UNIVERZALNI MODEL IZRAVNANJA

*Krunislav MIHAILOVIĆ — Beograd**

ZUSAMMENFASSUNG — Im Artikel wird die theoretische Grundlage für eine Lösung des Problems von Ausgleichung geodätischer Netze auf Grund eines universalen Modells erarbeit. In diesen Modell sind alle Parameter berücksichtigst, die einen Einfluss auf die Ausgleichnung ausüben, d. h. die gemessenen und die vorgegebenen Grössen sowie die systematische Fehler.

U stručnoj literaturi od uvek je poklanjana velika pažnja izravnanju geodetskih mreža. Postoji znatan broj radova koji su posvećeni ovoj problematici. Oni se po trenutku nastanka mogu locirati u dva vremenska razdoblja.

Publikovani radovi do pre 20 godina koji izravnanje geodetskih mreža zasnivaju na klasičnom principu metode najmanjih kvadrata (Gausov uslov minimuma). Njih karakteriše težnja da se uprosti postupak izravnanja raznim približnim metodama ili podelom geodetskih mreža u grupe (višegrupna izravnanja).

U novije vreme, naročito od kada je matrični račun našao svoje mesto u geodeziji, pojavljuju se radovi koji pri izravnanju koriste uopšteni princip najmanjih kvadrata. Time je omogućeno da se o korelativnoj zavisnosti vodi računa prilikom izravnanja geodetskih mreža. Zavisnost se manifestuje kroz merene veličine ili kroz slobodne članove u kojima su prisutne merene i date veličine.

Izvestan broj radova posvećen je uticaju sistematskih grešaka na izravnanje geodetskih mreža.

Svi ti radovi doprineli su da se prevaziđu propusti klasičnih metoda izravnanja, a time u znatnoj meri objektivizira izravnanje i ocena tačnosti geodetskih mreža.

Date veličine koje su se u prošlosti smatrale apsolutno tačnim, pomoću uopštenog principa najmanjih kvadrata, mogu se uzeti u obzir kako pri izravnanju tako i prilikom ocene tačnosti geodetskih mreža.

I pored toga što postoji veliki broj radova sa značajnim naučnim doprinosom, problem izravnanja nije rešen sveobuhvatno i celovito. U ovom radu učinjen je pokušaj da se jednim univerzalnim modelom izravnanja obuhvate svi parametri (merene i date veličine, kao i sistematske greške) koji utiču na izravnanje geodetskih mreža. Pomoću tog opšteg modela mogu se na jednostavan način izvesti ostale metode izravnanja koje se koriste u geodeziji (posredno, uslovno ili mešovita izravnanja).

* Adresa autora: Prof. dr Krunislav Mihailović dipl. inž., Građevinski fakultet Beograd.

Neka merene l_i, date ξ_i i tražene veličine $\varkappa_i$ zajedno sa sistematskim greškama λ_i učestvuju u r matematičkih uslova

$$f_2 (l'_1, l'_2, \ldots l'_n, \xi_1, \xi_2 \ldots \xi_s, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_u, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_q) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots r \quad (1)$$

gde su:

— l'_i izravnate vrednosti merenih veličina

$$l'_i = l_i + v_i$$

— ξ'_i izravnate vrednosti datih veličina

$$\xi'_i = \xi_i + V_i$$

— $\varkappa'_i$ nepoznate veličine

$$\varkappa_i = \varkappa_{oi} + \Delta \varkappa_i$$

— λ'_i sistematske greške

$$\lambda_i = \lambda_{oi} + \Delta \lambda$$

Posle linearizacije, funkcije (1) mogu se ovako prikazati

$$A^* v + B^* V + C\varkappa + D\lambda + \omega = 0 \quad (2)$$

gde su

$$A^* = \left\| \frac{\partial f}{\partial l} \right\|_{r,\, n}, \qquad B^* = \left\| \frac{\partial f}{\partial \xi} \right\|_{r,\, s}$$

$$C = \left\| \frac{\partial f}{\partial \varkappa} \right\|_{r,\, u}, \qquad D = \left\| \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right\|_{r,\, q}.$$

