

## OTKRIVANJE POLOŽAJA TRIGONOMETRIJSKIH TAČAKA POMOĆU FAKTORA »a« I »b«

Gligorije PEROVIĆ — Beograd\*

**ZUSAMMENFASSUNG** — Im frei gewählten Punkt  $S$ , der sich in der Nähe des gesuchten Punktes  $T$  befindet, messen wir die Richtungen zu den drei entfernten Punkten  $T_1$ ,  $T_2$  und  $T_3$  (es brauchen keine Triangulationspunkte zu sein) deren Koordinaten bekannt sind.

Dann auf Grund der Koordinaten der gegebenen Punkte und gemessenen Richtungen rechnen wir die Elemente der Exzentrizität: »e« und Winkel »i« dabei nützen wir die Faktoren »a« und »b«.

Genauigkeit nach gehört diese Methode zu den angenehmen Methoden, jedoch beträgt der maximale Fehler der Entdeckung weniger als 0,3 m, für  $e_{max} = 100$  m und  $d_{min} = 1$  km.

So hohe Genauigkeit ist durch sehr schnelle Konvergenz der Taylor Reihe gesichert (Formel 25).

Bedeutende Charakteristik dieser Methode ist die Annahme des neuen Koordinationssystems in der Limbusfläche, so daß die Richtungswinkel durch direkte Ablesung auf dem Limbus zu gewinnen sind.

**Uvod.** Postoji više razloga da, na osnovu opisa položaja trigonometrijskih tačaka (t. o. br. 27), ne možemo pronaći belegu trigonometrijske tačke na terenu. Dakle, znamo približno položaj trigonometrijske tačke na terenu, ali njenu belegu (kamenu ili betonsku) ne možemo pronaći.

Stvarni položaj trigonometrijske tačke, odnosno njen podzemni centar, možemo otkriti na više načina. Jedan od njih je način (metoda) otkrivanja položaja trigonometrijskih tačaka pomoću faktora »a« i »b«. Za rešenje postavljenog problema po ovoj metodi neophodno je u tački  $S$ , koja je u blizini tražene tačke, izmeriti pravce ka trima trigonometrijskim tačkama čije su koordinate i položaj poznati. Ova tri pravca jednoznačno definišu položaj tačke  $S$  u ravni koordinatnog sistema, a kako su nam poznate i koordinate tačke  $T$  možemo sračunati elemente puta kojim ćemo doći iz tačke  $S$  u tačku  $T$ . Ti elementi su ekscentricitet  $e = ST$  i ugao  $i$  — ugao u tački  $S$  između pravaca ka jednoj opažanoj tački i tački  $T$  (Sl. 1.).

**Postavka problema.** Neka su  $a'_1$ ,  $a'_2$ ,  $a'_3$  pravci u tački  $S$  opažani ka poznatim tačkama  $T_1(y_1; x_1)$ ,  $T_2(y_2; x_2)$ ,  $T_3(y_3; x_3)$  i neka je  $T(y_t, x_t)$  tražena tačka čije koordinate takođe znamo. Pošto su poznate koordinate tačaka

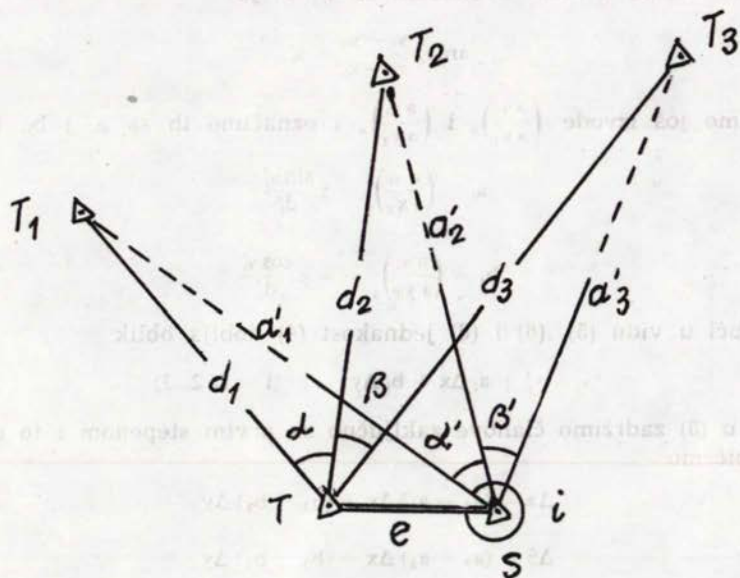
\* Adresa autora: Gligorije Perović dipl. inž., Građevinski fakultet, Beograd.

