# GENERALISANJE PROBLEMA IZRAVNAVANJA U TRIANGULACIJI

*Jovan STEVANOVIĆ — Beograd**

U procesu izravnavanja geodetskih mreža svih redova, uključujući i problem naknadno opažanih mreža kao što su gradske mreže, razrađeni su odgovarajući postupci koji se u praksi najčešće koriste. Ovde će biti napravljen pokušaj da se obezbedi jedna opšta teorijska polazna osnova za praktikovane slučajeve izravnavanja, pri čemu će opšti principi biti izloženi kroz izravnavanje u triangulaciji.

U najopštijem slučaju, u triangulaciji mere se, kao podaci koje treba izravnavati, pravci, uglovi, dužine, geografske koordinate na osnovu kojih se određuju pravougle koordinate, geografski azimuti i azimuti opažani žiroteodolitom. Obično se za mreže prvog reda određuju geografske koordinate samo za pojedine tačke u mreži. Za niže redove, uključujući i naknadno opažane mreže, ranije određene koordinate tačaka viših redova se koriste kao podloga za određivanje koordinata tačaka dotične mreže. Pri svemu ovome u praksi mogu da uslede sledeći slučajevi:

1. Određene su koordinate samo dveju tačaka u mreži ili jedna koordinata i jedan azimut. U ovom slučaju, koristeći ostale merenjem dobivene podatke, mreža se izravnava kao slobodna mreža.

2. Merenjem su, pored ostalog, određene koordinate više a vrlo retko svih tačaka u mreži. U ovom slučaju, procesom izravnavanja treba izravnati, pored ostalih merenjem dobivenih podataka, i merenjem određene koordinate. Mreža prvog reda bi mogla biti svrstana u ovaj slučaj.

3. Ranijim izravnavanjem su dobivene koordinate niza tačaka viših redova na koje se oslanja mreža odnosnog reda. U ovom slučaju mogu da nastupe tri mogućnosti:

3a. Date tačke su određene s tačnošću koja je znatno iznad tačnosti merenja u novoj mreži. U ovom slučaju, pri izravnavanju, date tačke se smatraju da su bezpogrešne. Ovo bi bio slučaj najčešće praktikovanog postupka izravnavanja po principu »od većeg ka manjem«.

3b. Date tačke su određene sa tačnošću koja je na nivou tačnosti merenja u novoj mreži. Pri izravnavanju nove mreže ne bi bilo celishodno dozvoliti toliku deformaciju merenih podataka nove mreže da bi se oni saobrazili datim koordinatama, već je bolje izravnavanje obaviti tako da i date koordinate dobiju odgovarajuće popravke. U ovom slučaju koordinate datih tačaka poprimaju karakter merenih podataka kao kod slučaja 2. I ako su u ovom slučaju koordinate datih tačaka međuzavisne u korelaciji, iz praktičnih razloga

* Adresa autora: Dr Jovan Stevanović dipl. inž., Beograd, Geopremer

za diskusiju je da li tu korelativnost treba uzimati u obzir pri izravnavanju. U predstojećim razmatranjima ta korelativnost je zanemarena. U zavisnosti od odnosa tačnosti datih koordinata i tačnosti merenja u novoj mreži, pri izravnavanju, popravkama koordinata datih tačaka mogu biti određene odgovarajuće težine, kojima se može regulisati stepen uticaja datih koordinata na deformaciju podataka nove mreže.

3c. Date tačke su određene sa tačnošću koja je znatno slabija od tačnosti merenih podataka u novoj mreži. Zbog ovoga nije celishodno da date koordinate utiču na određivanje međusobnog odnosa tačaka nove mreže, ali date koordinate moraju biti iskorišćene za orijentaciju i smještaj nove mreže. Ovo je najčešći slučaj naknadno opažanih gradskih trigonometrijskih mreža, a može se i mreža prvog reda tretirati na sličan način. U ovom slučaju koordinate datih tačaka imaju karakter merenih podataka, ali zbog njihove izrazito slabe tačnosti, ne smeju biti uključene u izravnavanje na način kao kod slučaja 2, odnosno 3b.

Dubljim razmatranjem i sistematizacijom navedenih slučajeva, može se zaključiti da navedeni slučajevi 1, 3a i 3b, mogu da budu interpretirani kao specijalni slučajevi slučaja 2, pa prema tome, stvarni problemi koji treba da budu posebno razmatrani su slučajevi 2 i 3c.

Treba imati u vidu da na sličan način mogu da budu tretirane nivelmanske i ostale mreže.

*Korišćeni simboli.* U daljem izlaganju su korišćene sledeće oznake i simboli:

$p^i$ — izravnate vrednosti merenih veličina (uglova, pravaca, dužina, azimuta).
$p^j$ — merenjem određene vrednosti merenih veličina.
$v^i$ — popravke izravnavanja merenih veličina.
$i$ — indeks koji kao i indeksi $j, k, i', j', k'$, varira od 1 do n.
$n$ — ukupan broj merenih podataka (uglova, pravaca, dužina, azimuta).
$x^\rho$ — opažanjem određene vrednosti koordinata, odnosno ranije određene vrednosti koordinata datih tačaka.
$x^\rho_0$ — privremene koordinate.
$\bar{x}^\rho$ — izravnate vrednosti koordinata bilo datih bilo novih tačaka.
$X^\rho$ — priraštaji privremenih koordinata bilo datih bilo novih tačaka koje se određuju izravnavanjem.
$\rho$ — indeks koji kao i indeksi $\sigma, \tau, \rho', \sigma', \tau'$, variraju od 1 do 2 N.
$v^{\bar{\sigma}}$ — popravke merenjem određenih koordinata koje se određuju izravnavanjem.
$\delta_{ij}$ — odnosno $\delta^j_i$ Kronekerovi simboli.
$N$ — broj svih tačaka bilo datih bilo novih u mreži.

Pošto u mreži postoje tačke sa radnije određenim koordinatama, to su njihove koordinate obeležene indeksima $\bar{\rho}, \bar{\sigma}', \bar{\tau}', \bar{\rho}', \bar{\sigma}', \bar{\tau}'$, a koordinate novoodređenih tačaka indeksima $\bar{\bar{\rho}}, \bar{\bar{\sigma}}, \bar{\bar{\tau}}, \bar{\bar{\rho}}', \bar{\bar{\sigma}}', \bar{\bar{\tau}}'$.