Kada se jednačine (2) podele u dve grupe

$$\left.\begin{array}{l} A^*_1 v + B^*_1 V + C_1 \varkappa + D_1 \lambda + \omega_1 = 0 \,\}\, r_1 \\ A^*_2 v + B^*_2 V + C_2 \varkappa + D_2 \lambda + \omega_2 = 0 \,\}\, r_2 \end{array}\right\} r \quad (3)$$

normalne jednačine imaće sledeći oblik

$$\begin{array}{l} (A^*_1 K_l A_1 + B^*_1 K_\xi B_1) K_1 + (A^*_1 K_l A_2 + B^*_1 K_\xi B_2) K_2 + C_1 \varkappa + D_1 \lambda + \omega_1 = 0 \\ (A^*_2 K_l A_1 + B^*_2 K_\xi B_1) K_1 + (A^*_2 K_l A_2 + B^*_2 K_\xi B_2) K_2 + C_2 \varkappa + D_2 \lambda + \omega_2 = 0 \\ C_1^* K_1 + \qquad C^*_2 K_2 \qquad = 0 \\ D_1^* K_1 + \qquad D^*_2 K_2 \qquad = 0 \end{array} \quad (4)$$

gde su K_l i K_ξ kovarcijacione matrice kojim se definiše zavisnost između merenih odnosno datih veličina.

Iz (4) se neposredno mogu odrediti vektori popravaka K_1 i K_2, vektor nepoznatih veličina $\varkappa$ i vektor sistematskih grešaka λ, Nakon toga određuju se vektori popravaka za merene i date veličine

$$\left\| \begin{array}{c} v \\ V \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} K_l A_1 K_1 + K_l A_2 K_2 \\ K_\xi B_1 K_1 + K_\xi B_2 K_2 \end{array} \right\| \quad (5)$$

Na osnovu ovog univerzalnog modela izravnanja mogu se izvesti ostale metode koje se koriste u geodeziji.

1. Posredno izravnanje

Ako je

$$A^*_1 = -E,\ B^*_1 = 0,\ D_1 = 0$$
$$A^*_2 = 0,\ B^*_2 = 0,\ C_2 = 0,\ D_2 = 0 \text{ i } \omega_2 = 0$$

dobiće se jednačine popravaka

$$v = C_1 \varkappa + \omega_1 \tag{6}$$

pa će normalne jednačine (4) glasiti

$$\begin{aligned} K_l k_1 + C_1 \varkappa + \omega_1 &= 0 \\ C^*_1 k_1 \qquad\qquad &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Kada se vektor korelata uvrsti iz prve u drugu jednačinu dobiće se normalne jednačine

$$C^*_1 K^{-1}_l C_1 \varkappa + C^*_1 K^{-1}_l \omega_1 = 0$$

odavde

$$\varkappa = -(C^*_1 K^{-1}_l C_1)^{-1} C^*_1 K^{-1}_l \omega_1 \tag{8}$$

Ako se vodi računa o greškama datih veličina $B_1 \neq 0$, dobija se

$$\begin{aligned} (K_l + B^*_1 K_\xi B_1) K_1 + C_1 \varkappa + \omega_1 &= 0 \\ C^*_1 K_1 \qquad\qquad &= 0 \end{aligned}$$

odnosno

$$C^*_1 (K_l + B^*_1 K_\xi B_1)^{-1} C_1 \varkappa + C^*_1 (K_l + B^*_1 K_\xi B_1)^{-1} \omega_1 = 0$$

odavde

$$\varkappa = -[C^*_1 (K_1 + B^*_1 K_\xi B_1)^{-1} C_1] C^*_1 (K_1 + B^*_1 K_\xi B_1)^{-1} \omega_1 \tag{9}$$

Za $B_1 = 0$ dobija se (8).

2. Uslovno izravnanje

Ako je

$$B^*_1 = C_1 = D_1 = 0$$
$$A^*_2 = B^*_2 = C_2 = D_2 = \omega_2 = 0$$

dobiće se:

— uslovne jednačine

$$A^*_1 v + \omega_1 = 0 \tag{10}$$

— normalne jednačine

$$A^*_1 K_l A_1 k_1 + \omega_1 = 0 \tag{11}$$

— vektor popravaka

$$v = K_l A_1 k_1 \tag{12}$$

Za $B_1 \neq 0$, dobija se

$$(A^*_1 K_l A_1 + B^*_1 K_\xi B_1) k_1 + \omega_1 = 0 \tag{13}$$

$$v = K_l A_1 k_1 \tag{14}$$

$$V = K_\xi B_1 k_1 \tag{15}$$

3. *Uslovno izravnanje sa nepoznatim veličinama*

Ako je

$$B^*_1 = D_1 = 0$$
$$A^*_2 = B^*_2 = C_2 = D_2 = \omega_2 = 0$$

dobiće se:

— uslovne jednačine sa nepoznatim veličinama

$$A^*_1 v + C_1 \varkappa + \omega_1 = 0 \tag{16}$$

— normalne jednačine

$$\begin{aligned} A^*_1 K_l A_1 k_1 + C_1 \varkappa + \omega_1 &= 0 \\ C^*_1 k_1 &= 0 \end{aligned} \tag{17}$$

