TRANSFORMACIONA RAČUNANJA IZMEĐU OSNOVNIH I DRŽAVNIH MREŽA[1]

*Ivan MOLNAR — Novi Sad**

ZUSAMMENFASSUNG — Im Artikel wurde die Helmerttransformation (Gleichung 8a) ausgearbeitet, wobei die Elemente des selbstendig eingesetzten Netzes, dh. die Winkel und die Entfernungen, nicht verzerrt werden.

Mit diesem, von Verfasser als streng bezeichneten Verfahren, wird die Anfonderung, dass die Beziehungen der ausgeglichenen Grössen des neu transformierten Netzes erhalten bleiben, wie sie sich im selbstendigen Netzes vorfinden (Beispiel: Tabelle I), erfüllt.

1. UKLAPANJE SAMOSTALNIH GEODETSKIH MREŽA U DRŽAVNI KOORDINATNI SISTEM SA PROMENOM RAZMERE MREŽE

U cilju razgraničenja delova zemljišnih teritorija može se ukazati potreba za time, da se pojedina merenja odnosno koordinate stalnih tačaka, odrede, sa starih planova izrađenih na osnovu državne trigonometrijske mreže. Kako se obeležavanje, isticanje i prenošenje starih podataka po pravilu ostvaruje na temelju stalnih tačaka određenih u okviru nove osnovne mreže, i obzirom da se osnovna mre.a razvija kao samostalna geodetska mreža, to je potrebno koordinate stalnih tačaka ili deo koordinata stalnih tačaka osnovne mreže preračunati, radi poslova razgraničenja, u odgovarajuće manje tačan državni koordinatni sistem. Osnovu za preračunavanje pružaju one trigonometrijske tačke čije su koordinate poznate i u državnom i u novom osnovnom sistemu. Određivanje najvjerojatnije zavisnosti ostvaruje se primenom metode najmanjih kvadrata iz uslova da suma kvadrata odstupanja identičnih tačaka u jednom i drugom koordinatnom sistemu bude minimum. Računanje se efikasno sprovodi uvođenjem pomoćnih koordinatnih sistema.

Obrazuje se pomoćni koordinatni sistem, paralelan osama državnog koordinatnog sistema, sa proizvoljno odabranim koordinatnim početkom u težištu koordinata identičnih tačaka osnovnog sistema $0\,(y_0,\ x_0)$. U cilju određivanja zavisnosti obrazuje se i drugi pomoćni koordinatni sistem, para-

[1] Pod osnovnom mrežom ovde se podrazumeva specijalna trigonometrijska mreža razvijena za potrebe izgrađenih površina i industrijskih naselja, a određuje se većom tačnošću od tačnosti koja se uopšteno traži pri klasičnim premerima.

* Adresa autora: Mr. Ivan Molnar dipl. inž., Pokrajinska geodetska uprava, Novi Sad.

lelan osama osnovnog koordinatnog sistema, sa privremeno odabranim početkom takođe u tački $0 (y_0, x_0)$. Na taj način ostvarena je mogućnost uspostavljanja veze između koordinata identičnih tačaka dvaju sistema, koji se iskazuje sledećim jednačinama:

$$\begin{aligned} y'-y_0 &= \eta + (1+c\cdot 10^{-5})(y-y_0)\cos\rho''\beta\cdot 10^{-5} + (1+c\cdot 10^{-5})(x-x_0)\sin\rho''\beta\cdot 10^{-5} \\ x'-x_0 &= \xi - (1+c\cdot 10^{-5})(y-y_0)\sin\rho''\beta\cdot 10^{-5} + (1+c\cdot 10^{-5})(x-x_0)\cos\rho''\beta\cdot 10^{-5} \end{aligned} \tag{1}$$

U ovim transformacionim jednačinama koordinata sa primovima odnose se na državni koordinatni sistem, a bez njih na samostalni osnovni koordinatni sistem. Veličine η i ξ predstavljaju izmeštanje osnovnog koordinatnog sistema u odnosu na državni sistem. Veličina $0.00001\ \beta$ predstavlja ugao zakošenja osnovnog koordinatnog sistema u odnosu na državni sistem. Najzad, $0.00001\ c$ je koeficijent razmere dvaju sistema. Ugao rotacije i koeficijent razmere su veoma male veličine, te su u ovim jednačinama iskazani u stohiljaditama.

$$\beta = \frac{\Delta\nu''}{\rho''} \qquad\qquad c = \frac{\Delta s}{s} = (s'-s)\,s^{-1} = q-1$$

U ovom slučaju primenjuje se izravnanje po metodi posrednih merenja. U tom cilju koordinate identičnih tačaka u državnom sistemu treba smatrati merenim veličinama. Za početne vrednosti nepoznatih η, ξ, β i c uzima se nula. Razvijajući jednačine (1) u Maklorenov red (članovi drugog i viših redova se zanemaruju) dobivaju se jednačine odstupanja:

$$\begin{aligned} V_y &= \eta + (x-x_0)\,10^{-5}\beta + (y-y_0)\,10^{-5}c + (y-y') \\ V_x &= \xi - (y-y_0)\,10^{-5}\beta + (x-x_0)\,10^{-5}c + (x-x') \end{aligned} \tag{2}$$

U ovim jednačinama V_y i V_x predstavljaju projekcije linearnih odstupanja između osnovnih i dr.avnih koordinata u pravcu y' odnosno x'.

