TOČNIJI POSTUPAK IZRAČUNAVANJA TOPOGRAFSKE KOREKCIJE SILE TEŽE I TOPOGRAFSKOG OTKLONA VERTIKALE

*Krešimir ČOLIĆ — Zagreb**

Posvećeno mojim cijenjenim učiteljima prof. N. Čubranić povodom 70. rođendana i prof. H. Wolf povodom 65. rođendana.

Sumamry: For the computation of the vertical and horizontal gravitational attraction due to topographic masses a new procedure is proposed. It consists of the introduction of special weight — factors to be calculated from ratios of the gravitation for selected prisms. The new method can be used for gravity- reductions for topographic deflections of the vertical and for all types of integral transformations of phenomena with irregular surface representation, like gravity-anomalies etc. — This paper has two parts and includes first of all some supplements from the paper (Čolić 1975a).

Zusammenfassung: Ein Verfahren zur Berechnung von der vertikalen und horizontalen Anziehungswirkung der topographischen Massen wird dargestellt. Er besteht in der Einführung von speziellen, aus dem Verhältnis der Wirkungen ausgewählter Prismen berechneten Gewichtsfaktoren. Die neue Methode kann für die Schwerereduktionen, für die topographische Lotabweichungen und für alle Typen von Integraltransformationen der Phänomene mit unregulärer Flächen-Repräsentationen verwendet werden, z. B. Schwereanomalien usw. — Dieser Artikel ist in zwei Teile unterteilt und beinhaltet vor allem einige Ergänzungen zum Artikel (Čolić 1975a).

Sažetak:

Prikazuje se jedan postupak za izračunavanje vertikalnog i horizontalnog privlačnog djelovanja topografskih masa. On se sastoji u uvođenju posebnih težinskih faktora izračunatih iz odnosa privlačenja odabranih prizama. Nova metoda se može primjeniti za redukcije sile teže, za topografske otklone vertikala te za sve tipove integralnih transformacija fenomena s neregularnom površinskom reprezentacijom, npr. anomalije sile teže itd. — Ovaj članak podjeljen je u dva dijela i sadrži prije svega izvjesne dopune članku (Čolić 1975a).

Prvi dio članka sadrži prošireni prikaz teorijskih postavki te načina praktičnog određivanja težinskih faktora. U drugom dijelu je na primjere numeričkog izračunavanja vertikalne komponente privlačenja pridodan i osvrt na primjenu novog postupka u tzv. bliskom području oko stajališta (točke računanja).

Detaljnije razmatranje ovog posljednjeg problema kao i utvrđivanje pogodne zonalne podjele topografskih masa za kompjutorsko izračunavanje topografske korekcije sile teže odnosno topografskog otklona vertikale (težišnice) ostaju predmetom drugih radova.

---

*Adresa autora: Doc. dr. inž. Krešimir Čolić Zagreb, Geodetski fakultet — Kačićeva 26

1. UVOD

Neka su u diskretnim točkama fizičke površine Zemlje utvrđeni direktnim gravimetrijskim mjerenjima iznosi ubrzanja sile teže g^*, a pomoću astronomskih opažanja određene (uz korištenje geodetskih koordinata stajališta) veličine komponenata astro — geodetskog otklona ve tikale $\Theta^*_{0} = \xi^*$ i $\Theta^*_{90°} = \eta^*$.

Tada se običava ove vrijednosti — u cilju iskorištenja u njima postojećeg informacionog sadržaja — usporediti s drugim korespondirajućim vrijednostima g odnosno ξ i η, koje se mogu izračunati iz privlačnog djelovanja topografskih masa. Kako se u ovim izračunavanjima uvode izvjesne pretpostavke o rasporedu topografskih masa odnosno njihovoj gustoći σ, to se iz usporedbe dobivenim razlikama $g^* - g$ odnosno $\Theta^*_A - \Theta_A$ (A je azimut) ispituje i mjeri koliko se dobro uzeta hipoteza poklapa sa stvarnošću (Čolić 1975a). Ovdje vrijede izrazi:

$$g = \gamma(H_0) + \delta g(H_0) - \delta g \quad \text{gdje je} \quad \delta g = f \int_E \frac{dm}{e^3}(H - H_0) \tag{1}$$

Odnosno

$$\xi = \frac{f\rho}{G}\int_E \frac{dm}{e^3}(x - x_0) \quad \text{i} \quad \eta = \frac{f\rho}{G}\int_E \frac{dm}{e^3}(y - y_0) \tag{2}$$

u kojima: δg = korekcija za reljef, f gravitaciona konstanta, dm element topografskih masa, H ortometrijska visina, x i y koordinate u sustavu orjentiranom prema sjeveru i istoku, je prostorna udaljenost stajališta A_0 (x_0, y_0, H_0) od tzv. pomične (izvorne točke Q (x, y, H, dm), $\gamma(H_0)$ normalna sila teža u nivou stajališta, $\delta g(H_0)$ uobičajena Bouguerova redukcija za ploču, E cjelokupna Zemljina površina, G prosječna vrijednost sile teže na Zemljinoj površini.