$\bar{\rho}, \bar{\tau}$, itd. variraju od 1 do 2 $N_1$
$\bar{\bar{\rho}}, \bar{\bar{\tau}}$, itd. variraju od 1 do 2 $N_2$

$N_1$ — broj tačaka sa ranije određenim koordinatama

$N_2$ — broj tačaka čije koordinate treba odrediti

Ovde je:

$$N = N_1 + N_2 \qquad 1$$

*Jednačine grešaka.* Svaki meren podatak (ugao, pravac, dužina, azimut), kao što je poznato, nakon linearizovanja odgovarajućih funkcija preko privremenih koordinata, bilo za tačke za koje su ranije određene koordinate, bilo za nove tačke, daje po jednu jednačinu grešaka oblika

$$v^{i} = a^{i}_{\bar{\rho}} X^{\bar{\rho}} + a^{i}_{\bar{\bar{\rho}}} X^{\bar{\bar{\rho}}} - 1^{i} \qquad 2$$

U skladu sa Ajnštajnovom konvencijom, u ovom izrazu a i u buduće, isti gornji i donji indeks u izrazu podrazumeva znak sumiranja po tom indeksu.

Za merenjem određene koordinate jednačine grešaka bi bile:

$$v^{\bar{\rho}} = x_0^{\bar{\rho}} + X^{\bar{\rho}} - x^{\bar{\rho}} = X^{\bar{\rho}} - 1^{\bar{\rho}} \qquad 3$$

Zbog razmatranja koja će uslediti kasnije, biće korisno da se uoči oblik jednačina grešaka za slučaj ako se pri njihovom formiranju ne koriste privremene već direktno merenjem određene koordinate. U tom slučaju se, za tačke sa određenim koordinatama, izravnavanjem dobijaju direktno popravke koordinata. Ako za ovaj slučaj obeležimo nepoznate sa $X'^{\bar{\rho}}$, a slobodne članove sa $1'^{i}$, biće:

$$v^{i} = a^{i}_{\bar{\rho}} X'^{\bar{\rho}} + a^{i}_{\bar{\bar{\rho}}} X'^{\bar{\bar{\rho}}} - 1'^{i} \qquad 4$$

$$v^{\bar{\rho}} = X'^{\bar{\rho}} \qquad 5$$

## USLOV MINIMUMA ZA DVA NAVEDENA KARAKTERISTIČNA SLUČAJA

Već je navedeno da se teorijskom obradom slučaja 2 obezbeđuje osnova za obradu slučajeva 1, 3.a, i 3.b, a da se slučaj 3.c mora posebno obraditi. Pre prelaska na detaljniju teorijsku obradu ova dva slučaja, korisno je odmah na početku istaći suštinsku razliku između njih, pa i polazne teorijske osnove za svaki od ova dva slučaja.

I slučaj 2 i slučaj 3.c podrazumevaju da su u mreži obavljena odgovarajuća merenja (pravaca, uglova, dužina, azimuta), kao i da su, bilo direktnim merenjem kao u mreži I reda, bilo u okviru mreža viših redova, ranije određene koordinate za niz tačaka u mreži. Pri izravnavanju dotične mreže treba, pored uobičajenih podataka, u izravnavanje uključiti i ranije određene koordinate kao podatke koje treba izravnavati. Razlika između ova dva slučaja je u sledećem:

Kod slučaja 2 razlika u tačnosti merenih podataka u mreži i tačnosti merenjem određenih koordinata nije tako drastično, pa će se optimum dobiti ako se procesom izravnavanja obezbedi međusobni uticaj i merenih podataka na izravnate koordinate i merenjem određenih koordinata na izravnate podatke.

Kod slučaja 3.c tačnost merenih podataka je daleko veća od tačnosti merenjem određenih koordinata, zbog čega nije celishodno da merenjem određene koordinate utiču na izravnate podatke mreže. Definitivni međusobni odnos tačaka ne treba da zavisi od ranije određenih koordinata.

Prema svemu, u oba slučaja se u izravnavanje uključuju podaci iste prirode, ali, zbog razlike u tačnosti pojedinih kategorija podataka, neophodni su različiti pristupi problemu izravnavanja.

Kod slučaja 2, obzirom da nema bitne diferencijacije u tačnosti pojedinih kategorija merenih podataka, izravnavanje treba obaviti uz uobičajen uslov da suma kvadrata popravaka svih merenih veličina bude minimalna, odnosno da je:

$$E = g_{ij} v^i v^j + g_{\bar\rho\bar\sigma} v^{\bar\rho} v^{\bar\sigma} = \min. \qquad 6$$

U ovom izrazu su: $g_{ij}$ koeficijenti težina merenih podataka.

$g_{\rho\sigma}$ — koeficijenti težina ranije određenih koordinata.

Pošto u opštem slučaju mereni podaci u mreži nisu u korelaciji, biće:

$$g_{ij} = \delta_{ij} p.$$

gde su:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ za } i = j \\ 0 \text{ za } i \neq j \end{cases} \qquad 7$$

$p_i$ — težine merenih podataka.

Merene koordinate u mreži prvog reda nisu u korelaciji, a kod slučaja 2 su u korelaciji. Zbog, ovoga, ako ranije određene koordinate nisu u korelaciji, je:

$$g^{\bar\rho\bar\sigma} = \delta^{\bar\rho\bar\sigma} p_{\bar\rho} \qquad 8$$

$$\delta_{\bar\rho\bar\sigma} = \begin{cases} 1 \text{ za } \bar\rho = \bar\sigma \\ 0 \text{ za } \bar\rho \neq \bar\sigma \end{cases} \qquad 9$$

Ako su ranije određene koordinate u korelaciji, $g^{\bar\rho\bar\sigma}$ je kvadratna matrica. U gornjem izrazu su $p_{\bar\rho}$ težinske koordinata. Navedenom simbolikom obuhvaćeno je izravnavanje i za slučaj ako su koordinate u korelaciji.

Za slučaj 3.c, kao što je navedeno, nije celishodno da ranije određene koordinate, zbog male tačnosti, utiču na definitivni međusobni odnos tačaka, upravo na izravnate podatke mreže, zbog čega se ne može postaviti jedinstven uslov minimuma kao u slučaju 2. Ovdje se moraju postaviti odvojeno uslov minimuma za popravke merenih podataka mreže, a odvojeno za popravke koordinata. Da bi se obezbedio minimum kvadrata popravaka merenih veličina u mreži, neophodan je uslov:

$$E_1 = g_{ij} v^i v^j = \min. \qquad 10$$

Ovakav uslov minimuma bi odgovarao slobodnoj mreži u kojoj nije određena ni jedna koordinata. Pošto je u mreži stvarno određeno niz koordinata $x^{\bar\rho}$ (kod trigonometrijskih mreža $\bar\rho$ je najmanje 6), koje isto treba izravnati, postavlja se separatni uslov minimuma za sumu kvadrata popravaka koordinata:

$$E_2 = g_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} v^{\bar{\rho}} v^{\bar{\sigma}} = \min. \qquad 11$$

koji treba da bude zadovoljen uz uslov da budu zadovoljene i sve normalne jednačine koje su posledica uslova minimuma za $E_1$.