Uvedimo sledeće smene:

$$a_i = (x_i - x'_0)\,10^{-5} \qquad\qquad b_i = (y_i - y'_0)\,10^{-5}$$
$$f_{yi} = y'_i - y_i \qquad\qquad f_{xi} = x'_i - x_i$$

tada jednačine odstupanja matrično glase:

$$V + f = A\,K \tag{3}$$

gde su:

A matrica koeficijenata

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & a_1 & b_1 \\ 1 & 0 & a_2 & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & a_m & b_m \\ 0 & 1 & -b_1 & a_1 \\ 0 & 1 & -b_2 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & -b_m & a_m \end{array} \right\|$$

K, *f* i *V* vektori

$$K^T = \|\eta\ \xi\ \beta\ c\|$$
$$f^T = \|f_{y1}\ f_{y2} \ldots f_{ym}\ f_{x1}\ f_{x2} \ldots f_{xm}\|$$
$$V^T = \|V_{y1}\ V_{y2} \ldots V_{ym}\ V_{x1}\ V_{x2} \ldots V_{xm}\|$$

U ciglju obrazovanja normalnih jednačina, primenjuje se princip minimuma na jednačine odstupanja

$$A^T A K = A^T f$$

odnosno

$$N K = n \tag{4}$$

gde su:

N matrica koeficijenata normalnih jednačina

$$N = \begin{Vmatrix} m & o & [a] & [b] \\ o & m & -[b] & [a] \\ [a] & -[b] & [a^2+b^2] & o \\ [b] & [a] & o & [a^2+b^2] \end{Vmatrix} \tag{5}$$

n vektor slobodnih članova normalnih jednačina

$$n = \begin{Vmatrix} [f_y] \\ [f_x] \\ [af_y - bf_x] \\ [af_x + bf_y] \end{Vmatrix} \tag{6}$$

Elementi vektora nepoznatih K određuju se posredstvom inverzne matrice N^{-1}. Međutim, obzirom da je $[a] = [b] = 0$, tj. kako su svi članovi matrice koeficijenata normalne jednačine koji nisu kvadratni nule, to svaka od normalnih jednačina postaje nezavisna od drugih i može se posebno rešiti

$$\begin{aligned} m\,\eta &= [f_y], & \eta &= m^{-1}[f_y] \\ m\,\xi &= [f_x], & \xi &= m^{-1}[f_x] \\ [a^2+b^2]\,\beta &= [af_y - bf_x], & \beta &= [a^2+b^2]^{-1}[af_y - bf_x] \\ [a^2+b^2]\,c &= [af_x + bf_y], & c &= [a^2+b^2]^{-1}[af_x + bf_y] \end{aligned} \tag{7}$$

Koordinate tačaka osnovne mreže, uz uvažavanje približnosti $\sin\beta \approx \approx \beta$ i $\cos\beta \approx 1$, uklapamo u državni koordinatni sistem putem Helmertovih transformacionih jednačina.

$$\begin{Vmatrix} Y' \\ X' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} y \\ x \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & -b & a \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \eta \\ \xi \\ \beta \\ c \end{Vmatrix}$$

odnosno

$$\begin{Vmatrix} Y' \\ X' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} y \\ x \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \eta \\ \xi \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} a & b \\ -b & a \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \beta \\ c \end{Vmatrix} \tag{8}$$

2. STROGI NAČIN UKLAPANJA SAMOSTALNIH GEODETSKIH MREŽA U DRŽAVNI KOORDINATNI SISTEM

Primenom iz literature poznatih Helmertovih jednačina transformacija koordinata tačaka (8), vrši se uklapanje osnovnih mreža u državni koordinatni sistem, na taj način da se uglovne veličine očuvaju, ali se razmera mreže menja. U dosadašnjoj praksi ove jednačine su najšire bile korišćene. Univerzalna upotreba Helmertovih jednačina transformacija mora se okarakterisati nekritičnom, jer se doslednom primenom ovih jednačina dobijaju novotransformisane koordinate tačaka putem kojih se menja razmera osnovne mreže.