— vektor popravaka

$$v = K_l A_1 k_1. \tag{18}$$

Za $B_1 \neq 0$, dobija se

$$\begin{aligned} (A^*_1 K_l A_1 + B^*_1 K_\xi B_1) k_1 + C \varkappa + \omega_1 &= 0 \\ C^*_1 k_1 &= 0 \end{aligned} \tag{19}$$

$$v = K_l A_1 k_1 \tag{20}$$

$$V = K_\xi B_1 k_1. \tag{21}$$

4. *Posredno izravnanje sa uslovnim jednačinama*

Ako je

$$A^*_1 = -E,\ B^*_1 = D_1 = 0$$
$$A^*_2 = B^*_2 = D_2 = 0$$

dobija se

$$\begin{aligned} v &= C_1 \varkappa + \omega_1 \\ C_2 \varkappa + \omega_2 &= 0 \end{aligned} \tag{22}$$

pa će normalne jednačine (4) glasiti

$$\begin{aligned} K_l k_1 + 0 + C_1 \varkappa + \omega_1 &= 0 \\ C_2 \varkappa + \omega_2 &= 0 \\ C^*_1 k_1 + C_2^* k_2 &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

Kada se vektor korelata K_1 uvrsti iz prve u treću jednačinu dobiće se

$$\begin{aligned} C^*_1 K^{-1}{}_l C_1 \varkappa + C_2 k_2 + C^*_1 K^{-1}{}_l \omega_1 &= 0 \\ C_2 \varkappa + \omega_2 &= 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Za $B^*_1 \neq 0$ i $B^*_2 \neq 0$, dobija se

$$\begin{aligned} (K_l + B^*_1 K_\xi B_1) k_1 + B^*_1 K_\xi B_2 k_2 + C_1 \varkappa + \omega_1 &= 0 \\ B^*_2 K_\xi B_1 k_1 + B^*_2 K_\xi B_2 k_2 + C_2 \varkappa + \omega_2 &= 0 \\ C^*_1 k_1 + C^*_2 k_2 &= 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Na osnovu izloženog nije teško primetiti da se pomoću predloženog modela izravnanja mogu izvesti ostale metode koje mogu imati primenu u geodeziji. Prednost univerzalnog modela izravnanja naročito dolazi do izražaja kada u izravnanju istovremeno učestvuju: merene, date i tražene veličine, kao i sistematske greške. Ukoliko neka od ovih veličina nije prisutna prilikom izravnanja, onda se odgovarajući članovi koji se na njih odnose izjednačuju sa nulom. Na primer ako merenja ne sadrže sistematske greške, onda je $D_1 = 0$. Kada su sistematske greške prisutne, one se mogu odrediti iz izravnanja. Navjeći je problem odrediti elemente metrice D_1. Oni se mogu odrediti ako je poznat zakon ponašanja sistematskih grešaka.

5. *Ocena tačnosti*

Pri strogom (kompleksnom) izravnanju date veličine ξ_i imaju isti tretman kao i merene veličine l_i, a sistematske greške λ_i u jednačinama učestvuju isto kao i nepoznate veličine $\varkappa_i$, Imajući ovo u vidu, jednačine (2) zgodno je prikazati u obliku

$$||A^* B^*|| \left\| \begin{matrix} v \\ V \end{matrix} \right\| + ||C D|| \left\| \begin{matrix} \varkappa \\ \lambda \end{matrix} \right\| + \omega = 0 \tag{26}$$

ili kraće

$$\bar{A}^* \delta + \bar{B} y + \omega = 0 \tag{27}$$

gde su

$$\begin{aligned} \delta^* &= ||v^* V^*|| \\ \bar{A}^* &= ||A^* B^*|| \\ \bar{B} &= ||C D|| \\ y^* &= ||\varkappa^* \lambda^*||. \end{aligned}$$