$T, T_1, T_2$  i  $T_3$ , možemo smatrati da su poznati i nagibi  $v_1 = v_1^t$ ,  $v_2 = v_2^t$  i  $v_3 = v_3^t$  i dužine  $d_1 = \overline{TT_1}$ ,  $d_2 = \overline{TT_2}$  i  $d_3 = \overline{TT_3}$ .

Da bi došli iz tačke S u T treba sračunati ekscentricitet  $e = \overline{ST}$  i ugao  $i$ .

**Rešenje problema.** Označimo sa:

- $\alpha'$  — ugao u tački S između pravaca ka  $T_1$  i  $T_2$ ,
- $\beta'$  — ugao u tački S između pravaca ka  $T_2$  i  $T_3$ ,
- $\gamma'$  — ugao u tački S između pravaca ka  $T_3$  i  $T_1$ ,
- $\alpha$  — ugao u tački T između pravaca ka  $T_1$  i  $T_2$ ,
- $\beta$  — ugao u tački T između pravaca ka  $T_2$  i  $T_3$ ,
- $\gamma$  — ugao u tački T između pravaca ka  $T_3$  i  $T_1$ ,
- $v_i$  — ( $i = 1, 2, 3$ ) nagibi u tački S ka  $T_1, T_2, T_3$ ,
- $v_i$  — ( $i = 1, 2, 3$ ) nagibi u tački T ka  $T_1, T_2, T_3$ ,
- $d'_i$  — dužine od tačke S do  $T_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ).



Sl. 1

Prvo, nađimo razlike

$$\Delta \alpha = \alpha - \alpha'$$

i

$$\Delta \beta = \beta - \beta'$$

(1)

a zatim uspostavimo veze

$$\alpha = v_2 - v_1,$$

$$\beta = v_3 - v_2$$

i

$$\alpha' = v_2' - v_1'$$

$$\beta' = v_3' - v_2'$$

(2)

Zamijenimo (2) u (1) pa imamo

$$\Delta \alpha = (v_2 - v_1) - (v'_2 - v'_1) \quad (3)$$

$$\Delta \beta = (v_3 - v_2) - (v'_3 - v'_2)$$

Dalje, direkzione uglove  $v_i$ , u tački T, predstavimo Tajlorovim redom u okolini tačke S ( $Y_s; Y_s$ )

$$v_i = \arctg \frac{y_i - y_T}{x_i - x_T} = \arctg \frac{y_i - y_s}{x_i - x_s} + \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_T} \right)_s \Delta x + \left( \frac{\partial v_i}{\partial y_T} \right)_s \Delta y + \dots \quad (4)$$

gde je:

$$\Delta x = y_T - y_s' \quad (5)$$

$$\Delta y = x_T - x_s'$$

Pošto smo nagibe u tački S označili sa  $v'_i$  to je

$$\arctg \frac{y_i - y_s}{x_i - x_s} = v'_i \quad (6)$$

Nađimo još izvode  $\left( \frac{\partial v_i}{\partial x_T} \right)_s$  i  $\left( \frac{\partial v_i}{\partial y_T} \right)_s$  i označimo ih sa  $a_i$  i  $b_i$ , tj.

$$a_i = \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_T} \right)_s = \rho \frac{\sin v'_i}{d'_i} \quad (7)$$

$$b_i = \left( \frac{\partial v_i}{\partial y_T} \right)_s = -\rho \frac{\cos v'_i}{d'_i}$$

Imajući u vidu (5), (6) i (6) jednakost (4) dobija oblik

$$v_i = v'_i + a_i \Delta x + b_i \Delta y \dots, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (8)$$