Pri numeričkim izračunajavanjima integrali u (1) i (2) se moraju zamjeniti s konačnim sumama, a umjesto diferencijalnih masa dm pojavljuju se konačne mase Δm. Pri tome, dakako, nastaju pogreške koje su to značajnije što je odabrana podjela u Δm grublja i što se Δm više približavaju stajalištu i vrijednosti za e postaju sve manje. U nastavku se prikazuje postupak kojim se — i za grublju Δm-podjelu — ove integracine pogreške po mogućnosti zadržavaju dovoljno malima.

2. POLAZNE RELACIJE

Neka je fizička površina Zemlje — kao gornja granična ploha topografskih masa — prikazana jednadžbom za visinu

$$H = F(x, y) \tag{3}$$

Tada pri rješavanju integrala u (1) i (2) putem numeričke kvadrature treba funkciju (3) aproksimirati u pojedinim njenim dijelovima pomoću analitičke funkcije

$$h = f_u^!(x, y) \tag{4}$$

Drugim riječima, unutar svakog od konačnih tlocrtnih elemenata $\Delta F = \Delta x \cdot \Delta y$ se visina određuje približnom funkcijom (4). Indeks *u* upućuje na broj

u nepoznatih parametara (konstanti), kojima je opisana funkcija (4). Sa $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta h = h - H_0$ izraz

$$\int_{\Delta x} \int_{\Delta y} \int_{\Delta h} \sigma h \, dx \, dy = \Delta m \tag{5}$$

predstavlja masu uspravne prizme iznad ΔF. Ona je ispunjena zahvaćenim topografskim masama, gustoće $\sigma = \sigma$ (y, x), jer je odozgo omeđena aproksimirajućom funkcijom (4) a donja joj se baza nalazi na visini H_0 stajališta. Koliko se veliki ΔF mogu pri tome odabrati ovisi prvenstveno od oblika promatranog reljefa. Obično se unutar jedne prizme stavlja konstantna gustoća, a nerijetko i za sve obuhvaćene topografske mase. Znatno ispravnije je — a praktički moguće — uzeti u obzir i varijacije gustoće topografskih masa (Vajk 1956), (Čolić 1971).

Parametri u za funkciju (4) određuju se kao nepoznanice po teoriji najmanjih kvadrata (Wolf 1968) uz uvjet

$$\int_{\Delta x} \int_{\Delta y} p(x, y) \{\phi(H) - \phi(h)\}^2 \, dx \, dy = \text{minimum} \tag{6}$$

pri čemu valja prema prednjem područje integracije ΔF pogodno odabrati. p (x, y) je težinska funkcija; u dosadašnjim promatranjima ona je u pravilu uzimana jednaka 1.

Kakvoća aproksimiranja funkcije H s pomoćnom funkcijom h može se promijeniti odnosno poboljšati s jedne strane preko broja u nepoznanica a s druge strane izborom tipa funkcije za $\Phi(H)$ odnosno za $\Phi(h)$. (Wolf 1974 i 1975). Može se uzeti na pr.:

ili a) $\Phi(H) = H$ odnosno $\Phi(h) = h = f_u(x, y)$ (7a)

ili b) $\Phi(H) = H^2$ odnosno $\Phi(h) = h^2 = f_u(x, y)$ (7b)

Do sada su se ipak primjenjivali uglavnom slijedeći posebni slučajevi:

1) $h = f_u(x, y)$ je rotaciona ploha (s $\Phi(H) = H$, $\Phi(h) = h$), vidi (Pick 1963), (Jakubcova 1966)

2) $h = f_u(x, y)$ je ploha izražena pomoću polinoma (s $\Phi(H) = H$, $\Phi(h) = h$) vidi (Koch 1966);

3) $h = f_u(x, y)$ je kosa (zakošena) ravnina $h = h' + Ax + By$ (s $\Phi(H) = H$, $\Phi(h) = h$) gdje je $u = 3$, nepoznanice su h', A i B, vidi na pr. (Kane 1962). (Koch 1965 a, b), (Nemcov 1967),

4) $h = f_u(x, y)$ je horizontalna ravnina $h = \bar{h}$ (s $\Phi(H) = H$, $\Phi(h) = h$), gdje je $u = 1$, jedina nepoznanica je $\bar{h}$.

