

POJEDNOSTAVLJEN NAČIN RAČUNANJA KONVERGENCIJE MERIDIJANA ZA POTREBE ŽIROSKOPSKJE ORIJENTACIJE

Zvonimir NAROBÉ — Zagreb*

ZUSAMMENFASSUNG — Am Anfang wird bemerkt, dass die bekannte Methode zur Berechnung der Meridiankonvergenz nach Gauss-Schreiber gewisse Nachteile bezüglich der Leistungsfähigkeit besitzt. Im weiteren werden einige Verfahren zur verkürzten Konvergenzberechnung angegeben; sie besitzen etwas kleinere Genauigkeit, die aber den Anforderungen zur Orientierungsbestimmung der Geraden mittels neuartigen Kreiseltheodolite völlig genügend werden. Für die praktische Anwendung sind die zugehörige Tabellen beigelegt, die alle Projektionssysteme auf dem Gebiet Jugoslawiens erfassen.

Prema članu 55. Pravilnika za državni premjer I. dio, konvergencija meridijana c , u nekoj točki T s pravokutnim koordinatama \bar{X} \bar{Y} u Gauss-Krügerovoj projekciji, računa se po formuli Gauss-Schreibera,

$$c'' = (c_3) \bar{Y} + (c_4) \bar{Y}^3 + (c_5) \bar{Y}^5 \quad (1)$$

gdje oznake u zagradama imaju značenje:

$$(c_3) = \frac{\rho'' \operatorname{tg} \varphi'}{N} \quad (2)$$

$$(c_4) = -\frac{\rho'' \operatorname{tg} \varphi'}{3N^3} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi' - \eta^2 - 2\eta^4) \quad (3)$$

$$(c_5) = \frac{\rho'' \operatorname{tg} \varphi'}{15N^5} (2 + 5 \operatorname{tg}^2 \varphi' + 3 \operatorname{tg}^4 \varphi') \quad (4)$$

U gornjim izrazima, φ' je geografska širina točke T' gdje ordinata \bar{Y} siječe X -os. Radius zakrivljenosti prvog vertikala N i veličina $\eta = e' \cos \varphi'$, gdje je e' drugi brojni ekscentricitet meridijanske elipse, jesu također funkcije definirane širine. Koordinate \bar{X} \bar{Y} su nesmanjene (nereducirane) koordinate koje odgovaraju geografskim koordinatama φ , l točke T .

Praktični postupak pri računanju konvergencije, kako ga navodi Pravilnik, veoma se pojednostavljuje korištenjem tablica u kojima su dati (c_3) , (c_4) i (c_5) kao funkcije širine φ' . Ipak, uočavaju se dva nedostatka. Koriste se, naime, dvije odvojene tabele. Najprije se u jednoj (Tablici IV.) prema argumentu \bar{X} pronalazi vrijednost širine φ' , koja je zatim argument za

* Adresa autora: Doc. dr Zvonimir Narobe dipl. inž. Geodetski fakultet, Zagreb, Kačićeva ul. 26.

drugu (Tablica XIII.), gdje su dati *logaritmi* od (c_3) , (c_4) i (c_5) , što je drugi nedostatak. Istina, iskazivanje logaritamskih veličina svojedobno je predstavljalo prednost pri računanju, dok to danas, u doba elektroničkih računala, zadržava u radu.

Unatoč iznesenim primjedbama, pitanje efikasnosti navedenog postupka nije se postavljalo, uglavnom zbog relativno rijetke primjene, u matematičkoj kartografiji i za potrebe astronomsko-geodetske orijentacije.

Međutim, posljednjih godina sve više se primjenjuje nova, samostalna metoda orijentacije pomoću žiroteodolita. Metoda žiroskopske orijentacije prikladna je za riješavanje niza geodetskih zadataka vezanih uz određivanje smjernog kuta, pa zato nailazi na sve širu primjenu. Budući da se sa žiroteodolitom određuju astronomski azimuti pravaca, konvergencija meridijana je neophodni parametar za prelaz na smjerni kut u usvojenoj projekciji.