U literaturi nalazimo za navedene probleme rešenja u raznim vidovima. U ovom radu će biti nastojanja da se rešenja istih problema sistematizuju i obrade kroz posredno izravnavanje.

U (2) nalazimo predlog ocene tačnosti za slobodnu mrežu. Pošto taj predlog polazi od nekih postavki kojima bi se mogla osporiti realnost, mislim da bi sistematizacija raznih mogućnosti izravnavanja, na način kako će to biti izloženo u ovom radu, najeksplicitnije ukazala na nerealnost ocene tačnosti slobodne mreže postupkom koji je izložen u (2).

## IZRAVNAVANJE ZA SLUČAJ USAGLAŠENE TAČNOSTI PODATAKA MREŽE I MERENJEM ODREĐENIH KOORDINATA. SLUČAJ 2

Stvarna suština ovog slučaja je ranije izložena. Obzirom na jednačine 2 i 3, uslov minimuma 6 dobija oblik:

$$E = g_{ij} \left(a^i_{\rho} a^j_{\sigma} X^{\bar{\rho}} + a^i_{\bar{\rho}} X^{\bar{\bar{\rho}}} - 1^i\right) \left(a^j_{\bar{\sigma}} X^{\bar{\sigma}} - 1^j\right) + g_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} \left(X^{\bar{\rho}} - 1^{\bar{\rho}}\right) \left(X^{\bar{\sigma}} - 1^{\bar{\sigma}}\right) = \min. \qquad 12$$

Iz ovog uslova slede normalne jednačine:

$$\begin{aligned} g_{ij} a^i_{\bar{\rho}} a^j_{\bar{\sigma}} X^{\bar{\sigma}} + g_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} X^{\bar{\sigma}} + g_{ij} a^i_{\bar{\rho}} a^j_{\bar{\bar{\sigma}}} X^{\bar{\bar{\sigma}}} - g_{ij} a^i_{\bar{\rho}} 1^j - g_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} 1^{\bar{\sigma}} &= 0 \\ g_{ij} a^i_{\bar{\bar{\rho}}} a^j_{\bar{\sigma}} X^{\bar{\sigma}} + g_{ij} a^i_{\bar{\bar{\rho}}} a^j_{\bar{\bar{\sigma}}} X^{\bar{\bar{\sigma}}} - g_{ij} a^i_{\bar{\bar{\rho}}} 1^j &= 0 \end{aligned} \qquad 13$$

U ovom normalnim jednačinama su koeficijenti i slobodni članovi posledica, kako jednačina grešaka za merene podatke u mreži, tako i jednačina grešaka za koordinate. Biće korisno da se deo koeficijenata, koji je posledica samo jednačina grešaka merenih podataka u mreži, obeleži sa $b_{\rho\sigma}$, odnosno deo slobodnih članova sa $r_{\rho}$, pri čemu je:

$$b_{\rho\sigma} = g_{ij} a^i_{\rho} a^j_{\sigma} \qquad 14$$

$$r_{\rho} = g_{ij} a^i_{\rho} 1^j \qquad 15$$

Koeficijenti $b_{\rho\sigma}$ čine matricu koju ćemo obeležiti sa B:

$$B = [\, b_{\rho\sigma} ] \qquad 16$$

Ova matrica B može biti polazna osnova za slučajeve koji će biti razmatrani.

Ako se matrica B rastavi na blok matrice:

$$B = \left|\begin{array}{c|c} [b_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}] & [b_{\bar{\rho}\bar{\bar{\sigma}}}] \\ \hline [b_{\bar{\bar{\rho}}\bar{\sigma}}] & [b_{\bar{\bar{\rho}}\bar{\bar{\sigma}}}] \end{array}\right| \qquad 17$$

pa se prva blok matrica sabere s matricom $g_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}$, koja je za slučaj da koordinate nisu u korelaciji dijagonalna matrica, dobiće se matrica $B_1$:

$$B_1 = \left[\begin{array}{c|c} [b_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} + g_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}] & [b_{\bar{\rho}\bar{\bar{\sigma}}}] \\ \hline [b_{\bar{\bar{\rho}}\bar{\sigma}} \quad ] & [b_{\bar{\bar{\rho}}\bar{\bar{\sigma}}}] \end{array}\right] \qquad 18$$

koja u celini odgovara navedenim normalnim jednačinama 13. Koeficijenti matrice $B_1$ biće $b_{1\rho\sigma}$. Ovi koeficijenti će se samo kod prve blok matrice razlikovati od koeficijenata $b_{\rho\sigma}$.

Ako se, na osnovu izraza r definišu novi slobodni članovi $r_{1\rho}$:

$$r_{1\rho} = r_\rho + g_{\rho\bar{\sigma}} 1^\sigma \tag{19}$$

normalne jednačine 13 dobijaju oblik:

$$b_{1\rho\sigma} X^\sigma - r_{1\rho} = 0 \tag{20}$$

Posredstvom inverzne matrice $Q_1$:

$$Q_1 = B_1^{-1}$$

čiji su elementi $q_1^{\sigma\tau}$ vezani s koeficijentima $b_{1\rho\sigma}$ jednačinama:

$$b_{1\rho\sigma} q_1^{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} = \delta_\rho^{\bar{\sigma}} \tag{21}$$

može se naći rešenje za nepoznate priraštaje:

$$X^\sigma = q_1^{\sigma\tau} r_{1\tau} \tag{22}$$

Matrica $Q_1$ je ujedno i matrica kofaktora nepoznatih priraštaja $X^\sigma$.

Pošto se izravnate koordinate dobijaju preko jednačina:

$$\bar{x}^\sigma = x_0^\sigma + X^\sigma \tag{23}$$

gdje su $x_0^\sigma$ konstanta, biće matrica $Q_1$ i matrica kofaktora definitivnih koordinata.