Slobodni članovi sadrže merene i date veličine

$$\omega = \omega_0 + A^* l + B^* \xi = \omega_0 + \bar{A}^* L \tag{28}$$

gde je L zajednički vektor

$$L^* = ||l^* \xi^*||$$

a K_L je odgovarajuća kovarijaciona matrica

$$K_L = \left\| \begin{matrix} K_l & \\ & K_\xi \end{matrix} \right\| \tag{29}$$

Jednačinama (27) odgovaraju normalne jednačine

$$\begin{aligned} N k + \bar{B} y + \omega &= 0 \\ \bar{B}^* k \qquad\quad &= 0 \end{aligned} \tag{30}$$

gde je

$$N = \bar{A}^* K_L \bar{A} = A^* K_l A + B^* K_\xi B. \tag{31}$$

Vektor korelata

$$k = -N^{-1} \bar{B} y - N^{-1} \omega \tag{32}$$

uvrtsimo u drugu jednačinu

$$\bar{B}^* N^{-1} \bar{B} y + \bar{B}^* N^{-1} \omega = 0 \tag{33}$$

odavde

$$y = -(\bar{B}^* N^{-1} \bar{B})^{-1} \bar{B}^* N^{-1} \omega. \tag{34}$$

Uvrstimo (34) u (32)

$$k = N^{-1} \bar{B} (\bar{B}^* N^{-1} \bar{B})^{-1} \bar{B}^* N^{-1} \omega - N^{-1} \omega \tag{35}$$

6. *Određivanje kovarijacione matrice K_y*

Uvrstimo (28) u (34) bez konstantnog dela ω_0

$$y = -(\bar{B}^* N^{-1} \bar{B})^{-1} \bar{B}^* N^{-1} \bar{A}^* L. \tag{36}$$

Kovarijaciona matrica biće

$$K_y = (\bar{B}^* N^{-1} \bar{B})^{-1} \bar{B}^* N^{-1} \bar{A}^* K_L \bar{A} N^{-1} \bar{B} (\bar{B}^* N^{-1} \bar{B})^{-1} = (\bar{B}^* N^{-1} \bar{B})^{-1} \tag{37}$$

odnosno

$$K_y = \begin{Vmatrix} C^* (A^* K_l A + B^* K_\xi B)^{-1} C & C^* (A^* K_l A + B^* K_\xi B)^{-1} D \\ D^* (A^* K_l A + B^* K_\xi B) C & D^* (A K_l A + B K_\xi B)^{-1} D \end{Vmatrix}^{-1} \tag{38}$$

Ako ne postoje sistematske greške $D = 0$, dobija se

$$K_x = [C^* (A^* K_l A + B^* K_\xi B)^{-1} C]^{-1}. \tag{39}$$

Ako ne postoje date veličine $B = 0$, dobija se

$$K_x = [C^* (A^* K_l A)^{-1} C]^{-1}. \tag{40}$$

Kod posrednog izravnanja $A^* = -E$, te (39) i (40) imaće sledeći oblik

$$K_x = [C^* (K_l + B^* K_\xi B)^{-1} C]^{-1} \tag{41}$$

$$K_x = (C^* K^{-1}_l C)^{-1}. \tag{42}$$

7. *Određivanje kovarijacione matrice $K_{L'}$*

Zajednički vektor izravnatih merenih i datih veličina je

$$L' = L + \delta = L + K_L \bar{A} k. \tag{43}$$

Prvo uvrstimo (35) u (43)

$$L' = L + K_L \bar{A} [N^{-1} \bar{B} (\bar{B}^* N^{-1} \bar{B})^{-1} \bar{B}^* N^{-1} \omega - N^{-1} \omega] \tag{44}$$

a zatim (28) u (44)

$$L' = [E + K_L \bar{A} N^{-1} \bar{B} (\bar{B}^* N^{-1} \bar{B})^{-1} B^* N^{-1} \bar{A}^* - K_L \bar{A} N^{-1} \bar{A}^*] L. \tag{45}$$

Kovarijaciona matrica biće

$$K_{L'} = [E + K_L \bar{A} N^{-1} \bar{B} (\bar{B}^* N^{-1} \bar{B})^{-1} \bar{B}^* N^{-1} \bar{A}^* - K_L \bar{A} N^{-1} \bar{A}^*] K_L$$
$$[E + \bar{A} N^{-1} \bar{B} (\bar{B}^* N^{-1} \bar{B})^{-1} \bar{B}^* N^{-1} \bar{A}^* K_L - A N^{-1} \bar{A}^* K_L]. \tag{46}$$

Kod uslovnog izravnanja $\bar{B} = 0$, te će (46) dobiti sledeći oblik

$$K_{L'} = (E - K_L \bar{A} N^{-1} \bar{A}^*) K_L (E - \bar{A} N^{-1} \bar{A}^* K_L)$$

odnosno

$$K_{L'} = K_L - K_L \bar{A} N^{-1} \bar{A}^* K_L$$

ili

$$K_L' = \begin{Vmatrix} K_l' & K_l'{}_\xi' \\ K_\xi'{}_l' & K_\xi'' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} K_l - K_l A N^{-1} A^* K_l & -K_l A N^{-1} B^* K_\xi \\ -K_\xi B N^{-1} A^* K_l & K_\xi - K_\xi B N^{-1} B^* K_\xi \end{Vmatrix} \tag{47}$$

