POSREDNO IZRAVNANJE SLOBODNE GEODETSKE MREŽE

*Dušan K. TOMKOVIĆ — Beograd**

SUMMARY — The article presents the classical and the generalized method of least squares. The results of the classical and the generalized method are compared in the tables (1.—7.) for the trilateration network Zuce.

1. *UVOD.* Ako za geodetsku mrežu nemamo nikakvih podataka u smislu položaja, orijentacije i razmere (sve tačke su nepoznate) tada je sistem normalnih jednačina kod posrednog izravnanja singularan. Na primer za trigonometrijsku mrežu defekt normalnih jednačina je tri (d = 3) te postoji više načina za izravnanje slobodnih mreža.

Jednačine grešaka kod posrednog izravnanja glase

$$L + V = AX \tag{1}$$

gde je

$L' = \| L_1, L_2, \ldots, L_n \|$ vektor slobodnih članova

$A_{n,m}$ matrica koeficijenata jednačina grešaka

$X' = \| X_2, X_2, \ldots, X_m \|$ nepoznati parametri koje treba proceniti

$V' = \| V_1, V_2, \ldots, V_n \|$ vektor popravaka.

Pretpostavimo da su merenja jednake tačnosti, tada matrica kovarijacije glasi

$$K_L = \sigma^2 I \tag{2}$$

gde je

σ^2 — — nepoznata dispersija merenih veličina koju treba proceniti

$I_{n,n}$ — — jedinična matrica.

Pored uslova $n > m$ postoji još jedno ograničenje

$$\operatorname{rang}(A) = m \tag{3}$$

* Adresa autora: Mr. Dušan K. Tomković dipl. inž., Republička geodetska Uprava, Beograd, Dušanova ul. 1.

Minimiziranjem sume kvadrata V′ V dobijamo nepomerene procene za nepoznate parametre

$$\hat{X} = (A'A)^{-1} A'L \tag{4}$$

Matrica kovarijacije glasi

$$K_{\hat{X}} = \sigma^2 (A'A)^{-1} \tag{5}$$

Procena dispersije σ^2 vrši se po formuli

$$m^2 = \frac{V'V}{n - \text{rang}(A)} \tag{6}$$

Dobijena procena m^2 dozvoljava da se odredi nepomerena procena za matricu kovarijacije (5.) stavljajući umesto σ^2 statistiku m^2.

2. *GENERALIZOVANI METOD.* U mnogim slučajevima (analiza eksperimenata, izravnanje slobodnih geodetskih mreža) imamo da je

$$\text{rang}(A) < m \tag{7}$$

U tom slučaju procena parametara $x_1, x_2, \ldots, x_m$ nije jedinstvena jer A′ A nema inverznu matricu. Za rešenje ovog slučaja postoje dva načina:

1. redukcija nepoznatih
2. postavljanje novih dopunskih ograničenja nepoznatim parametrima i njihovim procenama.

Za 1. način možemo reći da je to već prihvaćeni način izravnanja slobodnih geodetskih mreža. Određenom broju nepoznatih parametara dajemo vrednosti tj. definišemo spoljne parametre mreže (položaj, orijentacija i razmera) da bi izbegli singularnost normalnih jednačina. Na primer kod slobodne nivelmanske mreže: jednom reperu dajemo nadmorsku visinu da bi otklonili defekt normalnih jednačina (d = 1).

Kod 2. načina imamo više pristupa i u zavisnosti od ciljeva eksperimenta odabiraju se novi uslovi za nepoznate parametre. Metod koji se koristi u geodeziji (Bjerhammar, Mittermayer i dr.) sastoji se u tome da pored uslova V′ V = min za nepoznate parametre postavljamo uslov

$$X'X = \min \tag{8}$$

koji dovodi do jedinstvenosti procena za parametre $X_1, X_2, \ldots, X_m$. Uslov 7. daje sledeća rešenja

$$\hat{X}_G = N(NN)^{-1} R \tag{9}$$

$$Q_{\hat{X}_G} = (NN)^{-1} N (NN)^{-1} N \tag{10}$$

gde e:

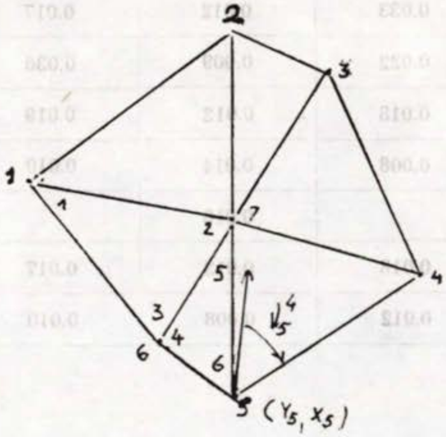
N = A′ A

R = A′ L

3. *PRIMER.* Izravnata je slobodna geodetska mreža sa izmerenim stranama (sl. 1) koja je razvijena kao geodetska osnova za eksperiment »Prilog ispitivanju tehnologije i metodologije izrade planova u krupnim razmerama fotogrametrijskom metodom«. Jedna osobenost ove mreže je da ima-

mo veći broj nepoznatih od broja merenja (broj merenih strana je 12 a nepoznatih 14) ali defekt normalnih jednačina je tri te možemo izvršiti izravnanje i ocenu tačnosti.