Ako su jednačine grešaka formirane na osnovu merenjem određenih vrednosti za koordinate za tačke čije su koordinate ranije određene, i na osnovu privremenih koordinata za novoodređene tačke, preko jednačina 4 i 5 i uslova minimuma 6, dobiće se normalne jednačine:

$$\begin{aligned} g_{ij} a^i_{\bar{\rho}} a^j_{\bar{\sigma}} X'^{\bar{\sigma}} + g_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} X'^{\bar{\sigma}} + g_{ij} a^i_{\bar{\rho}} a^j_{\bar{\bar{\sigma}}} X'^{\bar{\bar{\sigma}}} - g_{ij} a^i_{\bar{\rho}} 1'^j &= 0 \\ g_{ij} a^i_{\bar{\bar{\rho}}} a^j_{\bar{\sigma}} X'^{\bar{\sigma}} \qquad\qquad + g_{ij} a^i_{\bar{\bar{\rho}}} a^j_{\bar{\bar{\sigma}}} X'^{\bar{\bar{\sigma}}} - g_{ij} a^i_{\bar{\bar{\rho}}} 1'^j &= 0 \end{aligned} \tag{24}$$

Treba uočiti da se jednačine 24 formalno razlikuju od jednačine 13 samo zbog slobodnih članova. U slobodnim članovima jednačina 24 ne figurišu $1^{\bar{\sigma}}$. Međutim suštinska razlika je u tome što nepoznate $X'^\sigma$, u jednačinama 24, nemaju isti smisao kao nepoznate $X^\sigma$ u jednačinama 13. U jednačinama 13 i $X^\sigma$ i $X_{\bar{\sigma}}$ su priraštaji privremenih koordinata, a u jednačinama 24 su $X'^{\bar{\sigma}}$ popravke merenjem određenih koordinata, a $X'_{\bar{\sigma}}$ su priraštaji privremenih koordinata. Matrica sistema jednačina 24 je ista kao matrica koja odgovara jednačinama 13. Zbog ovoga su međusobno jednake i inverzne matrice za oba navedena sistema. Samo mora se podvući da, dok je kod jednačina 13 inverzna matrica bila ujedno i matrica kofaktora priraštaja $X^\sigma$, kod jednačina 24 inverzna matrica neće biti matrica kofaktora nepoznatih $X'^{\bar{\sigma}}$. Ona to neće biti jer se nepoznate dobijaju u funkciji slobodnih članova u kojima ne figuriraju i $1^{\bar{\sigma}}$.

Na osnovu jednačina 23, kofaktori definitivnih koordinata su jednaki kofaktorima priraštaja jer su privremene koordinate konstantne, ali, ako su izravnavanjem određene popravke, definitivne koordinate su zbir merenih vrenosti i popravaka, pa ne mogu kofaktori definitivnih koordinata da budu jednaki kofaktorima popravaka.

*Jedan podslučaj slučaja 2.* Navedeno je da je u (2) razmatran problem ocene tačnosti koordinata slobodne mreže, pa bi, radi kasnijeg komentara ovako interpretirane ocene tačnosti slobodne mreže, bile korisno obraditi detaljnije specijalnu mogućnost slučaja 2, ako su za sve tačke u mreži ranije određene koordinate. U tom slučaju ne egzistiraju koordinate sa indeksom $\bar{\rho}$.

Ako se i pored merenjem određenih vrednosti za koordinate usvoji, pri formiranju jednačina grešaka, privremene koordinate koje nisu jednake merenim koordinatama, tada bi se formiranje normalnih jednačina obavilo na napred naveden način, a same normalne jednačine bi imale oblik:

$$\left(g_{ij}\, a^{i}_{\bar{\rho}}\, a^{j}_{\bar{\sigma}} + g_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}\right) X^{\bar{\sigma}} - \left(g_{ij}\, a^{i}_{\bar{\rho}} 1^{j} + g_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}\, 1^{\bar{\sigma}}\right) = 0 \qquad 25$$

Rešenje ovih jednačina se može dobiti preko inverzne matrice:

$$\left[g_{ij}\, a^{i}_{\bar{\rho}}\, a^{j}_{\bar{\sigma}} + g_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}\right]^{-1} \qquad 26$$

Ova inverzna matrica bi za ovako tretiran slučaj bila i matrica kofaktora nepoznatih priraštaja $X^{\bar{\sigma}}$ i izravnatih koordinata $\bar{x}^{\bar{\sigma}}$.

Međutim, ako se pri formiranju jednačina grešaka, vrednosti dobivene merenjem koordinata, direktno iskoriste kao privremene koordinate, jednačine grešaka 4 i 5 bi imale oblik:

$$v^{i} = a^{i}_{\bar{\rho}} X'^{\bar{\rho}} - 1'^{i} \qquad 27$$

$$v^{\bar{\rho}} = X'^{\bar{\rho}} \qquad 28$$

Na osnovu svih jednačina i uslova minimuma 6, dobijaju se normalne jednačine oblika:

$$\left(g_{ij}\, a^{i}_{\bar{\rho}}\, a^{j}_{\bar{\sigma}} + g_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}\right) X'^{\bar{\sigma}} - g_{ij}\, a^{i}_{\bar{\rho}} 1'^{j} = 0 \qquad 29$$

I ovde će se posredstvom inverzne matrice

$$\left[g_{ij}\, a^{i}_{\bar{\rho}}\, a^{j}_{\bar{\sigma}} + g_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}\right]^{-1} \qquad 30$$

dobiti nepoznate $X'^{\bar{\sigma}}$. Ponavljamo da će nepoznate $X'^{\bar{\sigma}}$ biti direktne popravke merenih koordinata, ali ova inverzna matrica neće biti i matrica kofaktora nepoznatih $X'^{\bar{\sigma}}$. Detaljna obrada ocene tačnosti popravka $X'^{\bar{\sigma}}$ nije tako jednostavna, ali ako uočimo da u jednačinama grešaka 27 praktično nema, u stvarnom smislu reči, nepoznatih parametara, već figurirju samo popravke veličina koje su merene, mogu se sve jednačine tretirati kao uslovne jednačine i problem izravnavanja rešiti postupkom uslovnog izravnavanja.

