmatrix}, \quad x_A' = \begin{vmatrix} o & a \\ Y_a & X_a \end{vmatrix} \tag{8}$$

Na sl. 2 y_A' i x_A' su visine gornjih trouglova.



Sl. 2

Koordinate $Y_o' X_o'$ centra O u II. koord. sistemu dobijamo kao razliku koordinata $Y_a' X_a'$ tačke P_a i koordinata $y_A' x_A'$ iste tačke u koord. sistemu $(y' O x')$ iz obr. pod 8:

$$Y_o' = \overline{O'T} - \overline{P_aH} = \overline{O'T - VT} = Y_a' - y_A' = Y_a' - \begin{vmatrix} Y_a & X_a \\ -a & o \end{vmatrix} = Y_a' - Y_a o - X_a a \qquad (9)$$

$$X_o' = \overline{P_aT} - \overline{P_aS} = X_a' - x_A' = X_a' - \begin{vmatrix} o & a \\ Y_a & X_a \end{vmatrix} = X_a' - X_a o + Y_a a \qquad (10)$$

Koordinate $Y_o' X_o'$ dobićemo i kad u obr. pod 9—10 umesto koordinata tačke P_a stavimo koordinate tačke P_b što služi za kontrolu.

Dvostruke površine trougla $\Delta\, OP_nN$ i $\Delta\, OMP_n$ predstavljaju y_n' i x_n' koordinate tačke P_n u koord. sistemu $(y' O x')$. Koordinate tačke P_n u I. koord. sistemu su Y_n i X_n (Sl. 2).

Koordinate Y_n' i X_n' tačke P_n u II. koord. sistemu dobijamo kao zbir koordinata $Y_o' X_o'$ iz obr. 9—10 i koordinata $y_n' x_n'$ tačke P_n u koord. sistemu $(y' O x')$:

$$Y_n' = \overline{O'V} + \overline{P_nR} = \overline{O'V} + \overline{VF} = Y_o' + y_n' = Y_o' + \begin{vmatrix} Y_n & X_n \\ -a & o \end{vmatrix} = Y_o' + Y_n o + X_n a \qquad (11)$$

$$X_n' = \overline{EF} + \overline{P_nE} = \overline{OV} + \overline{P_nE} = X_o' + x_n' = X_o' + \begin{vmatrix} o & a \\ Y_n & X_n \end{vmatrix} = X_o' + X_n o - Y_n a \qquad (12)$$

Determinante pod 11 i 12 predstavljaju dvostruke površine trougla $\Delta\, OP_nN$ i trougla $\Delta\, OMP_n$ podeljene jedinicom dužine, što je ravno visinama odnosnih trouglova tj. koordinatama $y_n' x_n'$ (Sl. 2).

Kada u obr. 11 i 12 stavimo koordinate tačke P_b mesto koordinata tačke P_n dobićemo poznate Y_b', X_b' koordinate tačke P_b u II. koord. sistemu, što služi za kontrolu koordinata Y_o', X_o' centra O.

Koeficijenti a i o iz obr. 6 i 7 mogu da posluže i kod transformisanja koordinatnih razlika uzastopnih tačaka I. koord. sistema. Zbrajanjem transformisanih koordinatnih razlika sa transformisanim koordinatama prethodne tačke dolazimo do transformisanih koordinata sledeće tačke.

Zadatak.

Date su koordinate poligonskih tačaka ∘45, ∘78 i ∘60 u I. koord. sistemu, čija je dužinska jedinica metar, i unete su u kol. 2 i 3 Tabele.

Zadatak je da date koordinate transformišemo u II. koord. sistem, čija je dužinska jedinica hvat.

Kod transformacije oslanjaćemo se na dve date tačke, 7/P_a/ i 6/P_b/, čije su koordinate poznate u oba koord. sistema, a koje su unete u 2 i 3, odnosno u 4 i 5 kol. Tabele.

Radi određivanja koeficijenata za transformaciju obrazovane su koordinatne razlike po obrascu 1 i determinante O i A po obr. 7 i 6 i unete u 2. i 3. red ispod koordinata tačke 7/P_b/.