Ako u (8) zadržimo članove zaključno sa prvim stepenom i to uvrstimo u (3) dobićemo

$$\Delta \alpha = (a_2 - a_1) \Delta x + (b_2 - b_1) \Delta y \quad (9)$$

$$\Delta \beta = (a_3 - a_2) \Delta x + (b_3 - b_2) \Delta y$$

odakle nalazimo

$$\Delta x = q_\alpha \Delta \alpha + q_\beta \Delta \beta \quad (10)$$

$$\Delta y = p_\alpha \Delta \alpha + p_\beta \Delta \beta$$

gde je:

$$\begin{aligned} p_\alpha &= -(a_3 - a_2) : \Delta \\ p_\beta &= (a_2 - a_1) : \Delta \\ q_\alpha &= (b_3 - b_2) : \Delta \\ p_\beta &= -(b_2 - b_1) : \Delta \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a_2 - a_1) & (b_2 - b_1) \\ (a_3 - a_2) & (b_3 - b_2) \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(b_3 - b_2) - (a_3 - a_2)(b_2 - b_1)$$



Kada smo sračunali  $\Delta x$  i  $\Delta y$  onda lako možemo odrediti veličine  $e$  i  $i$ , i to na dva načina: grafički i analitički.

Za grafičko rešenje, nanosimo u pogodnoj razmeri (obično u razmeri 1:100 do 1:1000) veličine  $\Delta x$  i  $\Delta y$  na koordinatne ose  $x$  i  $y$  i u preseku odgovarajućih paralela dobijamo tačku  $T$ , zatim razmernikom očitamo veličinu  $e$ , a uglomerom nagib  $v'_s$ . Ugao  $i$  odredićemo prema (vidi Sl. 1.)

$$i = v'_s - v'_i. \quad (12)$$

Za analitičko rešenje veličine  $e$  računamo po formuli

$$e = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad (13)$$

a ugao  $v'_s$  po formuli

$$v'_s = \arctg \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (14)$$

i na kraju ugao  $i$  prema (12).

No, ako pogledamo jednačine (7) i (3) videćemo da su u njima nepoznati nagibi  $v'_i$  i dužine  $d'_i$ . Ovu neodređenost možemo rešiti na sledeći način. Pošto su elementi ekscentriciteta — odstojanje  $e$  i ugao  $i$  — invarijantni u odnosu na koordinatni sistem, to umesto nagiba  $v'_i$  usvajamo pravce  $a'_i$  (merene pravce), a dužine  $d'_i$  zamenjujemo dužinama  $d_i$  koje su jedino poznate. Prema ovome jednačine za računanje faktora glase:

$$a = \frac{\rho}{d_i} \sin a'_i \quad (15)$$

$$b_i = \frac{-\rho}{d_i} \cos a'_i,$$

a jednačine (3) dobijaju oblik

$$\Delta \alpha = \alpha - \alpha' = (v_2 - v_1) - (a'_2 - a'_1) \quad (16)$$

$$\Delta \beta = \beta - \beta' = (v_3 - v_2) - (a'_3 - a'_2)$$

*Napomena.* U primeni, radi kontrole, obavezno računamo i razliku  $\Delta \gamma$ :

$$\Delta \gamma = \gamma - \gamma' = (v_1 - v_3) - (a'_1 - a'_3) \quad (17)$$

jer mora biti

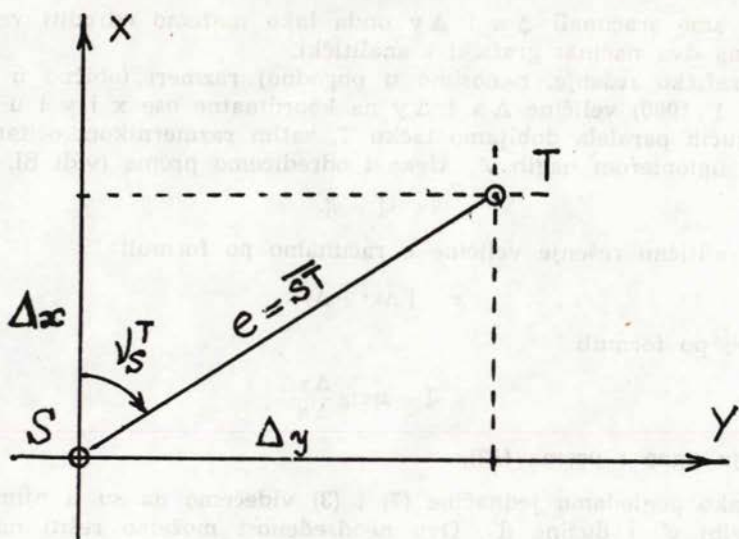
$$\Delta \alpha + \Delta \beta + \Delta \gamma = 0. \quad (18)$$