Za uslovno izravnavanje, ako se poslužimo simbolima kao u

$\overline{\bar{x}^{\bar{\rho}}\, \bar{x}^{\bar{\sigma}}}$ — kofaktori izravnatih koordinata

$\overline{x^{\bar{\rho}}\, x^{\bar{\sigma}}}$ — kofaktori mernih koordinata

$\overline{X'^{\bar{\rho}}\, X'^{\bar{\sigma}}}$ — kofaktori popravaka

kofaktori izravnatih veličina, merenih veličina i popravaka prema 5 stoje u odnosu:

$$\overline{\bar{x}^{\bar{\rho}}\, \bar{x}^{\bar{\sigma}}} = \overline{x^{\bar{\rho}}\, x^{\bar{\sigma}}} - \overline{X'^{\bar{\rho}}\, X'^{\bar{\sigma}}} \qquad 31$$

## IZRAVNAVANJE SLOBODNE MREŽE. SLUČAJ 1

Ako u mreži nema tačaka sa određenim koordinatama, na osnovu jednačina grešaka merenih podataka u mreži, koje mogu biti formirane i u odnosu na proizvoljan koordinatni sistem, preko uslova minimuma 6 u koji ne ulaze popravke koordinata, dobiće se normalne jednačine čiji koeficijenti će da čine matricu B. Za izravnavanje slobodne mreže nisu neophodne tačke sa poznatim koordinatama. Međutim, razmatran način bazira na posrednom izravnavanju, a rezultat posrednog izravnavanja su koordinate. Ako u mreži nisu određene koordinate ni jedne tačke, nemoguće je rešenje problema izravnavanja slobodne mreže posrednim izravnavanjem, zbog čega je matrica B singularna. Za rešenje problema neophodno je da budu poznate koordinate bar dveju tačaka u mreži, ako su u mreži obavljena samo uglovna merenja, odnosno jedna koordinata i jedan azimut ako su u mreži obavljena i dužinska merenja. Poznate koordinate ne dobijaju popravke pa bi, za rešenje problema izravnavanja slobodne mreže, bilo neophodno da priraštaji za 4 odnosno za 3 koordinate budu jednaki nuli. Polazeći od matrice B, za slobodnu mrežu bez ijedne određene koordinate, ovaj efekat će se postići, ako se u matrici B precrtaju 4 odnosno 3 proizvoljne kolone i njima odgovarajuće vrste, čime matrica B dobija oblik matrice koja će biti obeležena sa $B_2$.

Posredstvom matrice $Q_2$:

$$Q_2 = B_2^{-1} \qquad 32$$

dobiće se priraštaji za nepoznate koordinate u tom proizvoljnom koordinatnom sistemu. Matrica $Q_2$ biće matrica kofaktora priraštaja koordinata.

Ako se ne radi o proizvoljnom već o državnom koordinatnom sistemu, u kom su određene koordinate dveju tačaka odnosne mreže, tada se na osnovu privremenih koordinata i priraštaja koordinata mogu sračunati definitivne koordinate. Matrica $Q_2$ bi bila i matrica kofaktora definitivnih koordinata. U ovom slučaju, kofaktori definitivnih koordinata bi svakako zavisili i od toga za koje dve tačke su određene koordinate.

## IZRAVNAVANJE PO PRINCIPU »OD VEĆEG KA MANJEM«. SLUČAJ 3. 1.

Kako je ranije navedeno, ovaj slučaj bazira na predpostavci da su ranije određene koordinate određene sa daleko većom tačnošću no merenja u mreži. Zbog ovoga, koordinate svih ranije određenih tačaka ostaju nepromjenjene, tj. izravnavanjem neće da dobiju nikakve popravke, upravo, popravke ranije određenih koordinata sa indeksom $\bar{\sigma}$ biće jednake nuli. Ako se i ovdje, polazeći od svih tačaka u mreži, formiraju jednačine grešaka, može se na osnovu njih formirati matrica B. Pošto su svi priraštaji $X^{\sigma}$ jednaki nuli, to je neophodno u matrici B precrtati redove i kolone koje se odnose na koordinate sa indeksom $\bar{\sigma}$, a takvih koordinata za trigonometrijsku mrežu mora biti bar 6. Na ovaj način se dobija nova matrica $B_3$. I ovdje, posredstvom matrice $Q_3$:

$$Q_3^{\cdot} = B_3^{-1} \qquad 33$$

mogu se naći nepoznate popravke $X^{\bar{\sigma}}$. I za ovaj slučaj, matrica $Q_3$ je i matrica kofaktora nepoznatih $X^{\sigma}$ i matrica kofaktora definitivnih koordinata $\overline{x}^{\sigma}$.

IZRAVNAVANJE TRIGONOMETRIJSKE MREŽE U KOJOJ SU MERENJA U MREŽI OBAVLJENA SA IZRAZITO VEĆOM TAČNOŠĆU U ODNOSU NA TAČNOST SA KOJOM SU ODREĐENE KOORDINATE.

Na osnovu jednačina grešaka 2 i izraza za $E_1$, koji je dat sa 10, biće:

$$E_1 = g_{ij}\left(a^i_{\bar\rho} X^{\bar\rho} + a^i_{\bar{\bar\rho}} X^{\bar{\bar\rho}} - 1^i\right)\left(a^j_{\bar\sigma} X^{\bar\sigma} + a^j_{\bar{\bar\sigma}} X^{\bar{\bar\sigma}} - 1^j\right) = \min. \qquad 34$$

Iz ovog uslova slede normalne jednačine:

$$\begin{aligned} b_{\bar\rho\bar\sigma} X^{\bar\sigma} + b_{\bar\rho\bar{\bar\sigma}} X^{\bar{\bar\sigma}} - r_{\bar\rho} &= 0 \\ b_{\bar{\bar\rho}\bar\sigma} X^{\bar\sigma} + b_{\bar{\bar\rho}\bar{\bar\sigma}} X^{\bar{\bar\sigma}} - r_{\bar{\bar\rho}} &= 0 \end{aligned} \qquad 35$$

Koeficijenti ovih normalnih jednačina čine kompletnu matricu B. Matrica B, kao što je navedeno je singularna.

Uslov $E_1$ bazira na predpostavci da nisu poznate koordinate ni jedne tačke u mreži. Međutim, za razmatran slučaj 3.c, postoje $N_1$ tačaka sa ranije određenim koordinatama, čije definitivne vrednosti treba kroz izravnavanje odrediti, a koristeći ranije navedeni separatni uslov za $E_2$.

Ako se ide preko privremenih koordinata i za tačke sa ranije merenjem određenim koordinatama, na osnovu jednačine 3, izraz 11 dobija oblik:

$$E_2 = g_{\bar\rho\bar\sigma}\left(X^{\bar\rho} - 1^{\bar\rho}\right)\left(X^{\bar\sigma} - 1^{\bar\sigma}\right) \qquad 36$$

Određivanje popravaka za $X^{\bar\rho}$, preko minimuma za $E_2$, ali uz uslov da budu zadovoljene normalne jednačine 35, može da se obavi, kako je navedeno u (2), poznatim postupkom za uslovno izravnavanje.