Tabela

Tačka	I. Koord. sistem		II. Koord. sistem		Faktori
	Y_n	X_n	Y'_n	X'_n	
1	2	3	4	5	6
M	o − 0,527 145	a + 0,012 919	—	—	O = − 6 076 542,2
Δ 7 /P_a/	+ 390 358,50	+ 101 094,67	− 21 641,47	+ 84 429,38	A = + 148 916,7
°45	− 195,26 + 390 163,24	− 522,77 + 100 571,90	− 21 545,29	+ 84 707,48	D^2 = + 11 527 268,5
°78	+ 205,76 + 390 369,00	+ 85,01 + 100 656,91	− 21 652,66	+ 84 606,01	Y'_o = + 182 828,019
°60	+ 342,96 + 390 711,96	+ 123,89 + 100 780,80	− 21 831,85	+ 84 590,27	X'_o = + 142 763,971
Δ 6 /P_b/	− 2 000,08 + 388 711,88	− 2 655,29 + 98 125,51	− 20 811,82	+ 86 015,83	
N	− a − 0,012 919	o − 0,527 145	—	—	
	y_b − 1 646,62	x_b − 2 969,16	y'_b + 829,65	x'_b + 1 586,45	
O =	$-x'_b$ − 1 586,45	y'_b + 829,65	y_b − 1 646,52	x_b − 2 969,16	= A

Vrednost faktora

$D^2 = 1\,646{,}62^2 + 2\,969{,}16^2 = 11\,527\,268{,}5$ uneta je u 3. red kol. 6.

Delenjem vrednosti determinanta O i A sa faktorom D^2 dobijamo koeficijente za transformaciju o i a.

U našem slučaju:

$$o = -\,6\,076\,542{,}2 : 11\,527\,268{,}5 = -\,0{,}527\,145,$$
$$a = 148\,916{,}7 : 11\,527\,268{,}5 = 0{,}012\,919,$$

koji su uneti iznad koordinata datih tačaka u 2. i 3. kolonu kao koordinate pomoćne tačke M. Koeficijenti -a, i o, kao koordinate pomoćne tačke N, uneti su u red ispod koordinata datih tačaka.

Koordinate Y_o', X_o' centra O u II. koord. sistemu dobijamo kada od datih koordinata Y_a, X_a tačke 7 /P_a/ odbijemo koordinate iste tačke u koord. sistemu (y' O x'). Prema tome ordinata Y_o' po obr. 9. je:

$$Y'_o = -\,21\,641{,}47 - \begin{vmatrix} 390\,358{,}50 & 101\,094{,}67 \\ -\,0{,}012\,919 & -\,0{,}527\,145 \end{vmatrix} = 182\,828{,}019$$

i uneta je u četvrti red kol. 6.

Apscisa X_o' centra O po obr. 10 je:

$$X_o' = 84\,429{,}38 - \begin{vmatrix} -0{,}527\,145 & 0{,}012\,919 \\ 390\,358{,}50 & 101\,094{,}67 \end{vmatrix} = 142\,763{,}971,$$

što je uneto u 5. red kol. 6.

Kontrolu koordinata Y_o', X_o' centra O vršićemo po obr. 9 i 10, pri čemu ćemo zameniti koordinate tačke 7 /P_a/ sa koordinatama tačke 6 /P_b/. Dakle:

$$Y_o' = -20\,811{,}82 - \begin{vmatrix} 388\,711{,}88 & 98\,125{,}51 \\ -0{,}012\,919 & 0{,}527\,145 \end{vmatrix} = 182\,828{,}020 \text{ hv.}$$

Razlika 0,001 u ordinati je bez uticaja na rezultat. Ona dolazi od zaokružavanja necelih brojeva.

$$X_o' = 86\,015{,}83 - \begin{vmatrix} -0{,}527\,145 & 0{,}012\,919 \\ 388\,711{,}88 & 98\,125{,}51 \end{vmatrix} = 142\,763{,}971 \text{ hv.}$$