Prva tri načina su korištena više u izračunavanju topografske korekcije sile teže, dok u određivanju topografskog otklona težišnice gotovo i nisu bila primjenjivana. U sva četiri slučaja pojavljuje se u pravilu samo linearni tip funkcije (7a).

Najčešće je upotrebljavana četvrta mogućnost kao najjednostavnija aproksimacija reljefa matematičkim (geometrijskim) modelom[1]. On je i ovdje sačinjen od prizama — prvenstveno pravokutnih odnosno kvadratičnih baza — ali odozgo omeđenih horizontalnim ravninama, vidi na pr. (Bott. 1956), (Carrozzo 1966), (Ehrismann (1966), (Čolić 1971), Koch 1967).[2]

Prema pravilima izjednačenja za direktna opažanja (Čubranić 1967), (Wolf 1968) pri p = 1 dobiva se nepoznanica $\bar{h}$ putem jednostavne srednje vrijednosti

$$\bar{h}_k = (\sum_i H_i^{(k)})/n_k \tag{8}$$

gdje je k broj odnosnog odjeljka (ili prizme), H_i^k su u njemu postojeće — ukupnog broja n_k — visine diskretnih točaka Q_i.

Nadalje mora biti prema istim pravilima računa izjednačenja:

$$\sum_i v_i^{(k)} = \sum_i (\bar{h}_k - H_i^{(k)}) = 0 \tag{9}$$

Uobičajilo se ovu relaciju predočavati kao »transport masa«, tj. »pozitivne« mase (s pozitivnima v_+) se izjednačuje upravo »negativnim« masama (s negativnima v_-), jer horizontalna ravnina dolazi na visinu koja je prosta aritmetička sredina visina u odnosnoj prizmi.

3. POGREŠKA δW

Zbog ovog »pomicanja« masa mijenjaju se naravno i privlačna djelovanja naposе na blisko postavljena stajališta, pa nastaju pogreške u izračunatim vrijednostima topografske sile teže (korekcije) odnosno topografskog otklona vertikale (Čolić 1971). Iznosi ovih pogrešaka ovise o nagibima reljefa kao i o geomterijskom položaju tzv. pomične točke u odnosu na stajalište.

Ako je neki dio topografskih masa razdijeljen u niz pravilnih tijela-prizama (k = 1, 2, 3, . . ., N) pojavljuju se na slijedeći način označena privlačna djelovanja:

W = djelovanje tijela omeđenog s graničnom plohom $H = F(x, y)$, tj. djelovanje **prije** transporta masa,

$\overline{W} = \sum_k \overline{W}_k$ = djelovanje tijela omeđenog s plohom $h = f_u(x, y)$ iznad iste osnovice (baze), tj. djelovanje **poslije** transporta masa.

Tada izraz

$$\delta W = W - \overline{W} \tag{10}$$

daje iznos pogreške nastale kao posljedica supstitucije funkcije H s funkcijom h, tj. pogreške nastale zbog »transporta masa«. Ova pogreška će biti to manja što je plošna aproksimacija s h bolje uspjela. Međutim, lako se može pokazati

[1] Dalja pojednostavljenja nastaju npr. u zanemirivanju spljoštenosti Zemlje i ispuštanju utjecaja masa dalekih zona. S druge strane pri primjeni kosih ravnina u blizini stajališta treba paziti da se one bez skokova nastavljaju jedna na drugu, što se u izvjesnim okolnostima može postići samo iterativnim računanjima.

[2] Za sva četiri slučaja nabrojeni su — od nekoliko desetaka postojećih samo neki izvori literature, koji nude pogodnija rješenja uz moguću primjenu elektroničkih računala.

(Makarov 1968) da je δW u blizini nekog stajališta — pri nagibu reljefa jasno različitim od nule — uvijek istog predznaka, pa su »ima vrijednosti« W uvijek nešto manjeg iznosa od »treba vrijednosti« W i to bez obzira da li se odnosno stajalište nalazi u udolini ili na padini ili pak na uzvisini odnosno njenom vrhu.