Uvođenjem Lagranžeovih multiplikatora-korelata $K^{\bar\tau}$, uslov minimuma za $E_2$ može biti napisan u obliku:

$$\begin{aligned} E_2 = g_{\bar\rho\bar\sigma}\left(X^{\bar\rho} - 1^{\bar\rho}\right)\left(X^{\bar\sigma} - 1^{\bar\sigma}\right) - 2K^{\bar\tau}\left(b_{\bar\tau\bar\sigma} X^{\bar\sigma} + b_{\bar\tau\bar{\bar\sigma}} X^{\bar{\bar\sigma}} - r_{\bar\tau}\right) - \\ - 2K^{\bar{\bar\tau}}\left(b_{\bar{\bar\tau}\bar\sigma} X^{\bar\sigma} + b_{\bar{\bar\tau}\bar{\bar\sigma}} X^{\bar{\bar\sigma}} - r_{\bar{\bar\tau}}\right) = \min. \end{aligned}$$

Ako se na uobičajen način nađu parcijalni izvodi za $E_2$ po svim promenljivim, vodeći računa da su promenljive i $X^{\bar\sigma}$ i $X^{\bar{\bar\sigma}}$ bez obzira što $X^{\bar{\bar\sigma}}$ ne figuriraju u sumi kvadrata popravaka, dobiće se jednačine:

$$g_{\bar\rho\bar\sigma}\left(X^{\bar\rho} - 1^{\bar\rho}\right) - K^{\bar\tau} b_{\bar\tau\bar\sigma} - K^{\bar{\bar\tau}} b_{\bar{\bar\tau}\bar\sigma} = 0 \qquad 37$$

$$K^{\bar\tau} b_{\bar\tau\bar{\bar\sigma}} + K^{\bar{\bar\tau}} b_{\bar{\bar\tau}\bar{\bar\sigma}} = 0 \qquad 38$$

Ako se na osnovu koeficijenata težina $g_{\bar\rho\bar\sigma}$, za najopštiji slučaj, ako su ranije određene koordinate u korelaciji, odrede kofaktori koordinata $g^{\bar\sigma\bar\tau}$ preko jednačina:

$$g_{\bar\rho\bar\sigma}\, g^{\bar\sigma\bar\tau} = \delta^{\bar\tau}_{\bar\rho} \qquad 39$$

mogu se jednačine 37 rešiti po $X^{\bar\rho}$:

$$X^{\bar\rho} = g^{\bar\rho\bar\sigma} b_{\bar\tau\bar\sigma} K^{\bar\tau} + g^{\bar\rho\bar\sigma} b_{\bar{\bar\tau}\bar\sigma} K^{\bar{\bar\tau}} + 1^{\bar\rho} \qquad 40$$

Izraz za $X^{\bar{\rho}}$ treba zameniti u jednačine 35 pa je prethodno potrebno usaglašavanje indeksa, pri čemu će ovaj izraz biti napisan u obliku:

$$X^{\bar{\sigma}} = g^{\rho\bar{\sigma}} b_{\bar{\tau}',\bar{\rho}} K^{\bar{\tau}'} + g^{\bar{\rho}\bar{\sigma}} b_{\bar{\bar{\tau}}',\bar{\rho}} K^{\bar{\bar{\tau}}} + l^{\bar{\sigma}} \qquad 41$$

Nakon zamene ovih priraštaja $X^{\bar{\sigma}}$ u normalne jednačine 35, i ako se tom sistemu dopišu jednačine 38, dobiće se novi sistem normalnih jednačina:

$$\begin{aligned}
g^{\bar{\rho}\bar{\sigma}} b_{\bar{\tau}',\bar{\rho}} b_{\bar{\tau}\bar{\sigma}} K^{\bar{\tau}'} + g^{\bar{\rho}\bar{\sigma}} b_{\bar{\tau}\bar{\sigma}} b_{\bar{\bar{\tau}}',\bar{\rho}} K^{\bar{\bar{\tau}}'} + b_{\bar{\tau}\bar{\sigma}} X^{\bar{\sigma}} + b_{\bar{\tau}\bar{\sigma}} l^{\bar{\sigma}} - r_{\bar{\tau}} &= 0 \\
g^{\bar{\rho}\bar{\sigma}} b_{\bar{\bar{\tau}}\bar{\sigma}} b_{\bar{\tau}',\bar{\rho}} K^{\bar{\tau}'} + g^{\bar{\rho}\bar{\sigma}} b_{\bar{\bar{\tau}}\bar{\sigma}} b_{\bar{\bar{\sigma}}',\bar{\rho}} K^{\bar{\bar{\tau}}'} + b_{\bar{\bar{\tau}}\bar{\sigma}} X^{\bar{\sigma}} + b_{\bar{\bar{\tau}}\bar{\sigma}} l^{\bar{\sigma}} - r_{\bar{\bar{\tau}}} &= 0 \qquad 42 \\
b_{\bar{\tau}',\bar{\bar{\sigma}}} K^{\bar{\tau}'} + \qquad b_{\bar{\bar{\tau}}\bar{\bar{\sigma}}} K^{\bar{\bar{\tau}}'} \qquad &= 0
\end{aligned}$$

Ovo je sistem normalnih jednačina s nepoznatim korelatama $K^{\bar{\tau}'}$ i $K^{\bar{\bar{\tau}}'}$ i nepoznatim priraštajima za nove tačke u mreži $X^{\bar{\bar{\sigma}}}$. Rešavanjem ovog sistema dobiće se nepoznate. Ako se korelate $K^{\bar{\tau}'}$ zamene u 41, dobiće se priraštaji za koordinate koje su ranije određene, čime bi problem izravnavanja bio rešen.

Ranije je navedeno da za svaki od ovde razmatranih slučajeva u literaturi postoje odgovarajući razrađeni postupci izravnavanja, a često za jedan isti problem nalazimo više načina za izravnavanje. Obzirom na ovo, u ovom radu je glavna pažnja posvećena osnovnim principima izravnavanja i ocene tačnosti, bez pokušaja da se obuhvate i detalji koji su vezani za pojedine slučajeve izravnavanja, a naročito tamo gde su neophodni dokazi koji su vezani za obimnija izvođenja. Problem koji je razmatran u ovom odeljku isto može da bude rešen na više načina, kako je navedeno u (3) odnosno (4). Zbog svega ovoga neće biti u skladu sa namenom ovog rada da se detaljnije izlaže postupak određivanja korelata i nepoznatih $X^{\bar{\sigma}}$ i $X^{\bar{\bar{\sigma}}}$, a posebno ne bi bilo celishodno ovde detaljno obrađivati ocenu tačnosti ovog slučaja, koja svakako nije jednostavna.