*Diskusija rešenja i zaključci.* Usvajanjem novog koordinatnog sistema — pravci  $d'_i$  umesto nagiba  $v'_i$  — dobijamo to da je

$$v'_s = a'_s, \quad (19)$$

tj. da nagib  $v'_s$  odgovara direktnom čitanju na limbu, u pravcu ka tački  $T$ . Ovo je jedna specifičnost metode.

Druga i bitna karakteristika metode je vrlo velika tačnost u poređenju sa drugim približnim metodama. Ta tačnost je obezbeđena velikom brzinom konvergencije rada (8) odnosno (4), pa je greška ostatka vrlo mala.



Sl. 2

Dokaz. Napišimo jednačinu, naprimjer, za  $\Delta \alpha$  ovako

$$\Delta \alpha = \alpha - \alpha' = (v_2 - v_2') - (v_1 - v_1') \quad (20)$$

Stavimo

$$\Delta v_1 = v_1 - v_1' \quad (21)$$

i

$$\Delta v_2 = v_2 - v_2',$$

tada je

$$\Delta \alpha = \Delta v_2 - \Delta v_1 \quad (22)$$

Ako  $\Delta v_i$ , ( $i = 1, 2$ ), predstavimo Tajlorovim redom

$$\Delta v_1 = \arctg \tau_1 = \tau_1 - \frac{1}{3} \tau_1^3 + \frac{1}{5} \tau_1^5 - \frac{1}{7} \tau_1^7 + \dots \quad (23)$$

gde je

$$\tau_1 = \tg \Delta v_1 \quad (24)$$

tada je

$$\Delta \alpha = (\tau_2 - \tau_1) - \frac{1}{3} (\tau_2^3 - \tau_1^3) + \frac{1}{5} (\tau_2^5 - \tau_1^5) - \dots \quad (25)$$

Pošto pri računanju, u razvoju (25), zadržavamo samo linearni član, to je maksimalna greška ostatka

$$\Delta(\Delta \alpha)_{\max} \leq \left| -\frac{1}{3} (\tau_2^3 - \tau_1^3) \right| \leq \frac{1}{3} (|\tau_2^3| + |\tau_1^3|) \quad (26)$$

Dalje, neka je

$$e_{\max} = 100 \text{ m}^*,$$

$$d_{\min} = 1000 \text{ m}$$

tada je

$$\Delta v_{\max} = \rho \frac{e_{\max}}{d_{\min}} = 57^{\circ},3 \frac{100}{1000} = 5^{\circ},73 \approx 6^{\circ}$$

i

$$(\tau_i)_{\max} = \text{tg}(\Delta v_{\max}) = \text{tg} 6^{\circ} = 0,105 \approx 0,1$$

Sada je

$$\Delta(\Delta v)_{\max} \leq \frac{1}{3} 0,1^3 = 0,000 3\bar{3} \approx 1',1$$

i

$$\Delta(\Delta \alpha)_{\max} \leq \frac{1}{3} (2 \cdot 0,1^3) = 0,000 6\bar{6} \approx 2',2$$

pa, ako stavimo

$$e = d \cdot \Delta v$$

onda je

$$(\Delta e)_{\max} = d \Delta(\Delta v)_{\max} = 1000 \cdot 0,000 3\bar{3} = 0,33, \quad (27)$$

a to je dovoljna tačnost pri otkrivanju položaja tačke T.

Ostaje još otvoreno pitanje sa kojom tačnošću moramo znati polazne elemente: nagibe  $v_i$ , pravce  $a'_i$  i dužine  $d_i$  da bi tačnost elemenata ekscentriciteta —  $e$  i  $i$  — bila dovoljna za otkrivanje položaja tačke T.