Zbog stalnog sumiranja iznos ovih pogrešaka se ne može zanemariti napose u blizini samog stajališta (točke računanja).

4. PRIKAZ METODE TEŽINSKIH FAKTORA

Nasuprot prijedlogu Jaroš-a (Nemcov 1967) s uvođenjem težina ovdje se postupa na slijedeći način:

Topografske mase se rastavljaju u pojedinačne uspravne prizme; neka one imaju kvadratičnu bazu (stranice a) i dobivaju naziv **»osnovne prizme«.** Ako sada **zamislimo** (!) da je svaka od ovih osnovnih prizama broj k sastavljena od n **»parcijalnih prizama«,** ove će pomoćne prizme nositi dvostruki indeks (i, j) prema koordinatama svojih baza u rasterskoj mreži.

Nadalje se upotrebljavaju oznake:

W_k (odnosno $\overline{W}_k$) za privlačna djelovanja osnovnih prizama izračunata s egzaktnima H (odnosno s približnima h)

$w_{ij}^{(k)}$ (odnosno $\overline{w}_{ij}^{(k)}$) za privlačna djelovanja parcijalnih prizama broj (i, j) izračunata s egzaktnima H (odnosno s približnima h), pri čemu vrijedi u potpunoj strogosti za svaku prizmu: $W_k = \sum_i \sum_j w_{ij}^{(k)}$

Sada uvodimo **novi uvjet identiteta:** Mora biti ispunjeno

$$\sum_i \sum_j w_{ij}^{(k)} \approx \sum_i \sum_j \overline{w}_{ij}^{(k)} \tag{11}$$

Definirajmo još kvocijente

$$\frac{w_{ij}^{(k)}}{W_k} \approx \frac{\overline{w}_{ij}^{(k)}}{\overline{W}_k} = p_{ij}^{(k)} \tag{12}$$

koji opravdano dobivaju naziv težinskih koeficijenata. Sumacijom težinskih koeficijenata $p_{ij}^{(k)}$ parcijalnih prizama unutar po jedne osnovne prizme k dobiva se zbog (11):

$$\sum_i \sum_j p_{ij}^{(k)} = 1 \tag{14}$$

pa je to kontrolna jednadžba za određivanje p_{ij}.

Ove veličine p_{ij} sada služe kao težine (ili težinski faktori) u određivanju aproksimirajuće funkcije h za stvarnu — ali neanalitičku — funkciju H gornje granične plohe topografskih masa, rastavljenih u niz osnovnih prizama. U ovu svrhu koristimo naprijed istaknuti uvjet minimuma (6). Pri tome valja promatrati prema (7a) i (7b) oba tamo naznačena tipa funkcije, tj.

$$\text{a)}\quad \Phi(H) = H \quad \text{odnosno} \quad \Phi(h) = h \tag{15a}$$

$$\text{b)}\quad \Phi(H) = H^2 \quad \text{odnosno} \quad \Phi(h) = h^2 \tag{15b}$$

i ispitati kakvoću postignutih prikaza funkcije H pomoću analitičke funkcije h.

Zadržimo li se sada na jednostavnoj aproksimaciji s $u = 1$, tada prema pravilima računa izjednačenja (Wolf 1968) slijedi

a) za slučaj $\Phi(H) = H$

$$h = \overline{h_k} \qquad \text{gdje je } \overline{h_k} = \sum_i \sum_j p_{ij}^{(k)} \cdot H_{ij}^{(k)} \tag{16a}$$

b) za slučaj $\Phi(H) = H^2$

$$h^2 = \overline{h_k^2} \qquad \text{gdje je } \overline{h_k^2} = \sum_i \sum_j p_{ij}^{(k)} \cdot (H_{ij}^{(k)})^2 \tag{16b}$$

ili za $\overline{h_k}$ izraz:

$$\overline{h_k} = \sqrt{\sum_i \sum_j p_{ij}^{(k)} \cdot (H_{ij}^{(k)})^2}$$

Što je više parcijalnih prizama broj (i, j) u svakoj osnovnoj prizmi broj k to se bolje mogu približiti h na H, pa će točnije biti ispunjen uvjet identiteta (11). Visine određene prema (16) dobivaju novi naziv: *korigirane visine* h_k.

Kada su ovim postupkom određene korigirane visine $\overline{h}_k$ za osnovne prizme, mogu se izračunati definitivne vrijednosti topografske korekcije sile teže, odnosno velčine topografskih otklona vertikale (težišnice).