Treba skrenuti pažnju još jednom na činjenicu da je matrica B singularna, upravo da u okviru normalnih jednačina 35 ima 3 odnosno 4 jednačine koje su posledica ostalih jednačina. Zbog ovoga je i matrica sistema 42 singularna, pa je pre invertovanja neophodno iz nje isključiti 3 odnosno 4 kolone i njima odgovarajuće vrste, posle čega bi bilo moguće naći korelate i nepoznate priraštaje.

*Jedan podslučaj slučaja 3.c.* U sklopu razmatranog problema izravnavanja za slučaj 3.c, a i zbog sagledavanja realnosti ocene tačnosti slobodne mreže postupkom koji je izložen u (2), biće korisno obraditi posebnu mogućnost ako su u mreži za sve tačke merenjem određene koordinate. I ovde će biti korisno problem razmotriti u dve alternative:

a) Ako se jednačine grešaka formiraju preko privremenih koordinata, imaće oblik:

$$\begin{aligned}
v^{i} &= a^{i}_{\bar{\rho}} X^{\bar{\rho}} - l^{i} \qquad 43 \\
v^{\bar{\rho}} &= X^{\bar{\rho}} - i^{\bar{\rho}}
\end{aligned}$$

b) Ako se jednačine grešaka formiraju na osnovu merenjem određenih koordinata, imaće oblik:

$$v^i = a^i_{\bar{p}} X'^{\bar{p}} - 1'^i$$ 44

$$v^{\bar{p}} = X'^{\bar{p}}$$

Preko minimuma za $E_1$, dobile bi se normalne jednačine:

a) $b_{\bar{\tau}\bar{\sigma}} X^{\bar{\sigma}} - r_{\bar{\tau}} = 0$ 45

b) $b_{\bar{\tau}\bar{\sigma}} X'^{\bar{\sigma}} - r'_{\bar{\tau}} = 0$

a uslov minimuma za $E_2$ bi imao oblik:

a) $E_2 = g_{\rho\sigma} \left( X^{\bar{p}} - 1^{\bar{p}} \right) \left( X^{\bar{\sigma}} - 1^{\bar{\sigma}} \right) - 2 K^{\bar{\tau}} \left( b_{\bar{\tau}\bar{\sigma}} X^{\bar{\sigma}} - r_{\bar{\tau}} \right) = \text{min.}$ 46

b) $E_2 = g_{\rho\sigma} X'^{\bar{p}} X'^{\bar{\sigma}} \qquad - 2K'^{\bar{\tau}} \left( b_{\bar{\tau}\bar{\sigma}} X'^{\bar{\sigma}} - r'_{\bar{\tau}} \right) = \text{min.}$

Na uobičajen način odavde se dobija:

a) $g_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} \left( X^{\bar{p}} - 1^{\bar{p}} \right) - b_{\bar{\tau}\bar{\sigma}} K^{\bar{\tau}} = 0$ 47

b) $g_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} X'^{\bar{p}} \qquad - b_{\bar{\tau}\bar{\sigma}} K'^{\bar{\tau}} = 0$

Istim postupkom kako je ranije objašnjeno iz ovih jednačina dobijamo:

a) $X^{\bar{p}} = g^{\bar{\rho}\bar{\sigma}} b_{\bar{\tau}\bar{\sigma}} K^{\bar{\tau}} + 1^{\bar{p}}$

b) $X'^{\bar{p}} = g^{\bar{\rho}\bar{\sigma}} b_{\bar{\tau}\bar{\sigma}} X'^{\bar{\tau}}$

Zamenom ovih nepoznatih, nakon usaglašavanja indeksa, u odgovarajuće normalne jednačine 45, dobija se:

a) $g^{\bar{\rho}\bar{\sigma}} b_{\bar{\tau}\bar{\sigma}} b_{\bar{\tau}'\bar{\rho}} K^{\bar{\tau}'} + b_{\bar{\tau}\bar{\sigma}} 1^{\bar{\sigma}} - r_{\bar{\tau}} = 0$ 49

b) $g^{\bar{\rho}\bar{\sigma}} b_{\bar{\tau}\bar{\sigma}} b_{\bar{\tau}'\bar{\rho}} K'^{\bar{\tau}'} \qquad - r'_{\bar{\tau}} = 0$

Odavde se, posredstvom inverzne matrice:

$$Q_4 = [g^{\bar{\rho}\bar{\sigma}} b_{\bar{\tau}\bar{\sigma}} b_{\bar{\tau}'\bar{\rho}}]^{-1}$$ 50

koja je obeležena sa $Q_4$, a čiji su članovi $q_4^{\bar{\tau}'\bar{\sigma}'}$, mogu dobiti korelate:

a) $K^{\bar{\tau}'} = q_4^{\bar{\tau}'\bar{\sigma}'} \left( b_{\bar{\sigma}'\bar{\sigma}} 1^{\bar{\sigma}} + r_{\bar{\sigma}'} \right)$ 51

b) $K'^{\bar{\tau}'} = q_4^{\bar{\tau}'\sigma'} r_{\bar{\sigma}'}$

I na kraju, ako se korelate zamene u izraze 46, dobiće se:

a) $X^{\bar{p}} = g^{\bar{\rho}\bar{\sigma}} b_{\bar{\tau}\bar{\sigma}} q_4^{\bar{\tau}\bar{\sigma}'} \left( b_{\bar{\sigma}'\bar{\rho}'} 1^{\bar{\rho}'} + r_{\bar{\sigma}'} \right) + 1^{\bar{p}}$ 52

b) $X'^{\bar{p}} = g^{\bar{\rho}\bar{\sigma}} b_{\bar{\tau}\bar{\sigma}} q_4^{\bar{\tau}\bar{\sigma}'} r_{\bar{\sigma}'}$ 53

I ovde treba konstatovati da su $X^{\bar{p}}$ priraštaji privremenih koordinata, a $X'^{\bar{p}}$ su popravke merenjem određenih koordinata.

Na osnovu jednačina 52 mogu se dobiti kofaktori za X koji bi ujedno bili i kofaktori definitivnih koordinata.