8. Srednja greška jedinice težine

U [1] je prikazana opšta formula za određivanje srednje greške jedinice težine koja se može koristiti pri svim izravnanjima

$$\mu = \sqrt{\frac{\delta^* K^{-1}{}_L \delta}{\operatorname{trag} K^{-1}{}_L K_\delta}} \tag{48}$$

Prvo odredimo kovarijacionu matricu za zajednički vektor popravaka

$$\delta = K_L \bar{A} k = K_L \bar{A} [N^{-1} \bar{B} (\bar{B}^* N^{-1} \bar{B})^{-1} \bar{B}^* N^{-1} - N^{-1}] \bar{A}^* L$$

odnosno

$$K_\delta = K_L \bar{A} [N^{-1} \bar{B} (\bar{B}^* N^{-1} \bar{B})^{-1} \bar{B}^* N^{-1} - N^{-1}] \bar{A}^* K_L \bar{A}$$
$$[N^{-1} \bar{B} (\bar{B}^* N^{-1} \bar{B})^{-1} \bar{B}^* N^{-1} - N^{-1}] \bar{A}^* K_L$$

ili

$$K_\delta = K_L \bar{A} N^{-1} \bar{A}^* K_L - K_L \bar{A} N^{-1} \bar{B} (\bar{B}^* N^{-1} \bar{B})^{-1} \bar{B}^* N^{-1} \bar{A}^* K_L \tag{49}$$

a zatim trag

$$\operatorname{trag} K^{-1}{}_L K_\delta = \operatorname{trag} K^{-1}{}_L [K_L \bar{A} N^{-1} \bar{A}^* K_L - K_L \bar{A} N^{-1} \bar{B} (\bar{B}^* N^{-1} \bar{B})^{-1} B^* N^{-1} \bar{A} K_L] =$$
$$= \operatorname{trag} \bar{A}^* K_L \bar{A} N^{-1} - \operatorname{trag} \bar{B}^* N^{-1} \bar{A}^* K_L \bar{A} N^{-1} \bar{B} (\bar{B}^* N^{-1} \bar{B})^{-1} =$$
$$= \operatorname{trag} N N^{-1} - \operatorname{trag} (\bar{B}^* N^{-1} B) (\bar{B}^* N^{-1} \bar{B})^{-1} =$$
$$\operatorname{trag} E - \operatorname{trag} E = r - (u + q).$$
$$r, r \qquad (u + q), (u + q)$$

Kod uslovnog izravnanja je $\bar{B} = 0$, te se dobija

$$\operatorname{trag} K^{-1}{}_L K_\delta = \operatorname{trag} K^{-1}{}_L K_L A N^{-1} A^* K_L = \operatorname{trag} E = r.$$
$$r.\ r$$

Kod posrednog izravnanja je $\bar{A} = -E$, te onda imamo

$$\operatorname{trag} K^{-1}{}_L K_\delta = \operatorname{trag} K^{-1}{}_L K_L K^{-1}{}_L K_L - \operatorname{trag} K^{-1}{}_L K_L K^{-1}{}_L \bar{B} (\bar{B}^* K^{-1} \bar{B})^{-1} \bar{B}^* K^{-1}{}_L K_L =$$
$$= \operatorname{trag} E - \operatorname{trag} (\bar{B}^* K^{-1}{}_L \bar{B}) (\bar{B}^* K^{-1}{}_L \bar{B})^{-1} = \operatorname{trag} E - \operatorname{trag} E =$$
$$(n + s), (n + s) \qquad (n + s), (n + s) \quad (u + q), (u + q)$$
$$= (n + s) - (u + q)$$

jer je

$$N = \bar{A}^* K_L \bar{A} = K_L.$$

Ova formula važi za slučaj kada se iz izravnanja određuju popravke merenih i datih veličina. Ako se pri izravnanju vodi računa o greškama datih veličina, ali se ne određuju i njihove popravke V, onda je

$$\operatorname{trag} K^{-1}{}_l K_v = n - (u + q).$$

Kada aisu prisutne sistematske greške

$$q = 0 \qquad (\text{trag } K_l K_v = n - u).$$

U svim formulama ovoga rada, kod praktičnih računanja prilikom izravnanja geodetskih mreža umesto kovarijacione matrice K, može da se koristi korelaciona matrica Q ($K = \sigma^2 Q$). Tada treba izvršiti homogenizaciju težina.

LITERATURA

1. K. Mihailović: Geodezija II, prvi deo, Beograd 1974.