RAČUNANJE PRIBLIŽNIH KOORDINATA TAČAKA PRESECANJEM NAZAD — METODA CENTARA OPISANIH KRUŽNICA

*Gligorije PEROVIĆ — Beograd**

ZUSAMMENFASSUNG — In dieser Arbeit ist eine Rechnenmethode der angenäherten Koordinaten des Punktes T des Rückwärtseinschnittes dargestellt.

Zuerst werden die Koordinaten der Zentren C_1 und C_2, der Kreislinien k_1 und k_2, und dann die Koordinaten des Punktes T gerechnet.

Suština metode. Sračunamo koordinate centara C_1 i C_2 kružnica k_1 i k_2 opisanih oko trouglova $\Delta T_a T_m T$ i $\Delta T_m T_b T$ (Sl. 1.), a zatim na osnovu tih koordinata i koordinata tačke T_m računamo koordinate tačke T. Suština je u tome da se računanje svih koordinata tačaka svodi na računanje izraza oblika

$$Y = Y_1 + d_1 \sin \varphi_1 \tag{1}$$

$$X = X_1 + d_1 \cos \varphi_1 \tag{2}$$

gde se prethodno sračunaju d_i i φ_i.

Tok računanja. Prvo, računaju se nagibi ν^m_a i ν^m_b po formulama

$$\operatorname{tg} \nu_a^m = \frac{y_m - y_a}{x_m - x_a}$$

i (3)

$$\operatorname{tg} \nu_b^m = \frac{y_m - y_b}{x_m - x_b},$$

a zatim strane a i b

$$a = \frac{y_m - y_a}{\sin \nu_a^m} = \frac{x_m - x_a}{\cos \nu_a^m}$$

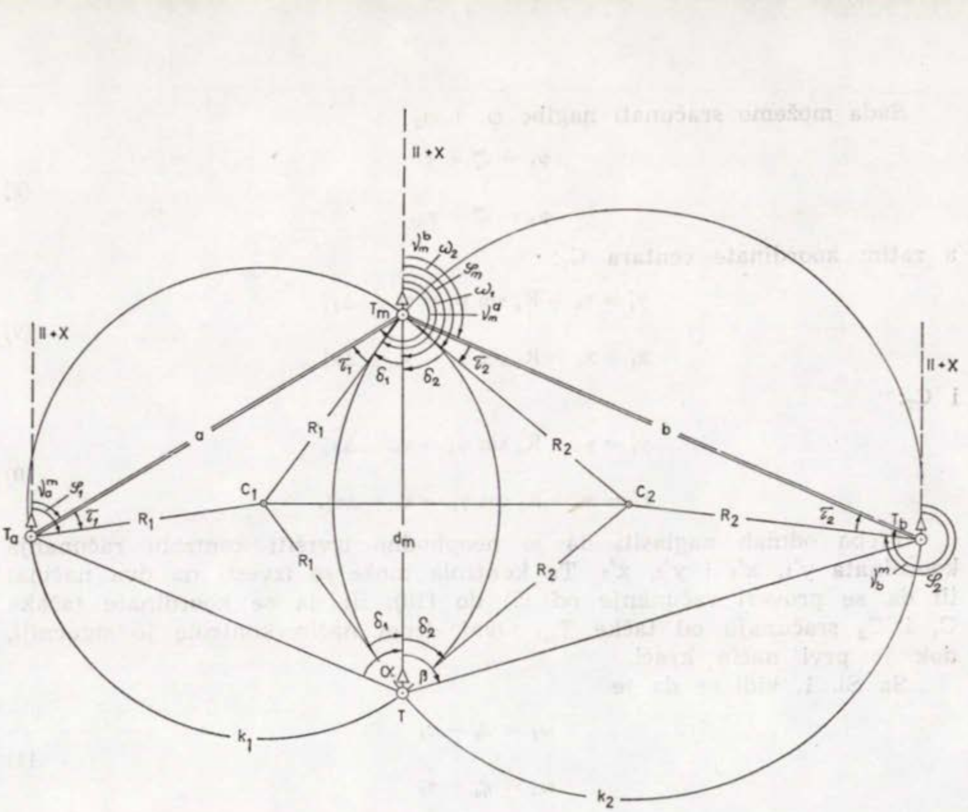
(4)

$$b = \frac{y_m - y_b}{\sin \nu_b^m} = \frac{x_m - x_b}{\cos \nu_b^m}$$

Dalje sledi računanje poluprečnika R_1 i R_2, uglova τ_1 i τ_2 i koordinata centara opisanih kružnica.