Međutim, nakon uvođenja težinskih faktora p_{ij}, ne može se više govoriti o nekom »transportu masa« ili »izjednačenju masa«. Štoviše sada prema pravilima računa izjednačenja vrijede slijedeće nul-relacije (Čubranić 1967), (Wolf 1968; 1974 i 1975):

a) pri primjeni (15a): $$\sum_i \sum_j p_{ij}^{(k)} (H_{ij}^{(k)} - \overline{h_k}) = 0 \tag{17a}$$

b) pri primjeni (15b): $$\sum_i \sum_j p_{ij}^{(k)} ((H_{ij}^{(k)})^2 - \overline{h_k^2}) = 0 \tag{17b}$$

koje se više ne mogu interpretirati kao jednadžbe izjednačenja masa.

U dokaz tvrdnji da osim visina valja uzeti u promatranje i kvadrate visina kao funkcije $\Phi(H)$ odnosno $\Phi(h)$, tj. da se pored $\Phi(H) = H$ može, a ponekad čak mora odabrati $\Phi(H) = H^2$, već će dovljno poslužiti poznata formula za izračunavanje korekcije (popravke) za reljef δg u cilindričnim koordinatama r i α (radiusvektor i azimut). Ova formula vrijedi u ogromnoj većini slučajeva kada su visinske razlike sektorskih tijela u odnosu na stajalište manje od njihovih udaljenosti od stajališta, a bazira se na činjenici da vertikalno privlačenje δg raste uglavnom proporcionalno sa h^2, tj. s kvadratom visine. Uz oznaku $n\alpha$ za broj sektora unutar svakog od cilindričnih prstena (visina stajališta stavljena nula) ona glasi, vidi na pr. (Baeschlin 1948), (Jung 1961), (Klak 1962),

$$\delta g = \sum_l \sum_m \frac{f\pi\sigma}{n_\alpha} \left(\frac{1}{r_{l+1}^2} - \frac{1}{r_l^2} \right) h_{lm}^2 = \sum \sum c_l \, h_{lm}^2 \tag{18a}$$

Samo za umjereno miran teren može se ona ipak — prema zakonu srednje vrijednosti — približiti odnosno zamjeniti srednjom linearnom funkcijom

$$\delta g = \sum_l \sum_m \overline{c_l} \, h_{lm} \tag{18b}$$

Nasuprot tome, za komponente otklona vertikale (horizontalna privlačenja) pojavljuje se — već zbog same prirode stvari — jedna praktički linearna zavisnost (Jordan-Eggert 1941), (Čubranić 1974):

$$\left.\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}\right\} = \sum_{l}\sum_{m} \frac{3\pi\,DR}{4\rho\sigma} \begin{Bmatrix}(\sin\alpha_m - \sin\alpha_{m-1})\\ (\cos\alpha_{m-1} - \cos\alpha_m)\end{Bmatrix} \ln\frac{r_{l+1}}{r_l}\, h_{lm} = \sum_{l}\sum_{m} \begin{Bmatrix}K_{lm}^{(\xi)}\\ K_{lm}^{(\eta)}\end{Bmatrix} h_{lm} \tag{19}$$

pa je primjena (16a) ovdje opravdana.

U formulama (18) i (19) su: r_l, r_{l+1} = granični (unutarnji i vanjski) radiusi cilindričnih prstena; d_m, d_{m-1} = azimuti graničnih vertikalnih ravnina svakog sektora. D srednja gustoća Zemljinih masa, a R srednji Zemljin radius, dok je h_{lm} srednja (prosječna) visina pojedinog sektora.

5. PRAKTIČNO ODREĐIVANJE TEŽINSKIH FAKTORA

Praktično određivanje težinskih faktora predstavlja pripremu za primjenu predložene metode. Težinski faktori $p_{ij}^{(k)}$ (gornji indeks (k) ispuštamo u daljnjem tekstu jer se uvijek radi o po jednoj osnovnoj prizmi) izračunavaju se prema izrazu (12) iz privlačnog djelovanja promatrane osnovne prizme i privlačnih djelovanja njezinih parcijalnih prizama i to u odnosu na isto čvrsto stajalište (fiksnu točku računanja). U praktičnom postupku određivanja valja razlikovati posebne slučajeve, ali isto tako međusobno nadovezajuće faze u izračunavanjima.

