

# RAČUNANJE PROSTE ARITMETIČKE SREDINE I SREDNJE POGREŠKE POJEDINOG MJERENJA DŽEPNIM ELEKTRONIČKIM RAČUNALOM HP-45

Miljenko Solarić — Zagreb\*

## UVOD

Pred godinu dana tvornica Hewlett-Packard pustila je na tržište malo džepno elektroničko računalo HP-45, koje je detaljnije opisano u referatu [2]. Ovo džepno elektroničko računalo pored niza odličnih osobina ima mogućnost računanja proste aritmetičke sredine i srednje pogreške pojedinog mjerenja iz kojih se računa aritmetička sredina.

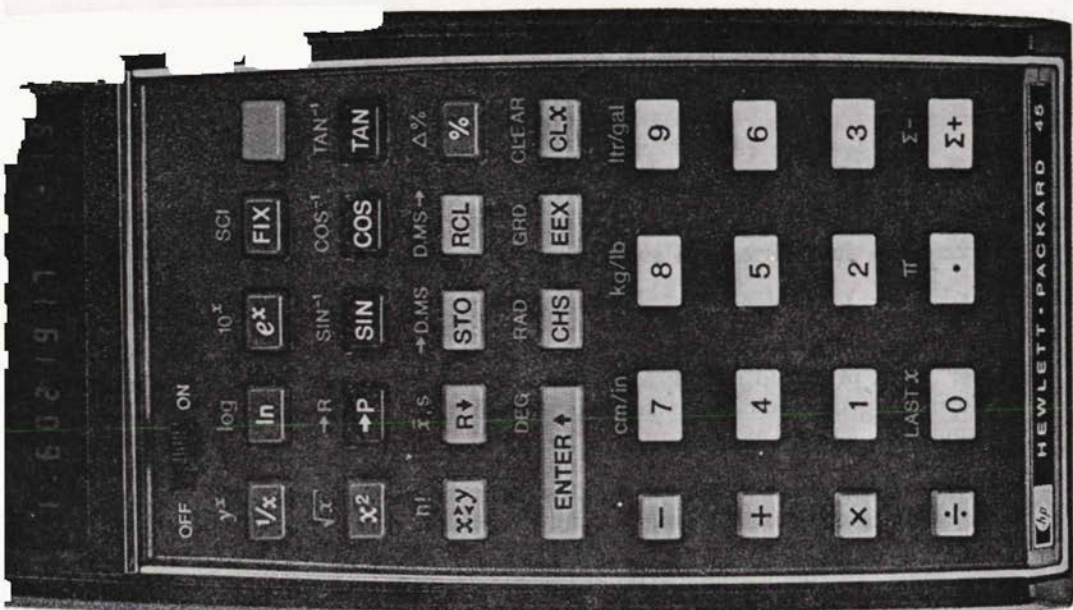
Postupak pri računanju proste aritmetičke sredine i srednje pogreške pojedinog mjerenja s tim džepnim elektroničkim računalom je slijedeći: Svaki ulazni podatak (mjerenje iz kojeg se računa aritmetička sredina) mora se upisati na ekranu x registra i potom ubaciti u memoriju kompjutera pomoću tako zvane »statističke tipke«  $\frac{\Sigma-}{\boxed{\Sigma+}}$ . Poslije svakog ubačenog podatka u memoriju na ekranu se pokaže broj već ubačenih mjerenja. Kad se ubace u memoriju sva mjerenja tada se pritiskom samo na tako zvanu »zlatnu tipku« (žute boje) i tipku  $\frac{\bar{x}, s}{\boxed{R \downarrow}}$  ispíše na ekranu vrijednost proste aritmetičke sredine svih ubačenih vrijednosti mjerenja. Ako se želi znati i srednja pogreška pojedinog mjerenja dobit ćemo ju ispisanu na ekranu x registra njenim spuštanjem iz radnog registra y pritiskanjem samo jedne jedine tipke  $\boxed{x \leq y}$  ili  $\boxed{R \downarrow}$ .

Za sva ova računanja džepno elektroničko računalo koristi automatski samo četiri tako zvane »adresirajuće memorije« i to registar 5, 6, 7 i 8.

Nas geodete ne čudi što ovo džepno elektroničko računalo može izračunati prostu aritmetičku sredinu pritiskanjem samo »zlatne tipke« i  $\frac{\bar{x}, s}{\boxed{R \downarrow}}$  poslije toga što su ubačeni svi podaci mjerenja, jer kako znamo ona se računa po jednostavnoj formuli

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{[x_i]}{n} \quad (1)$$

\* Adresa: autora dr Miljenko Solarić dipl. ing., Geodetski fakultet, Zagreb Kačićeva 26



Sl. 1.

gdje je:

$\bar{x}$  — prosta aritmetička sredina

$x_i$  — svako pojedino mjerenje

$n$  — broj svih mjerenja iz kojih se računa opća aritmetička sredina

Međutim, zadivljuje nas ustvari što džepno elektroničko računalo HP-45 može s tako malom memorijom izračunati srednje pogreške pojedinog mjerenja jer — kako znamo — one se računaju po formuli:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v_i v_i]}{n-1}} \quad (2)$$

gdje su:

$v_i$  — najvjerojatnije pogreške, koje su jednake razlici  $\bar{x} - x_i$  (tj. aritmetička sredina minus opažana vrijednost)

$n$  — broj svih mjerenja iz kojih se računa ritmetička sredina

$m$  — srednja pogreška pojedinog mjerenja\*

Ako bi računali srednju pogrešku po formuli (2) tada bi za njenu primjenu mjerenja morali memorirati da bi poslije računanja proste aritmetičke sredine mogli naći razliku  $\bar{x} - x_i = v$ .