---

* Adresa autora: Gligorije Perović dipl. inž., Građevinski fakultet, Beograd.



Сл. 1

Iz poznatih veza u trouglu sledi

$$2R_1 = \frac{a}{\sin \alpha}$$

i (5)

$$2R_2 = \frac{b}{\sin \beta}$$

odakle je

$$R_1 = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

i (6)

$$R_2 = \frac{b}{2 \sin \beta}$$

Pošto je $\sphericalangle T_a C_1 T_m = 2\alpha$ kao centralni ugao nad istim lukom, to iz $\triangle T_a T_m C_1$ i $\triangle T_b T_m C_2$ dobijamo da je:

$$\tau_1 = 90^\circ - \alpha,$$

(7)

$$\tau_2 = 90^\circ - \beta.$$

Sada možemo sračunati nagibe φ_1 i φ_2

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \nu_a^m + \tau_1 \\ \varphi_2 &= \nu_b^m - \tau_2, \end{aligned} \tag{8}$$

a zatim koordinate centara C_1:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_a + R_1 \sin \varphi_1 = y_a + \Delta y_1' \\ x_1' &= x_a + R_1 \cos \varphi_1 = x_a + \Delta x_1' \end{aligned} \tag{9}$$

i C_2:

$$\begin{aligned} y_2' &= y_b + R_2 \sin \varphi_2 = y_b + \Delta y_2' \\ x_2' &= x_b + R_2 \cos \varphi_2 = x_b + \Delta x_2'. \end{aligned} \tag{10}$$

Treba odmah naglasiti da je neophodno izvršiti kontrolu računanja koordinata y'_1, x'_1 i y'_2, x'_2. Ta kontrola može se izvesti na dva načina: ili da se proveri računanje od (5) do (10), ili da se koordinate tačaka C_1 i C_2 sračunaju od tačke T_m. Ovaj drugi način kontrole je sigurniji, dok je prvi način kraći.

Sa Sl. 1. vidi se da je

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \nu_m^a - \tau_1 \\ \omega_2 &= \nu_m^b + \tau_2 \end{aligned} \tag{11}$$

Sada možemo sračunati koordinate centara C_1 i C_2 po formulama

$$\begin{aligned} y_1'' &= y_m + R_1 \sin \omega_1 = y_m + \Delta y_1'' \\ x_1'' &= x_m + R_1 \cos \omega_1 = x_m + \Delta x_1'' \end{aligned} \tag{12}$$

i

$$\begin{aligned} y_2'' &= y_m + R_2 \sin \omega_2 = y_m + \Delta y_2'' \\ x_2'' &= x_m + R_2 \cos \omega_2 = x_m + \Delta x_2'' \end{aligned} \tag{13}$$

Razlike $|y''_i - y'_i|$ i $|x''_i - x'_i|$, $(i = 1,\ 2)$ moraju biti u granicama tačnosti računanja.

Za definitivne vrednosti koordinata tačaka C_1 i C_2 usvajamo vrednosti

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}(y_1' + y_1'') \\ x_1 &= \frac{1}{2}(x_1' + x_1'') \end{aligned} \tag{14}$$

i

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{1}{2}(y_2' + y_2'') \\ x_2 &= \frac{1}{2}(x_2' + x_2'') \end{aligned} \tag{15}$$

Dalje, računamo nagib ν^2_1

$$\nu_1^2 = \operatorname{arc\,tg} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{16}$$

i nagib

$$\varphi_m = 90^\circ + \nu_1^2, \tag{17}$$

zatim uglove

$$\delta_1 = \omega_1 - \varphi_m$$

i

$$\delta_2 = \varphi_m - \omega_2, \tag{18}$$

dužinu

$$d_m = 2R_1 \cos \delta_1 = 2R_2 \cos \delta_2 \tag{19}$$

i na kraju koordinate tačke T

$$y_0 = y_m + d_m \sin \varphi_m = y_m + \Delta y_m$$

$$x_0 = x_m + d_m \cos \varphi_m = x_m + \Delta x_m. \tag{20}$$

Neophodno je uraditi i definitivnu kontrolu računanja koju možemo izvesti po formulama

$$R_1 = \sqrt{(y_1 - y_0)^2 + (x_1 - x_9)^2}$$

i

$$R_2 = \sqrt{(y_2 - y_0)^2 + (x_2 - x_0)^2} \tag{21}$$

Diskusija.