Tražena tačnost biće zadovoljena ako relativne greške pojedinih elemenata budu približno jednake, tj. ako bude

$$\delta_e \approx \delta_d \approx \delta_{a'} \approx \delta_v \approx \delta_a \approx \delta_b, \quad (28)$$

gde  $\delta$  označava relativnu grešku, a slovo u indeksu indicira na koji element se odnosi ta greška.

Ako usvojimo da maksimalna greška položaja od 0,33 m obezbeđuje sigurno otkrivanje položaja tačke T, onda će srednja greška ekscentriciteta iznositi jednu trećinu te greške, tj. biće

$$m_e \approx \frac{1}{3} \Delta_p = \frac{1}{3} 0,33 \approx 0,1 \text{ m}. \quad (29)$$

Ako i dalje smatramo da je  $e_{\max} = 100 \text{ m}$ , onda imamo

$$\delta_e = \frac{m_e}{e} = \frac{0,1}{1000} = \frac{1}{1000}$$

\* Za  $e_{\max}$  usvajamo vrednost od 100 m, jer ako je  $e > 100 \text{ m}$  onda ćemo se premestiti »od oka« sa instrumentom u novu tačku S tako da bude  $e < 100 \text{ m}$ .



odnosno, prema (28)

$$\frac{1}{1000} = \delta_e \approx \delta_d \approx \delta_{a'} \approx \delta_v \approx \delta_a \approx \delta_b. \quad (30)$$

Ovde pod greškom  $\delta_a$  i  $\delta_v$  treba podrazumevati količnik greške ugla i veličine  $\rho$ , tj.

$$\delta_{a'} = \delta_v = \frac{m_{a'}}{\rho} = \frac{m_v}{\rho} = \frac{m'_u}{3438} = \frac{1}{1000} \quad (31)$$

odakle je

$$m_u = 3',4 \quad (32)$$

Da bi jasnije sagledali sve ovo sačinimo tabelu — Tabela 1 — po  $e$  i  $\delta_e$ , na osnovu (29) i (30).

Tabela 1

| e [m]                      | 20    | 40    | 60    | 80    | 100    |
|----------------------------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $\delta_e = \frac{0,1}{e}$ | 1/200 | 1/400 | 1/600 | 1/800 | 1/1000 |

Pošto su greške svih elemenata ograničene greškom ekscentriciteta — formule (28) — to iz Tabele 1 zaključujemo da je dovoljno, pri računanju, sve elemente uzimati (u srednjem) sa tri značajne cifre, a greške uglova moraju zadovoljavati (32). No, obzirom na način merenja uglova  $a_i$  možemo uzeti da je

$$m_u \leq 0,5', \quad (33)$$

pa greške ostalih elemenata mogu biti i veće od vrednosti  $u$  (30).

*Primer.* Sračunati elemente za otkrivanje položaja trigonometrijske tačke broj 199, ako je dato (Tabela 2):

Tabela 2

| Tačka<br>$T_i$ | Pravci                                    |      |                         |      | Dužine<br>$d_i$<br>(m) |
|----------------|---|------|-------------------------|------|------------------------|
|                | $\alpha'_i$<br>(Stanica S)                |      | $\nu'_i$<br>(Stanica T) |      |                        |
| 195            | 0   | 00,0 | 210                     | 00,0 | 1164                   |
| 217            | 93  | 27,5 | 297                     | 15,3 | 1558                   |
| 29             | 154                                       | 55,1 | 358                     | 21,9 | 1680                   |
| 199            | ( $i = 223^\circ 22,9$ ); ( $e = 100,0$ ) |      |                         |      |                        |

*Napomene.* Pravci  $\alpha'_i$  su mereni u jednom girusu teodolitom sa podatkom  $p = 0,1'$ , dužine  $d_i$  sračunate iz koordinata i zaokružene na metar.