Veličina konvergencije c , pretežno ovisi o udaljenosti točke od srednjeg meridijana; u Jugoslaviji, promjeni od $\Delta \bar{Y} = 1$ km približno odgovara $\Delta c = 30''$. To znači da kod žiroorijentacije treba poznavati iznos konvergencije za svako pojedinačno stajalište instrumenta. Zbog toga, i s obzirom na sve veću primjenu žiroorijentacije te njenu točnost, u zadnje vrijeme se osjeća i nedostatak praktičnijeg postupka računanja konvergencije iz pravokutnih koordinata točke opažanja.

Izrazi (1—4) osiguravaju računanje konvergencije s visokom točnošću od $\pm 0,0005''$ koja daleko prelazi mogućnosti orijentacije pomoću suvremenih žiroskopskih instrumenata. Zato će se ovdje ukazati na neke skraćene postupke računanja konvergencije za područje Jugoslavije, najprije sa točnošću od $\pm 0,01''$, a zatim sa $\pm 0,1''$ i konačno $\pm 1''$.

Analizom formula lako je ustanoviti da se, za računanje konvergencije sa $\pm 0,01''$, u izrazu (3) mogu zanemariti dva posljednja člana u zagradi. Uzgred se napominje da su kod takve točnosti zanemarive i razlike između konvergencije meridijana u ravnini i geodetske konvergencije na elipsoidu. Međutim, za skraćivanje praktičnog postupka, bitno je da se može odbaciti posljednji član u izrazu (1), jer njegova najveća vrijednost ne dostiže niti $0,002''$.

Parametri $+(c_3)$ i $-(c_4)$ ovdje će se označiti sa A odnosno B, pa formula za računanje konvergencije glasi:

$$c'' = A \bar{Y} - B \bar{Y}^3 \quad (5)$$

Za teritorij Jugoslavije, tabelarno su iskazani numerički iznosi parametara A i B, koji se pronalaze direktno, prema zadanoj apscisi \bar{X} linearnom interpolacijom. Decimalna mjesta od A i B su takva, da u izrazu (5) treba ordinatu \bar{Y} uzimati u jedinicama od sto tisuća metara.

Pri računanju konvergencije dovoljna je apscisa \bar{X} s točnošću od 10 metara i ordinata \bar{Y} zaokružena na cijele metre (petu decimalu). Kod potencije ordinate u posljednjem članu izraza (5) dosta je uvažiti samo kilometre od \bar{Y} (drugu decimalu).

Primjer, za točku s pravokutnim nereduciranim koordinatama $\bar{X} = 4864003,63$ m $\bar{Y} = -139484,26$ m. Prema argumentu \bar{X} iz tabele se dobiva $A = 3109,19$ i $B = 0,491$ pa je konvergencija meridijana u toj točki: $c'' = A \bar{Y} - B \bar{Y}^3 = 3109,19 (-1,39484) - 0,491 (-2,68) = -4336,82 + 1,32 = -4335,50''$.

Navedenim postupkom osigurana je točnost računanja konvergencije sa $\pm 0,01''$ do udaljenosti 160 km od srednjeg meridijana. Za širu primjenu formule (5), praksi su nedostajale odgovarajuće tablice parametara A, B.

Kao neophodni parametar, konvergencija meridijana danas se vjerovatno najviše koristi u proračunima za žiroskopsku orijentaciju. Budući da su pogreške suvremenih žiroteodolita znatno veće i od $\pm 0,01''$, to i za brojni iznos konvergencije zadovoljava podatak manje točnosti. Zato je opravdano potražiti još jednostavnije postupke.