Ukoliko se želi ispravno postupiti i adekvatno odabrati jednačina transformacije, potrebna je prethodna procena, da li se za predmetno područje može tolerisati promena razmere mreže ili ne. Po pravilu opredelenje mora biti takvo, da se putem transformacije koordinate tačaka ostvari strogo uklapanje osnovnih mreža u dr.avni koordinatni sistem, odnosno da se pri transformacijama postigne integralno očuvanje izravnatih veličina; dužina strana i uglova. U stvari ovako se mora i postupiti, jer se upravo radi o tome, da se radovi veće tačnosti (osnovna mreža) imaju osloniti na radove manje tačnosti (državna mreža).

U cilju očuvanja razmere mreže dužine moraju biti konstantne tj. $\Delta s = 0$. Uzimajući ovo u obzir jednačine (1) ovako izgledaju

$$\begin{aligned} y' - y_0 &= \eta + (y - y_0) \cos \rho'' \beta 10^{-5} + (x - x_0) \sin \rho'' \beta 10^{-5} \\ x' - x_0 &= \xi - (y - y_0) \cos \rho'' \beta 10^{-5} + (x - x_0) \sin \rho'' \beta 10^{-5} \end{aligned} \quad (1^a)$$

Jednačina odstupanja tada ovako izgleda:

$$\begin{aligned} V_y &= \eta + (x - x_0) 10^{-5} \beta + y - y' \\ V_x &= \xi + (y - y_0) 10^{-5} \beta + x - x' \end{aligned} \quad (2^a)$$

Matrica koeficijenata normalnih jednačina N glasi:

$$N = \begin{Vmatrix} m & m & [a] \\ o & o & -[b] \\ [a] & -[b] & [a^2 + b^2] \end{Vmatrix} \quad (5^a)$$

Vektor slobodnih članova n ima sledeći izgled:

$$n^T = \| [f_y] \, [f_x] \, [af_y - bf_x] \| \quad (6^a)$$

Rešavanjem triju normalnih jednačina koje su međusobno nezavisne, dobijaju se tražene vrednosti nepoznatih:

$$\begin{aligned} \eta &= m^{-1} [f_y] \\ \xi &= m^{-1} [f_x] \\ \beta &= [a^2 + b^2]^{-1} [af_y - bf_x] \end{aligned} \quad (7^a)$$

Helmertove jednačine za transformaciju koordinata tačaka, odnosno jednačine za integralno uklapanje osnovne mreže u državni koordinatni sistem, koji podrazumeva univerzalno očuvanje oblika i razmree osnovne mreže, ima sledeći oblik:

$$\begin{Vmatrix} Y' \\ X' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} y \\ x \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & o & a \\ o & 1 & -b \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \eta \\ \xi \\ \beta \end{Vmatrix} \quad (8^a)$$

Brojni primer

Neka su date koordinate šest tačaka u osnovnom i državnom koordinatnom sistemu.

	Osnovni sistem		Državni sistem	
Tač.	y	x	y′	x′
530	406755.93	10381.27	406755.68	10381.56
694	405604.46	12397.34	405604.20	12397.73
228	406975.52	13585.54	406975.23	13585.84
534	408535.81	15503.14	408535.37	15503.44
628	408797.24	14205.67	408797.03	14206.01
37	409105.09	11853.44	409104.81	11853.71

$y_0 = 407629.008 \quad x_0 = 12987.733$

Obrazujmo matrične ejdnačine odstupanja

$$\begin{Vmatrix} 1 & o & -0.02606 & -0.00873 \\ 1 & o & -0.00590 & -0.02024 \\ 1 & o & +0.00598 & -0.00653 \\ 1 & o & +0.02515 & +0.00907 \\ 1 & o & +0.01218 & +0.01168 \\ 1 & o & -0.01134 & +0.01476 \\ o & 1 & +0.00873 & -0.02606 \\ o & 1 & +0.02024 & -0.00590 \\ o & 1 & +0.00653 & +0.00598 \\ o & 1 & -0.00907 & +0.02515 \\ o & 1 & -0.01168 & +0.01218 \\ o & 1 & -0.01476 & -0.01134 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \eta \\ \xi \\ \beta \\ c \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} V_{y1} \\ V_{y2} \\ V_{y3} \\ V_{y4} \\ V_{y5} \\ V_{y6} \\ V_{x1} \\ V_{x2} \\ V_{x3} \\ V_{x4} \\ V_{x5} \\ V_{x6} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -0.25 \\ -0.26 \\ -0,29 \\ -0.44 \\ -0.21 \\ -0.28 \\ +0.29 \\ +0.39 \\ +0.30 \\ +0.30 \\ +0.34 \\ +0.27 \end{Vmatrix}$$

zatim i normalna jednačina

$$\begin{Vmatrix} 6 & o & o & o \\ o & 6 & o & o \\ o & o & 0.002624 & o \\ o & o & o & 0.002624 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \eta \\ \xi \\ \beta \\ c \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1.73 \\ +1.89 \\ -0.002426 \\ -0.000786 \end{Vmatrix}$$