Radi prikaza uticaja grešaka zaokruživanja pri računanju, ovaj primer računat je logaritmarom (sa tri značajne cifre) i mašinom (sa pet značajnih cifara). Sračunate su i greške položaja, pri čemu su za tačne vrednosti usvojena direktna merenja:

$$e_{\text{tačno}} = e_T = 100,00 \text{ m}$$

i

$$i_{\text{tačno}} = i_T = 223^\circ 22,9'$$

Tako, pri računanju sa tri značajne cifre dobijamo:

a) za grafičko rešenje

$$e = 100,2 \text{ m}, \quad i = 223^\circ,3,$$

$$\Delta e = e - e_T = 100,2 - 100,0 = 0,2 \text{ m},$$

$$\Delta i = i - i_T = 223^\circ,3 - 223^\circ,4 = -0^\circ,1,$$

$$\Delta P = \sqrt{(\Delta e)^2 + \left(\frac{\Delta i}{\rho} e\right)^2} = 0,27 \text{ m} \approx 0,3 \text{ m};$$

b) za analitičko rešenje

$$e = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 100,10 \text{ m},$$

$$i = \text{arc tg} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 223^\circ 15',6,$$

$$\Delta e = e - e_T = 0,10 \text{ m},$$

$$\Delta i = i - i_T = 7',3,$$

$$\Delta P = 0,23 \text{ m},$$

dok pri računanju sa pet značajnih cifara dobijamo:

$$\Delta x = -72,75 \text{ m}; \quad \Delta y = -68,67 \text{ m}$$

odnosno

$$e = 100,04 \text{ m}$$

$$i = 223^\circ 20',9$$

i

$$\Delta e = 0,04 \text{ m}$$

$$\Delta i = 2',0,$$

pa je stvarna greška otkrivanja položaja tačke

$$\Delta P = 0,07 \text{ m}.$$



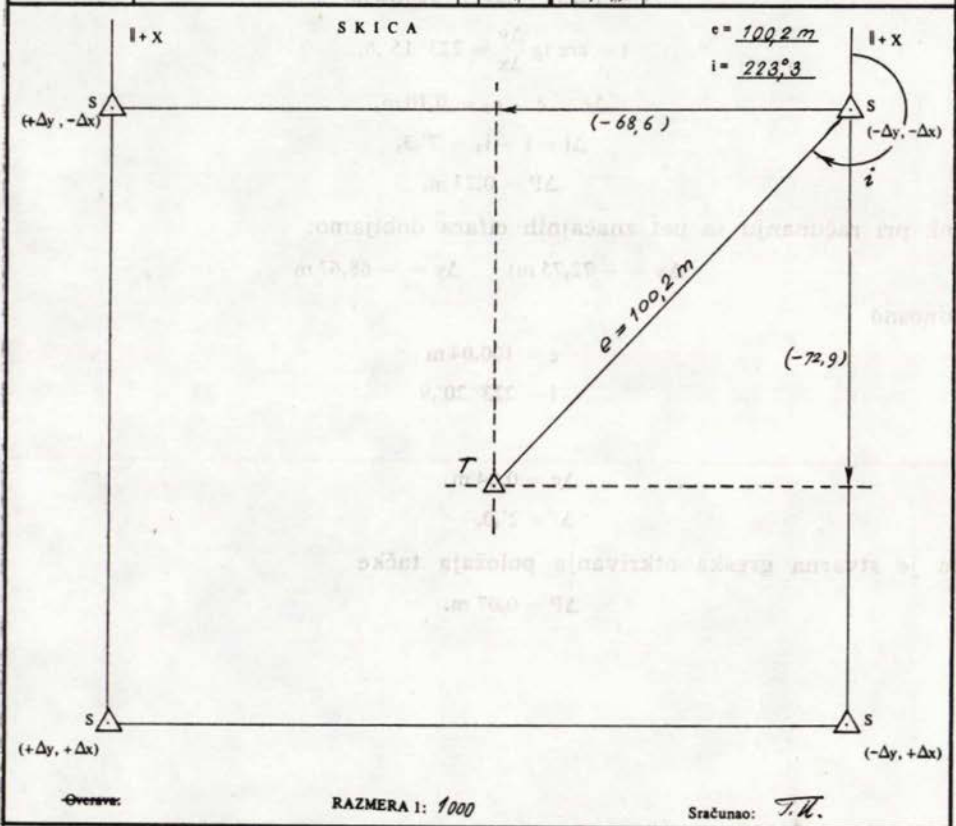
OTKRIVANJE POLOŽAJA TRIGONOMETRIJSKIH TACAKA