Karakteristika formule (5) je relativno mali iznos posljednjeg člana, u kojem se i parametar B mijenja u dosta uskim granicama od 0,39 do 0,60. Ako se dakle za Jugoslaviju uzme konstantna vrijednost $B = 0,50$ formula (5) će biti:

$$c'' = A \bar{Y} - \frac{1}{2} \bar{Y}^3 = \bar{Y} \left(A - \frac{1}{2} \bar{Y}^2 \right) \quad (6)$$

$$c'' = A \bar{Y} - B \bar{Y}^3$$

\bar{X} (km)	A	d.	B	\bar{X} (km)	A	d.	B
4.500	2772,00	8,81	0,390	4.850	3095,55		0,487
4.510	2780,81	8,84	0,392	4.860	3105,29	9,74	0,490
4.520	2789,65	8,86	0,394	4.870	3115,05	9,76	0,493
4.530	2798,51	8,88	0,397	4.880	3124,84	9,79	0,496
4.540	2807,39	8,91	0,400	4.890	3134,66	9,82	0,499
4.550	2816,30	8,94	0,402	4.900	3144,51	9,85	0,502
4.560	2825,24	8,96	0,405	4.910	3154,39	9,88	0,505
4.570	2834,20	8,98	0,408	4.920	3164,31	9,92	0,509
4.580	2843,18	9,01	0,410	4.930	3174,25	9,94	0,512
4.590	2852,19	9,03	0,413	4.940	3184,22	9,97	0,515
4.600	2861,22	9,06	0,416	4.950	3194,22	10,00	0,518
4.610	2870,28	9,08	0,418	4.960	3204,26	10,04	0,521
4.620	2879,36	9,11	0,421	4.970	3214,32	10,06	0,524
4.630	2888,47	9,13	0,424	4.980	3224,42	10,10	0,527
4.640	2897,60	9,16	0,427	4.990	3234,55	10,13	0,531
4.650	2906,76	9,18	0,429	5.000	3244,71	10,16	0,534
4.660	2915,94	9,21	0,432	5.010	3254,90	10,19	0,537
4.670	2925,15	9,24	0,435	5.020	3265,12	10,22	0,540
4.680	2934,39	9,26	0,438	5.030	3275,38	10,26	0,543
4.690	2943,65	9,29	0,440	5.040	3285,67	10,29	0,547
4.700	2952,94	9,32	0,443	5.050	3295,99	10,32	0,550
4.710	2962,26	9,34	0,446	5.060	3306,34	10,35	0,553
4.720	2971,60	9,37	0,449	5.070	3316,73	10,39	0,556
4.730	2980,97	9,40	0,452	5.080	3327,15	10,42	0,560
4.740	2990,37	9,42	0,455	5.090	3337,60	10,45	0,563
4.750	2999,79	9,45	0,458	5.100	3348,09	10,49	0,566
4.760	3009,24	9,48	0,461	5.110	3358,61	10,52	0,570
4.770	3018,72	9,50	0,463	5.120	3369,17	10,56	0,573
4.780	3028,22	9,54	0,466	5.130	3379,76	10,59	0,576
4.790	3037,76	9,56	0,469	5.140	3390,38	10,62	0,580
4.800	3047,32	9,59	0,472	5.150	3401,04	10,66	0,583
4.810	3056,91	9,62	0,475	5.160	3411,74	10,70	0,587
4.820	3066,53	9,64	0,478	5.170	3422,47	10,73	0,590
4.830	3076,17	9,68	0,481	5.180	3433,23	10,76	0,593
4.840	3085,85	9,70	0,484	5.190	3444,03	10,80	0,597
4.850	3095,55		0,487	5.200	3454,87	10,84	0,600

Koristeći ovaj izraz, maksimalna pogreška izračunate konvergencije, na kraju projekcionog sustava, može doseći do $\pm 0,4''$. Iako je time isključen parametar B, primjećuje se da postupak nije osjetnije pojednostavljen.