Mreža je izravnata na oba načina (klasičan i generalizovani) i dobijeni rezultati dati su u tabelama 1.—7.



Sl. 1

Tabela 1. — Razlike koordinata

Br. tačke	1	2	3	4	5	6	7
$(\hat{Y}_K - \hat{Y}_G)_{mm}$	1	—18	—9	0	11	8	0
$(\hat{X}_K - \hat{X}_G)_{mm}$	—34	—24	—16	—3	—16	—22	—20

Tabela 2. — Vrednosti glavne dijagonale matrice $Q_{\hat{X}}$

Br. tačke	$Q_{\hat{X}}$ (K)	$Q_{\hat{X}}$ (G)	$Q_{\hat{Y}}$ (K)	$Q_{\hat{Y}}$ (G)
1	6.584	0.767	1.636	0.540
2	2.700	0.478	7.385	0.988
3	1.860	0.883	2.078	1.220
4	0.374	1.081	0.573	0.477
5		0.637		0.624
6	1.962	0.964	1.665	0.728
7	0.766	0.399	0.530	0.437

Tabela 3. — Vrednosti procene stupnja devijacije nepoznatih

Br. tačke	$M_{\hat{X}}$ (K)	$M_{\hat{X}}$ (G)	$M_{\hat{Y}}$ (K)	$M_{\hat{Y}}$ (G)
1	0.033	0.012	0.017	0.010
2	0.022	0.009	0.036	0.013
3	0.018	0.012	0.019	0.015
4	0.008	0.014	0.010	0.009
5		0.010		0.010
6	0.018	0.013	0.017	0.011
7	0.012	0.008	0.010	0.009

Tabela 4. — Vrednosti položajnih gre.aka

Br. tačke	1	2	3	4	5	6	7
M_P (K)	0.038	0.042	0.026	0.013		0.025	0.015
M_P (G)	0.015	0.016	0.019	0.016	0.015	0.017	0.012

Tabela 5. — Vrednosti izravnatih elemenata mreže

Strane			Uglovi						
Strana	K	G	Br. ugla	K			G		
1—6	830.545	830.545	1	71	00	19.6	33	00	19.7
1—7	850.407	850.407	2	33	12	48.4	71	12	48.1
5—6	346.794	346.795	3	75	46	52.0	75	46	52.2
5—7	665.994	665.995	4	106	38	29.2	106	38	29.6
6—7	477.872	477.873	5	29	55	39.6	29	55	39.7
			6	43	25	51.2	43	25	50.7

Tabela 6. — Vrednosti procena stupnja devijacija izravnatih uglova

Ugao	$m_{\hat{\alpha}}$ (K)	$m_{\hat{\alpha}}$ (G)
1	3".6	3".6
2	10".6	10".6
3	7".1	7".1
4	16".0	16".0
5	6".8	6".8
6	6".9	6.".9

4. *ZAKLJUČAK.* Kod klasičnog izravnanja ove mreže date su koordinate tačke 5 i direkcioni ugao strane 5—4. Ovo izravnanje je dalo velike srednje greške za nepoznate ali srednje greške za X_5 i Y_5 su jednake nuli. Kod generalizovanog metoda izravnanja sve koordinate su nepoznate i mreža se uklapa na svoje približne koordinate. Srednje greške nepoznatih su manje nego kod klasičnog izravnanja. Međutim, elementi izravnate mreže (uglovi i strane) su isti (tabela 5). Srednje greške ovih elemenata su iste kod oba načina izravnanja (tabele 6i 7).

Tabela 7. — Vrednosti procena stupnja devijacija izravnatih strana

Strana	$m_{\hat{s}}$ (K)	$m_{\hat{s}}$ (G)
1—6	0.0126	0.0126
1—7	0.0123	0.0123
5—6	0.0125	0.0125
5—7	0.0124	0.0124
6—7	0.0129	0.0129

LITERATURA

1. Кендалл, М., Стьюарт, А.: Статистические выводы и связы, Москва 1973.
2. Kullback, S.: Information Theory and Statistics, New York 1968.
3. Mihailović, K.: Apsolutne i relativne greške traženih veličina u lokalni mmrežama, Zbornik Geodetskog instituta br. 14., Beograd 1973.
4. Mittermayer, E.: Zur Ausgleichung freier Netze, ZfV, 11/1972.
5. Шеффе, Г.: Дисперсчинный анализ, Москва 1963.
6. Wolf, H.: Korrelierte Beobachtungen in der Triangulierung, ZfV 1/1975.