~ pomoću faktora a i b ~

| Vizura<br>$T_i$      | Dužine<br>$T-T_i$<br>(m) | Stanica S  |      | Stanica<br>$T$<br>199 |      | $u_i = u_{i+1} - a_i$ |      | $u_i = v_{i+1} - v_i$ |      | $\Delta u_i = u_i - u'_i$ |       |      |      |
|----------------------|--------------------------|------------|------|-----------------------|------|-----------------------|------|-----------------------|------|---------------------------|-------|------|------|
|                      |                          | o          | '    | o                     | '    | o                     | '    | o                     | '    | o                         | '     |      |      |
| $T_1$ 195            | $d_1$ 1.164              | $a'_1$ 0   | 00,0 | $v_1$ 210             | 00,0 | $\alpha$ 93           | 27,5 | $\alpha$ 87           | 15,3 | $\Delta\alpha$ -          | 6     | 12,2 |      |
| $T_2$ 217            | $d_2$ 1.558              | $a'_2$ 93  | 27,5 | $v_2$ 297             | 15,3 | $\beta$ 61            | 27,6 | $\beta$ 61            | 06,6 | $\Delta\beta$ -           |       | 27,0 |      |
| $T_3$ 29             | $d_3$ 1.680              | $a'_3$ 154 | 55,1 | $v_3$ 358             | 21,9 | $\gamma$ 205          | 04,4 | $\gamma$ 211          | 38,1 | $\Delta\gamma$ +          | 6     | 33,2 |      |
| Kontrola: $\Sigma =$ |                          |            |      |                       |      |                       |      |                       |      |                           |       |      |      |
|                      |                          |            |      |                       |      |                       | 360  | 00,0                  | 360  | 00,0                      | $\pm$ | 0    | 00,0 |

| $\sin a'_i$  | $\cos a'_i$ | $a_i = (\rho/d_i) \sin a'_i$ | $b_i = (\rho/d_i) \cos a'_i$ | $a_2 - a_1$          | $b_2 - b_1$ |
|--------------|-------------|------------------------------|------------------------------|----------------------|-------------|
| $\pm 0,000$  | $\pm 1,000$ | $\pm 0,000$                  | $\pm 0,000$                  | $(2,202) - (3,066)$  | $(-0,864)$  |
| $\pm 0,9998$ | $\pm 0,060$ | $\pm 2,202$                  | $\pm 0,192$                  | $(-1,334) - (1,722)$ | $(-3,056)$  |
| $\pm 0,424$  | $\pm 0,906$ | $\pm 0,868$                  | $\pm 1,854$                  | $(3,792) - (-4,117)$ | $(7,909)$   |

| $\rho_\alpha = -(a_3 - a_2) / \Delta$                              | $\rho_\beta = (a_2 - a_1) / \Delta$ | $\rho_\alpha \Delta \alpha'$ | $\rho_\beta \Delta \beta'$ | $q_\alpha = (b_3 - b_2) / \Delta$                            | $q_\beta = (b_2 - b_1) / \Delta$ |
|--|-------------------------------------|------------------------------|----------------------------|--|----------------------------------|
| $\pm 0,1688$   | $\pm 0,278$                         | $-0,62,8$                    | $-5,8$                     | $0,218$  | $-0,390$                         |
| $\rho_\alpha \Delta \alpha' + \rho_\beta \Delta \beta' = \Delta y$ |                                     | $-68,6$                      | $-72,9$                    | $\Delta x = q_\alpha \Delta \alpha' + q_\beta \Delta \beta'$ |                                  |