Mali iznos posljednjeg člana u formuli (5) navodi i na ideju o mogućnosti zamjene kubne funkcije (unutar uskog korištenog intervala $0,0 < \bar{Y} < 1,6$) sa kvadratnom. Za krajnju svrhu, nije bitno dali zamijenjena kvadratna funkcija sadrži i linearni član, ali je svrsishodno da koeficijent uz kvadratni član bude jednak jedinici. Ako se takva aproksimativna jednakost

$$B \bar{Y}^3 = B_1 \bar{Y} + \bar{Y}^2$$

uvrsti u izraz (5), bit će, sa novom oznakom,

$$c'' = (A - B_1) \bar{Y} - \bar{Y}^2 = C_0 \bar{Y} - \bar{Y}^2$$

Predznak konvergencije identičan je predznaku ordinate. Međutim, zbog uvođenja funkcije sa parnom potencijom, u gornjem izvodu je ostao neodređen predznak zadnjeg člana. Definirajući i taj predznak, konačni izraz za računanje konvergencije, u praktičnijem obliku, glasi:

$$c'' = \bar{Y} (C_0 - |\bar{Y}|) \quad (7)$$

Na osnovu »mreže« konvergencija u projekcionim sustavima Jugoslavije (vidi npr. 3.), izračunate su vrijednosti parametra C_0 , vodeći računa o najpovoljnijoj raspodjeli pogrešaka zbog usvojene aproksimacije. U priloženoj tabeli iskazane su veličine C_0 kao funkcije apscise \bar{X} . Kao i u prethodnom slučaju, ordinatu treba uzimati u jedinicama od sto kilometara.

Za isti numerički primjer točke s koordinatama $\bar{X} = 4\ 864\ 003,63$ $\bar{Y} = -139\ 484,26$ iz tablice se interpolacijom dobiva $C_0 = 3109,64$. Vrijednost konvergencije će dakle biti: $c'' = -1,39484 \cdot (3109,64 - 1,39) = -1,39484 \cdot 3108,25 = -4335,5''$.

Postupak je jednostavan, a na području Jugoslavije osigurava točnost izračunate konvergencije u granicama $\pm 0,1''$ odnosno, kod nove podjele (400^g), siguran je podatak centisekundi (1^{cc}). Primjećuje se, da je i priložena tablica mogla biti bar upola manja, jer za linearnu interpolaciju je interval $\Delta \bar{X} = 20$ km dovoljno malen; međutim, interpolacija unutar cijelih decimalnih intervala je praktičnija.

Iznos konvergencije s točnošću od $0,1''$ zadovoljit će i za najpreciznija žiroskopska mjerenja, izvršena uz optimalne uvjete, kao npr. pri prenosu »relativnog azimuta« između dva pravca na manjoj udaljenosti, prilikom baždarenja žiroteodolita ili u razne eksperimentalne i istraživačke svrhe. Međutim za mogućnosti današnjih konstrukcija žiroteodolita, u njihovoj široj praktičnoj primjeni, najčešće je sasvim dovoljno poznavati konvergenciju s točnošću cijelih sekundi. U tom slučaju postupak se može krajnje pojednostavniti.

Slično prethodnom izvodu, za posljednji član u izrazu (5) pronalazi se najpovoljnija aproksimacija, samo s linearnim članom. Konačni izraz za računanje konvergencije onda glasi:

$$c'' = C \bar{Y} \quad (8)$$

$$c'' = \bar{Y} (c_0 - |\bar{Y}|)$$

\bar{X} (km)	C_0	d.	\bar{X} (km)	C_0	d.
4.500	2772,56	8,81	4.850	3096,00	
4.510	2781,37	8,83	4.860	3105,73	9,73
4.520	2790,20	8,86	4.870	3115,49	9,76
4.530	2799,06	8,88	4.880	3125,28	9,79
4.540	2807,94	8,91	4.890	3135,09	9,81
4.550	2816,85	8,93	4.900	3144,94	9,85
4.560	2825,78	8,95	4.910	3154,82	9,88
4.570	2834,73	8,98	4.920	3164,73	9,91
4.580	2843,71	9,00	4.930	3174,66	9,93
4.590	2852,71	9,03	4.940	3184,63	9,97
4.600	2861,74	9,06	4.950	3194,63	10,00
4.610	2870,80	9,08	4.960	3204,66	10,03
4.620	2879,88	9,10	4.970	3214,72	10,06
4.630	2888,98	9,13	4.980	3224,81	10,09
4.640	2898,11	9,16	4.990	3234,94	10,13
4.650	2907,27	9,18	5.000	3245,09	10,15
4.660	2916,45	9,20	5.010	3255,28	10,19
4.670	2925,65	9,24	5.020	3265,50	10,22
4.680	2934,89	9,26	5.030	3275,75	10,25
4.690	2944,15	9,28	5.040	3286,03	10,28
4.700	2953,43	9,31	5.050	3296,35	10,32
4.710	2962,74	9,34	5.060	3306,70	10,35
4.720	2972,08	9,37	5.070	3317,08	10,38
4.730	2981,45	9,39	5.080	3327,50	10,42
4.740	2990,84	9,42	5.090	3337,95	10,45
4.750	3000,26	9,45	5.100	3348,43	10,48
4.760	3009,71	9,51	5.110	3358,95	10,52
4.770	3019,18	9,53	5.120	3369,50	10,55
4.780	3028,69	9,56	5.130	3380,09	10,59
4.790	3038,22	9,58	5.140	3390,71	10,62
4.800	3047,78	9,62	5.150	3401,36	10,65
4.810	3057,36	9,64	5.160	3412,05	10,69
4.820	3066,98	9,67	5.170	3422,78	10,73
4.830	3076,62	9,71	5.180	3433,54	10,76
4.840	3086,29		5.190	3444,34	10,80
4.850	3096,00		5.200	3455,17	10,83

Obzirom na točnost, ovdje je dovoljno raspolagati s priloženim tabeliranim veličinama parametra C na svakih $\Delta \bar{X} = 100$ km.

\bar{X} (km)	C	d.
4.500	2771,3	89,2
4.600	2860,5	91,7
4.700	2952,2	94,3
4.800	3046,5	97,1
4.900	3143,6	100,2
5.000	3243,8	103,3
5.100	3347,1	106,7
5.200	3453,8	

Za isti numerički primjer, interpolacijom iz tabele dobiva se $C = 3108,6$. Veličina konvergencije dakle iznosi: $c'' = -3108,6 \cdot 1,3948 = -4336''$. Ovaj jednostavni postupak osigurava sekundnu točnost računanja konvergencije na cijelom teritoriju Jugoslavije.

Na kraju, treba spomenuti i mogućnost da se iznos konvergencije c'' direktno vadi iz odgovarajućih tablica sastavljenih prema argumentima \bar{X} i \bar{Y} (vidi npr. 3.); kod ovog načina, za iznalaženje veličine c'' potrebna je trostruka interpolacija. Međutim to ipak nije i jednostavnija metoda. Naime zbog manjeg broja računskih operacija, u obzir dolaze samo takve tabele koje dozvoljavaju linearnu interpolaciju. Za veću točnost c'' , tabele su zato suviše velike, a kod manje točnosti su ovdje izloženi postupci jednostavniji.

Ukoliko se posjeduje žiroteodolit sa novom kutnom podjelom (400^g), tada je najpraktičnije da se i svi proračuni orijentacije izvrše u tim jedinicama. Svrshodno je onda i tabelirane parametre (A, B, C₀, C), množenjem sa 3,0864 preračunati u centezimalne sekunde.

LITERATURA

1. Pravilnik za državni premer, I. deo, Triangulacija, Beograd 1951.
2. Borčić: Gaus-Krigerova projekcija, Beograd 1955.
3. Narobe: Teoretske osnove i praktična primjena žiroteodolita, Zagreb 1975.