1. Ako je

$$\alpha + \beta + (\nu_m^a - \nu_m^b) > 180^\circ \tag{22}$$

(tačka T unutar kru.nice opisane oko $\triangle\, T_a\, T_m\, T_b$) važe formule od (1) do (21).

2. Ako je

$$\alpha + \beta + (\nu_m^a - \nu_m^b) < 180^\circ \tag{23}$$

(tačka T van kružnice opisane oko $\triangle\, T_a\, T_m\, T_b$) onda ugao φ_m — jednačina (17) — treba računati po formuli

$$\varphi_m = \nu_2^1 + \frac{\pi}{2} = \nu_1^2 - \frac{\pi}{2} \tag{24}$$

Ostale formule ostaju ne promenjene.

3. Ako je

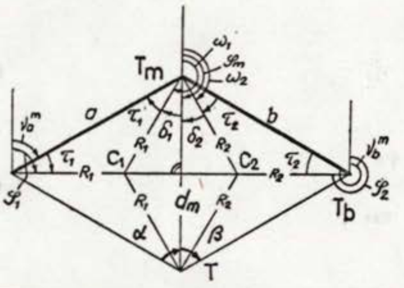
$$\alpha + \beta + (\nu_m^a - \nu_m^b) = 180^\circ \tag{25}$$

(tačka T na kružnici opisanoj oko $\triangle\, T_a\, T_m\, T_b$) nema rešenja.

РАЧУНАЊЕ ПРИБЛИЖНИХ КООРДИНАТА ПРЕСЕЦАЊЕМ НАЗАД

– МЕТОДА ЦЕНТАРА ОПИСАНИХ КРУЖНИЦА –

Скица:



Формуле:

$Y_1' = Y_a + R_1 \sin\varphi_1$ $\quad$ $X_1' = X_a + R_1 \cos\varphi_1$

$Y_1'' = Y_m + R_1 \sin\omega_1$ $\quad$ $X_1'' = X_m + R_1 \cos\omega_1$

$Y_1 = \frac{1}{2}(Y_1' + Y_1'')$ $\quad$ $X_1 = \frac{1}{2}(X_1' + X_1'')$

$Y_2' = Y_b + R_2 \sin\varphi_2$ $\quad$ $X_2' = X_b + R_2 \cos\varphi_2$

$Y_2'' = Y_m + R_2 \sin\omega_2$ $\quad$ $X_2'' = X_m + R_2 \cos\omega_2$

$Y_2 = \frac{1}{2}(Y_2' + Y_2'')$ $\quad$ $X_2 = \frac{1}{2}(X_2' + X_2'')$

$$\boxed{Y_0 = Y_m + d_m \sin\varphi_m;\; X_0 = X_m + d_m \cos\varphi_m}$$

(...5.8...) Y_a	66 134 15 8	(...5.8...) X_a	9 397 95 6	$tg\,\nu_a^m = \frac{Y_m - Y_a}{X_m - X_a}$	-0 30 0277	$tg\,\nu_b^m = \frac{Y_m - Y_b}{X_m - X_b}$	-5 08 8266
(...5.11...) Y_b	63 267 04 1	(...5.11...) X_b	7 088 33 2	ν_a^m	163 17 10	ν_b^m	101 07 07
(...5.4...) Y_m	67 050 98 8	(...5.4...) X_m	6 344 67 3	$\sin\nu_a^m$	0 28 7593	$\sin\nu_b^m$	0 98 1230
$Y_m - Y_a$	+ 916 83 0	$X_m - X_a$	-3 053 28 3	$\cos\nu_a^m$	-0 95 7753	$\cos\nu_b^m$	-0 19 2841
$Y_m - Y_b$	+3 783 94 7	$X_m - X_b$	- 743 66 8	a	3 187 96 4	b	3 856 32 4
(...2.5...) α	91 42 45	$\varphi_1 = \nu_a^m + \tau_1$	161 34 25	(...2.5...) β	117 43 41	$\varphi_2 = \nu_b^m - \tau_2$	128 50 48
$\tau_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$	- 1 42 45	$\omega_1 = \nu_m^a - \tau_1$	344 59 55	$\tau_2 = \frac{\pi}{2} - \beta$	-27 43 41	$\omega_2 = \nu_m^b + \tau_2$	253 23 26
ν_a^m	163 17 10	$2R_1 = a/\sin\alpha$	3 189 39	ν_b^m	101 07 07	$2R_2 = b/\sin\beta$	4 356 61
$\sin\alpha$	0 99 9553	R_1	1 594 70	$\sin\beta$	0 88 5166	R_2	2 178 30
$\sin\varphi_1$	0 31 6086	$\cos\varphi_1$	-0 94 8731	$\sin\varphi_2$	0 77 8827	$\cos\varphi_2$	-0 62 7238
$\Delta Y_1' = R_1 \sin\varphi_1$	+ 504 06 6	$\Delta X_1' = R_1 \cos\varphi_1$	-1 512 94 4	$\Delta Y_2' = R_2 \sin\varphi_2$	1 696 52 2	$\Delta X_2' = R_2 \cos\varphi_2$	-1 366 31 2
$Y_1' = Y_a + \Delta Y_1'$	66 638 21 5	$X_1 = X_a + \Delta X_1'$	7 885 01 2	$Y_2' = Y_b + \Delta Y_2'$	64 963 56 3	$X_2' = X_b + \Delta X_2'$	5 722 02 0
$Y_1'' = Y_m + \Delta Y_1''$	66 638 20 4	$X_1'' = X_m + \Delta X_1''$	7 885 02 3	$Y_2'' = Y_m + \Delta Y_2''$	64 693 57 4	$X_2'' = X_m + \Delta X_2''$	5 722 01 8
$\Delta Y_1'' = R_1 \sin\omega_1$	- 412 78 4	$\Delta X_1'' = R_1 \cos\omega_1$	+1 540 35 0	$\Delta Y_2'' = R_2 \sin\omega_2$	-2 087 41 4	$\Delta X_2'' = R_2 \cos\omega_2$	- 622 66 4
$\sin\omega_1$	-0 25 8842	$\cos\omega_1$	0 96 5920	$\sin\omega_2$	-0 95 8275	$\cos\omega_2$	-0 28 5846
$Y_1 = \frac{1}{2}(Y_1' + Y_1'')$	66 638 20 4	$X_1 = \frac{1}{2}(X_1' + X_1'')$	7 885 01 2	$\sin\varphi_m$	-0 79 0713	$\cos\varphi_m$	0 61 2187
$Y_2 = \frac{1}{2}(Y_2' + Y_2'')$	64 963 56 3	$X_2 = \frac{1}{2}(X_2' + X_2'')$	5 722 01 8	$\Delta Y_m = d_m \sin\varphi_m$	-2 007 41 5	$\Delta X_m = d_m \cos\varphi_m$	1 554 18 6
$Y_2 - Y_1$	-1 674 64 1	$X_2 - X_1$	-2 163 00 3	$Y_0 =$	65 043 57 3	$X_0 =$	7 898 85 0
$tg\,\nu_1^2 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$	0 77 4221	$\cos\delta_1$	0 79 5993				
ν_1^2	217 44 52	$\cos\delta_2$	0 58 2730	$Y_1 - Y_0$	1 594 63 1	$X_1 - X_0$	- 13 84 7
$\varphi_m = \frac{\pi}{2} + \nu_1^2$	307 44 52	$d_m' = 2R_1 \cos\delta_1$	2 538 73	$Y_2 - Y_0$	- 80 01 0	$X_2 - X_0$	-2 176 84 1
$\delta_1 = \omega_1 - \varphi_m$	37 15 03	$d_m'' = 2R_2 \cos\delta_2$	2 538 73	$R_1^2 = (Y_1 - Y_0)^2 + (X_1 - X_0)^2$	2543 037	$R_2^2 = (Y_2 - Y_0)^2 + (X_2 - X_0)^2$	4745 034
$\delta_2 = \varphi_m - \omega_2$	54 21 26	$d_m = \frac{1}{2}(d_m' + d_m'')$	2 538 73	R_1	1 594 69	R_2	2 178 31

Posledica: Poklapaju se centri C_1 i C_2 pa je

$$\operatorname{tg} \nu_1^2 = \frac{0}{0}$$

neodređena vrednost.

Zaključak. Izbegavati slučaj kada je

$$\alpha + \beta + (\nu_m^a - \nu_m^b) \approx 180^\circ.$$

Radi ilustracije dat je jedan primer, a računanja su prikazana u obrascu radi preglednosti, lakšeg računanja i kontrolisanja.

Primer. Date su koordinate trigonometrijskih tačaka:

△ 43 (66 134,15$_8$; 9 397,95$_6$),

△ 44 (67 050,98$_8$; 6 344,67$_3$),

△ 45 (63 267,04$_1$ 7 088,33$_2$),

i pravci opažani sa △ 40:

△ 40	△ 43	0° 00′ 00″,
	△ 44	91° 42′ 45″,
	△ 45	209° 26′ 26″.

Sračunati koordinate △ 40.