Vektor traženih veličina je:

$$\begin{Vmatrix} \eta \\ \xi \\ \beta \\ c \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -0.288 \\ +0.315 \\ -0.924543 \\ -0.299543 \end{Vmatrix}$$

Na osnovu jednačina (8), odnosno (8[a]) računate su koordinate novotransformisane mre.e. One su prikazane u tabeli I., gde su istovremeno dati i podaci o elementima; dužinama strana i uglovima ovih mreža.

Uklapanje osnovne mreže u državni koordinatni sistem na osnovu jednačina (8), uglovne veličine se ne deformišu. Međutim, upoređivanje dužina obrazovanih na osnovu osnovnih i novotransformisanih koordinata pokazuje, da se osnovna mreža ne uklapa u državni koordinatni sistem. Odstupanja dužina su različita ali su proporcionalna dužinama strana, tj. ukoliko je dužina strane mreže veća, utoliko je i odstupanje između novotransformisane i dužine strane osnovne mreže, veće.

Tabela 1.

Tačka	Osnovne koordinate: y (metara)	Osnovne koordinate: x (metara)	Novotransformisane koordinate nastale Helmertovom transformacijom: y'$_H$ (metara)	Novotransformisane koordinate nastale Helmertovom transformacijom: x'$_H$ (metara)	Novotransformisane koordinate nastale strogim načinom uklapanja: y'$_s$ (metara)	Novotransformisane koordinate nastale strogim načinom uklapanja: x'$_s$ (metara)
530	406 755.93	10 381.27	406 755.669	10 381.585	406 755.666	10 381.577
694	405 604.46	12 397.34	405 604.183	12 397.638	405 604.177	12 397.636
228	406 975.52	13 585.54	406 975.228	13 585.847	406 975.226	13 585.849
534	408 535.81	15 503.14	408 535.496	15 503.455	408 535.499	15 503.463
628	408 797.24	14 205.67	408 796.938	14 205.992	408 796.941	14 205.996
37	409 105.09	11 853.44	409 104.808	11 853.772	409 104.812	11 853.769

Tačka	Direkcioni ugao 0 ' "	Dužina S_o (metara)	Direkcioni ugao 0 ' "	Dužina S_H (metara)	Direkcioni ugao 0 ' "	Dužina S_s (metara)
228—530	183 55 13.35	3211.786	183 55 11.39	3211.775	183 55 11.41	3211.786
628—228	251 12 03.48	1924.377	251 12 01.61	1924.372	251 12 01.58	1924.378
530—628	28 05 29.37	4335.089	28 05 27.50	4335.074	28 05 27.48	4335.089
534—694	223 20 41.42	4270.691	223 20 39.55	4270.678	223 20 39.55	4270.692
37—534	351 08 04.01	3693.832	351 08 02.10	3693.819	351 08 02.13	3693.831
694—37	98 49 53.57	3542.632	98 49 51.66	3542.621	98 49 51.63	3542.631

Tačka	Ugao α_o 0 ' "	Ugao α_H 0 ' "	Razlike: S_H—S_o (m)	Razlike: α_H—α_o (")	Ugao α_s 0 ' "	Razlike: S_s—S_o (m)	Razlike: α_s—α_o (")
530	24 10 16.02	24 10 16.11	—0.011	+0.09	24 10 16.07	±0.000	+0.05
228	112 43 09.87	112 43 09.78	—0.005	—0.09	112 43 09.83	+0.001	—0.04
628	43 06 34.11	43 06 34.11	—0.014	±0.00	43 06 34.10	±0.000	—0.01
694	55 29 12.15	55 29 12.11	—0.013	—0.04	55 29 12.08	+0.001	—0.07
534	52 12 37.41	52 12 37.45	—0.013	+0.04	52 12 37.42	—0.001	+0.01
37	78 18 10.44	72 18 50.44	—0.011	±0.00	72 18 10.50	—0.001	+0.06

Uklapanje osnovne mre.e u državni koordinatni sistem primenom jednačine (8^a), ne deformiše ni uglove ni dužine. Takvim postupkom se u potpunosti ostvaruje uslov, da odnosi izravnatih veličina novotransformisane mreže ostanu onakvi kakvi su bili i u osnovnoj mreži.

LITERATURA

1. Mihajlović: Geodezija II, I deo, Beograd 1974 g.
2. Molnar: Uklapanje lokalnih mreža u državni koordinatni sistem (Magistarski rad), Beograd 1975 g.