Transformaciju koordinata datih tačaka u našem zadatku vršićemo po obr. 11 i 12, gde su koeficijenti a i o i koordinate Y_o' i X_o' stalne veličine kod transformisanja koordinata svake tačke. S obzirom na to obrasci pod 11 i 12 glasiće:

$$Y_n' = 182\,828{,}019 + \begin{vmatrix} Y_n & X_n \\ -0{,}012\,919 & -0{,}527\,145 \end{vmatrix},$$

$$Y_n' = 182\,828{,}019 - 0{,}527\,145\ Y_n + 0{,}012\,919\ X_n.$$

$$X_n' = 142\,763{,}971 + \begin{vmatrix} -0{,}527\,145 & 0{,}012\,919 \\ Y_n & X_n \end{vmatrix},$$

$$X_n' = 142\,763{,}971 - 0{,}527\,145\ X_n - 0{,}012\,919\ Y_n.$$

Uzmimo da transformišemo koordinate tačke 45. Njenu transformisanu ordinatu Y_{45}' daje zbir ordinate Y_o' centra O i vrednost donje determinante iste tačke naznačene u Tabeli:

$$Y_{45}' = 182\,828{,}019 + \begin{vmatrix} 390\,163{,}24 & 100\,571{,}90 \\ -0{,}012\,919 & -0{,}527\,145 \end{vmatrix}$$

, što u razvijenom obliku glasi:

$$Y_{45}' = 182\,828{,}019 - 0{,}527\,145 \times 390\,163{,}24 + 0{,}012\,919 \times 100\,571{,}90 = -21\,545{,}29 \text{ hv.}$$

Transformisanu apscisu X_{45}' tačke 45 daje zbir apscise X_o' centra O i vrednost gornje determinante iste tačke:

$$X_{45}' = 142\,763{,}971 + \begin{vmatrix} -0{,}527\,145 & 0{,}012\,919 \\ 390\,163{,}124 & 100\,571{,}90 \end{vmatrix}$$

, što je u razvijenom obliku:

$$X_{45}' = 142\,763{,}971 - 0{,}527\,145 \times 100\,571{,}90 - 0{,}012\,919 \times 390\,163{,}24 = 84\,707{,}48 \text{ hv.}$$

Gornje računske operacije vršimo kalkulatorom bez ikakvog ispisivanja, jedino što u Tabelu unosimo rezultat.

Poznavanjem koeficijenata za transformaciju možemo transformisati koordinate datih tačaka služeći se koordinatnim razlikama uzastopnih tačaka. U kol. 2. i 3. Tabele obrazovane su koordinatne razlike između koordinata sledeće i prethodne tačke. Po postupku datom u napred spomenutom Geod. Listu iz god. 1972 dolazimo do transformisanih koordinata služeći se istom Tabelom.

IZ UREDNIŠTVA

Radi lakšeg slaganja članaka i jednoobraznosti rukopisa molimo suradnike lista da se prilikom koncipiranja rukopisa pridržavaju slijedećih uputa.

Rukopisi da budu pisani strojem s proredom. Formule treba numerirati brojevima u okruglim zagradama ( ) i paziti da budu tipografski što jednostavnije. Crteže i grafikone treba izraditi crnim tušem na posebnom bijelom papiru. Uz svaki rukopis treba priložiti i kratki sadržaj u kojem se formule ne ponavljaju. Molimo da se uz rukopis po mogućnosti pošalje i prijevod naslova članka na jezike na kojima se u listu objavljuje sadržaj, a u koliko je moguće i sadržaj na stranom jeziku naročito za članke naučnog i stručnog karaktera. Literaturu treba citirati brojevima u uglatim zagradama [ ] i sabrati na kraju članka po abecednom redu autora. Citirati kao u primjerima:

[2] Čubranić, N.: Viša geodezija II, Tehnička knjiga, Zagreb, 1974.

[7] Kreiziger, I.: Geodetsko-kartografski radovi u Starom Egiptu, Geodetski list 29 (1975), 10—12, 95—98.