Na osnovu jednačina 53 mogu se dobiti kofaktori za popravke $X'^{\bar{p}}$, samo ovi kofaktori neće biti ujedno i kofaktori definitivnih koordinata. Kofaktori definitivnih koordinata zavise kako od kofaktora popravaka $X'^{\bar{\rho}}$, tako i od kofaktora merenjem određenih koordinata.

Ako, pod predpostavkom da ranije određene koordinate nisu u korelaciji, i da su iste tačnosti, u kom slučaju je $g^{\bar{\rho}\bar{\sigma}}$ dijagonalna jedinična matrica, izrazimo jedinične 53 u matričnom obliku, dobićemo:

$$X' = B[BB]^{-1}R \qquad 54$$

Ovaj izraz je isti sa izrazom 10 u (2).

Ovde je pre svega neophodno ponovo ukazati, kako je i u (2) navedeno, da proizvod matrica BB jeste singularna matrica ako je B singularna matrica, zbog čega je neophodno, u procesu nalaženja inverzne matrice $[BB]^{-1}$ postupiti na poseban način, tj. isključivanjem potrebnog broja kolona i odgovarajućih vrsta, dobiće se regularna matrica, koju je moguće invertovati.

Polazeći od jednačine 53, ili što je isto od jednačine 54, po zakonu o rasprostiranju grešaka, dobiće se kofaktori za popravke $X'^{\bar{\rho}}$, u matričnom obliku:

$$\overline{X'^{\bar{\rho}}\,X'^{\bar{\sigma}}} = B(BB)^{-1}B(BB)^{-1}B \qquad 55$$

U (2) je navedeno da su izrazom 55 [odnosno izrazom 12 u (2)] definisani kofaktori nepoznatih, a uvek se kroz izlaganje u (2) polazi od predpostavke da su nepoznate priraštaji privremenih koordinata, pa su samim tim, na osnovu istog zaključivanja koje sledi uz ranije navedene jednačine 23, kofaktori priraštaj ujedno i kofaktori definitivnih koordinata.

Na osnovu izlaganja u ovom radu, koja dobrim delom baziraju na matematičkim izvođenjima koja su preuzeta iz (2), proizilazi da, pri postupku koji je primenjen u (2), nepoznate ne mogu biti priraštaji već popravke merenih koordinata, a samim tim postupak ocene tačnosti u (2) nije realan. Ocena tačnosti navedena u (2) ne može da se odnosi na koordinate slobodne mreže. Izrazom 55 su definisani kofaktori koji su direktno proporcionalni srednjim greškama sa kojima su određene popravke pojedinih koordinata, i to za slučaj ako imamo na raspolaganju *osim merenih podataka mreže još izmerene i sve koordinate u mreži.* Ovaj broj podataka na kojima bazira izravnavanje daje odgovarajuću tačnost za popravke koordinata, a tačnost definitivnih koordinata zavisi i od tačnosti sa kojom su određene koordinate i od tačnosti sa kojom su sračunate popravke koordinata.

## REZIME

Napredak tehnike uopšte, a naročito na planu razvoja geodetskih instrumenata i elektronskih računara, postavlja pred geodetsku struku nove probleme, koji se moraju uočavati, sistematski uopštavati, teoretski obrađivati, i na kraju potrebno je za svaki od njih dati konkretna praktična rešenja, koja bi bila u skladu sa opštim stanjem nauke i tehnike u tom trenutku. U ovom radu je napravljen pokušaj da se da sistematski prikaz raznih mogućnosti izravnavanja trigonometrijskih mreža i to kroz posredno izravnavanje. Klasični problemi su obuhvaćeni slučajevima 1, 2, 3.a i 3.b, a slučaj 3.c, i ako je i do sada bio prisutan, bi više odgovarao budućim potrebama geodetske prakse.

U skladu sa prisutnim shvatanjem da je korišćenje elektronskih računara jednostavnije kod posrednog izravnavanja, obrada svih slučajeva izravnavanja je data kroz posredno izravnavanje.

Ujedno je izneto mišljenje da ocena tačnosti slobodne mreže, koju je dao u BULLETIN GEODESIQE № 104 MITTERMAYER, nije realna, odnosno da se navedena ocena tačnosti može da odnosi na popravke koordinata koje su rezultat izravnavanja uz pretpostavku da su merenjem određene koordinate svih tačaka u mreži, a da se tačnost definitivnih koordinata mora odrediti na drugi način.

## ZUSAMMENFASSUNG

Die Entwicklung der Technik, besonders auf dem Gebiet der geodätischen Messinstrumenten und elektronischen Rechenautomaten stellt vor Geodäsie neue Probleme. Diese Probleme soll man erkennen, systematisch verallgemeinern, theoretisch ausarbeiten und für sie praktische Lösungen vorschlagen. In dieser Arbeit ist der Versuch unternommen worden, eine systematische Darstellung verschiedener Möglichkeiten der Ausgleichung von trigonometrischen Netzen durch Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen anzugeben. Die klassiche Probleme sind mit den Fällen 1, 2, 3.a und 3.b eingeschlossen. Der Fall 3.c, obwohl schon anwesend, sollte mehr den zukünftigen Erfordernissen entsprechen. In Übereinstimung mit der Meinung, dass die Anwendung der elektronischen Anlagen bei der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen einfacher ist, ist dieser Verfahren in allen Fällen angewandt. Zugleich wurde die Meinung geäussert, dass die Genauigkeitsabschätzung der freien Netzes, die MITTERMAYER in Bulletin Geodesique № 104 gegeben hat, nicht real ist. Die gegebene Genauigkeitsabschätzung kann sich nur auf die Koordinatenverbesserungen, die das Ergebnis der Ausgleichung sind, beziehen. Die Genauigkeit der definitiven Koordinaten muss man auf andere Weise bestimmen.

## LITERATURA

1. Tienstra J. M.: »An extension the technique of the methode of least squares to correlated observation« — Bulletin geodesique N° 6,1947.
2. Mittermayer E.: »A generalisation of the least-squares method for the adjustment of free networks« — Bulletin geodesique N° 104,1972.
3. Baturić J.: »Rudarska mjerenja« I dio — Zagreb 1957.
4. Stevanović J.: »Gradske i rudničke trigonometrijske mreže kao naknadno opažene mreže« — Geodetski list br. 4—6, 1966. Zagreb.
5. Stevanović J.: »Problem korelacije pri izravnanvanju trigonometrijski mreža po pravcima ako su mereni uglovi« — Zbornik radova Rudarsko-geološko-metalurškog fakulteta i Instituta u Boru, posebno izdanje, knjiga XII, Bor, 1971.