OTKRIVANJE POLOŽAJA TRIGONOMETRIJSKIH TAČAKA

- pomoću faktora a i b -

| Vizura<br>$T_i$      | Dužine<br>$T-T_i$<br>(m) | Stanica S |      | Stanica<br>$T_{199}$ |      | $u_i = a_{i+1} - a_i$ |      | $u_i = v_{i+1} - v_i$ |      | $\Delta u_i = u_i - u'_i$ |      |      |  |
|----------------------|--------------------------|-----------|------|----------------------|------|-----------------------|------|-----------------------|------|---------------------------|------|------|--|
|                      |                          | o         | .    | o                    | .    | o                     | .    | o                     | .    | +                         | o    |      |  |
| $T_1$ 195            | $d_1$ 1164               | $a_1$ 0   | 00,0 | $v_1$ 210            | 00,0 | $\alpha$ 93           | 27,5 | $\alpha$ 87           | 15,3 | $\Delta\alpha$ -          | 6    | 12,2 |  |
| $T_2$ 217            | $d_2$ 1558               | $a_2$ 93  | 27,5 | $v_2$ 297            | 15,3 | $\beta$ 61            | 27,6 | $\beta$ 61            | 06,6 | $\Delta\beta$ -           | 27,0 |      |  |
| $T_3$ 29             | $d_3$ 1680               | $a_3$ 154 | 55,1 | $v_3$ 358            | 21,9 | $\gamma$ 205          | 04,9 | $\gamma$ 211          | 38,1 | $\Delta\gamma$ +          | 6    | 33,2 |  |
| Kontrola: $\Sigma$ = |                          |           |      |                      |      | 360                   |      | 00,0                  |      | +                         |      | 0    |  |

| $\sin \sigma'_i$           | $\cos \sigma'_i$            | $a_i = (p/d_i) \sin \sigma'_i$           | $b_i = (p/d_i) \cos \sigma'_i$           | $a_2 - a_1$                                   | $b_2 - b_1$                                   |
|----------------------------|-----------------------------|--|--|---|---|
| $\sin \sigma'_1$ + 0,00000 | $\cos \sigma'_1$ + 1,00000  | $a_1 = (p/d_1) \sin \sigma'_1$ + 0,00000 | $b_1 = (p/d_1) \cos \sigma'_1$ + 2,95361 | $a_2 - a_1 = (2,20266) - (0,00000) = 2,20266$ | $b_2 - b_1 = (3,08672) - (2,95361) = 0,13311$ |
| $\sin \sigma'_2$ + 0,09818 | $\cos \sigma'_2$ - 0,06832  | $a_2 = (p/d_2) \sin \sigma'_2$ + 2,20266 | $b_2 = (p/d_2) \cos \sigma'_2$ + 2,93311 | $a_3 - a_2 = (3,33516) - (2,20266) = 1,13250$ | $b_3 - b_2 = (4,12034) - (3,08672) = 1,03362$ |
| $\sin \sigma'_3$ + 0,04239 | $\cos \sigma'_3$ - 0,980570 | $a_3 = (p/d_3) \sin \sigma'_3$ + 0,06750 | $b_3 = (p/d_3) \cos \sigma'_3$ + 1,85365 | $\Delta = (3,78932) - (3,33516) = 0,45416$    | $\Delta = (4,12034) - (4,12034) = 0$          |

| $p_\alpha \Delta \alpha$            | $p_\beta \Delta \beta$            | $p_\alpha \Delta \alpha + p_\beta \Delta \beta = \Delta y$            | $q_\alpha \Delta \alpha$           | $q_\beta \Delta \beta$            | $q_\alpha \Delta \alpha + q_\beta \Delta \beta = \Delta x$            |
|-------------------------------------|-----------------------------------|---|------------------------------------|-----------------------------------|---|
| $p_\alpha \Delta \alpha = -0,76878$ | $p_\beta \Delta \beta = -5,85$    | $p_\alpha \Delta \alpha + p_\beta \Delta \beta = \Delta y = -6,61878$ | $q_\alpha \Delta \alpha = 80,94$   | $q_\beta \Delta \beta = 8,79$     | $q_\alpha \Delta \alpha + q_\beta \Delta \beta = \Delta x = 89,73$    |
| $p_\beta \Delta \beta = -0,27844$   | $p_\alpha \Delta \alpha = -62,82$ | $p_\beta \Delta \beta + p_\alpha \Delta \alpha = \Delta y = -64,604$  | $q_\alpha \Delta \alpha = 0,21747$ | $q_\beta \Delta \beta = -939,020$ | $q_\alpha \Delta \alpha + q_\beta \Delta \beta = \Delta x = -938,803$ |