\* U našoj literaturi srednja pogreška pojedinog mjerenja obično se označava s »m«, a na džepnom elektroničkom računalo ona je označena sa »s«.

Da bi se uštedilo na relativno maloj memoriji džepno elektroničko računalo HP-45 računa srednju pogrešku pojedinog mjerenja koje je ušlo u prostu aritmetičku sredinu po formuli

$$m = \pm \sqrt{\frac{1}{n-1} \left( [x_i x_i] - \frac{[x_i]^2}{n} \right)} \quad (3)$$

gdje su:

$[x_i x_i]$  — suma kvadrata svih mjerenja

$[x_i]^2$  — kvadrat sume svih mjerenja

Mi geodeti nismo naučili na računanje srednje pogreške ovim načinom, jer je on prije bio neprikladan. To je razlog radi čega ne možemo naći ovu formulu u udžbenicima iz računa izjednačenja, a ako je i navode tada je, ne upotrebljavaju. Tako na primjer u knjizi Prof. W. Weitbrechta »Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate« I Teil, str. 28 u izdanju poznate zbirke »Sammlung Göschen« doslovce piše za formulu (4) »Ova je jednadžba praktički neupotrebljiva« (»Diese Gleichung ist praktisch nicht verwertbar«). Lako se dade, međutim, pokazati da su formule (2) i (3) ekvivalentne.

#### DOKAZ

Polazeći od formule da je  $v_i = \bar{x} - x_i$ , tj. da je  $v_i v_i = (\bar{x} - x_i)^2$  bit će:

$$v_1 v_1 = \bar{x}^2 - 2 \cdot \bar{x} \cdot x_1 + x_1^2$$

$$v_2 v_2 = \bar{x}^2 - 2 \cdot \bar{x} \cdot x_2 + x_2^2$$

⋮

$$v_n v_n = \bar{x}^2 - 2 \cdot \bar{x} \cdot x_n + x_n^2$$

a poslije izvršenog zbrajanja dobit će se da je suma kvadrata pogrešaka jednaka:

$$[v_i v_i] = n \cdot \bar{x}^2 - 2 \cdot \bar{x} \cdot [x_i] + [x_i x_i]$$

Budući da je

$$\bar{x} = \frac{[x_i]}{n}$$

bit će

$$[v_i v_i] = n \cdot \bar{x} \frac{[x_i]}{n} - 2 \bar{x} [x_i] + [x_i x_i]$$

tj.

$$[v_i v_i] = [x_i x_i] - \frac{[x_i]^2}{n} \quad (4)$$



Uvrstivši formulu (4) u jednadžbu (2) dobit će se formula (3), tj. dokazano je da su formule (2) i (3) ekvivalentne.

## NAČIN RADA

Objasnimo još ukratko način na koji džepno elektroničko računalo HP-45 praktično računa prostu aritmetičku sredinu i srednju pogrešku pojedinog mjerenja.

Kad se je pojedina vrijednost mjerenja upisala na ekranu x registra i ubacila u memoriju pomoću »statističke tipke«  $\frac{\Sigma -}{\Sigma +}$  tada računalo izvrši automatski slijedeće operacije:

- 1) U adresirajućem registru 5 upiše se automatski broj do tada unešenih podataka mjerenja i ujedno to ispiše na ekranu x registra.
- 2) Suma kvadrata svih ubačenih veličina u radni registar »x« upisuje se u adresirajućem registru 6.
- 3) Sve veličine unešene u radni registar x sumiraju se u adresirajućem registru 7.
- 4) Suma svih vrijednosti upisanih u radnom registru y upiše se u adresirajućem registru 8.

(Suma svih vrijednosti upisanih u radnom registru y ne koristi se pri računanju srednje pogreške. Ova suma može se odlično koristiti pri istovremenom zbrajanju koordinata x i y ili pri zbrajanju vektora.)

Po unošenju svih vrijednosti iz kojih se želi izračunati aritmetička sredina stisne se »zlatna tipka« i tipka  $\frac{\bar{x}, s}{R \downarrow}$ . Tada će džepna elektroničko računalo HP-45 samo automatski izračunati po formuli (1) aritmetičku sredinu ( $\bar{x}$ ), kao i srednju pogrešku pojedinog mjerenja (s) po formuli (3), koristeći pri tome samo memorirane vrijednosti za proizvoljno odabrani veliki broj mjerenja u adresirajućim registrima 5, 6 i 7.

Ukoliko se želi izračunati i srednja pogreška proste aritmetičke sredine treba se samo iz adresirajućeg registra 5 pozvati broj upisanih veličina (n) iz kojih se izračunala aritmetička sredina, izvaditi drugi korijen od tog broja i razdijeliti srednju pogrešku pojedinog mjerenja s tim brojem, tj. izračunati je po formuli:

$$M = \pm \frac{m}{\sqrt{n}} \quad (5)$$

gdje je M srednja pogreška aritmetičke sredine, a ostale oznake imaju isto značenje kao i u prethodnim formulama.

Najlijepše se zahvaljujem prof. dr N. Čubranić, prof. dr L. Randić i Doc. dr K. Čolić što su pročitali ovaj članak i dali mi korisne savjete.

## Literatura

- [1] Čubranić, N.: Teorija pogrešaka s računom izjednačenja, Tehnička knjiga, Zagreb, 1967.
- [2] Solarić, M.: Primjena džepnih elektroničkih računala u geodeziji, Zbornik radova Komisije za automatizaciju Saveza geodetskih inženjera i geometara Hrvatske, Svezak 1, 1974.
- [3] Hewlett-Packard Company, Owner's Handbook HP-45, 1973.
- [4] Hewlett-Packard Company, Quick Reference Guide HP-45, 1973.