a) *Izbor primjerenog broja n parcijalnih prizama*

Probna računanja su pokazala da se u najvećem broju slučajeva može proći s fiktivnom diobom svake osnovne prizme u n = $v_2 \times 2 = 4$ ili n = v_2 $3 \times 3 = 9$ parcijalnih prizama. Općenito se sitnije podjele ne će isplatiti poradi inače ograničene točnosti preuzimanja (očitavanja) visina s topografskih karata, napose ako su odabrane osnovne prizme dovoljno male.

b) *Dva posebna slučaja*

Oni igraju važnu ulogu u praktičnom određivanju težinskih faktora, pa se stoga posebno naznačuju:

1. Svih n parcijalnih prizama imaju jednu te istu visinu, identičnu visini njihove osnovne prizme: za neko čvrsto stajalište dobiju se ipak različite vrijednosti $w_{ij} = \bar{w}_{ij}$, a s time i različite težine (= p'_{ij}), jer su one ovisne od položaja prizama prema stajalištu, tj. od koordinatnih razlika $(x - x_0)$, i $(y - y_0)$.
2. Ako izvjesne u odnosu na stajalište simetrično položene prizme imaju međusobno jednake vrijednosti $|(x - x_0)|$ i $|(y - y_0)|$ — a taj se slučaj uvijek pojavljuje u ekvidistantnim rasterskim podjelama (baziranim na pravokutnim koordinatama) — tada se dobiju ipak različiti w_{ij} a time i različiti p'_{ij}, ukoliko visine odnosnih parcijalnih prizama nisu međusobno iste.

Prema prednjem su težinski faktori ovisni od udaljenosti prizama do stajališta, ali i od visine promatranih osnovnih prizama i u njima sadržanih parcijalnih prizama naspram stajališta. Zato se postavlja postulat za numeričko određivanje vrijednosti p_{ij}: samo u tu svrhu parcijalnim prizmama i njihovoj osnovnoj prizmi (ili prizmama) pripisuje se privremeno ista visina (ili iste visine). Ovaj zahtjev je u skladu s prirodom i ulogom težinskih faktora i leži u suštini ovdje predložene metode.

c) *Pojednostavljenja pri izračunavanju* p_{ij}

Kako je poznato rezultati izjednačenja se zanemarujuće malo mijenjaju ako su učinjene promjene u težinama ne veće od 10% do 20%. (Wolf 1974 i 1975). Stoga za potrebe izjednačenja prema (6), tj. za određivanje korigiranih visina osnovnih prizama iz tzv. *reprezentativnih visina* parcijalnih prizama mogu zadovoljiti i praktično dovoljna približenja pri određivanju vrijednosti p_{ij}.

Ovdje se pojavljuju, zapravo, dva moguća načina pojednostavljenja numeričkog izračunavanja vrijednosti p_{ij}:

1. određivanje p'_{ij} za jednu (»aktualnu«) visinu približno važeću za parcijalne prizme unutar svake od osnovnih prizama;
2. određivanje $\bar{p}_{ij}$ približno važeće za neki visinski interval u kojem leže visine parcijalnih prizama.

U oba ova načina bit će potrebno pridržavati se naprijed iznesenog postulata, ali on ne će činiti nikakovih smetnji. Po drugom načinu *jedanput* izračunati $\bar{p}_{ij}$ mogu se *uvijek iznova* koristiti ukoliko je stalno zadržana, — a u pravilu se tako i postupa — ista zonalna shema, tj. iste ekvidistantne rasterske podjele topografskih masa. Ovo vrijedi pogotovo ako su p_{ij} već spočetka izračunati za nekoliko visinskih intervala, koji odgovaraju različitim tipovima razvedenosti reljefa. Nasuprot ovima težinski faktori p'_{ij}, iznađeni prvim načinom će osiguravati točnije izračunavanje korigiranih visina za svaku od osnovnih prizama i njihova će primjena posebno pri težem reljefu biti sigurno opravdana.

d) *Vrijednosti* p'_{ij} *za »aktualnu« visinu*

Kao pogodno pokazalo se pojednostavljenje, — jasno samo za izračunavanje $p_{ij}^{(k)}$ za »akutalnu« visinu — u kojem se visine $H_{ij}^{(k)}$ parcijalnih prizama zamjenjuju se prosječnom visinom u pripadnoj im osnovnoj prizmi (≡ »nekorigirana« visina osnovne prizme):

$$H_{ij}^{(k)} \approx (\sum_i \sum_i \hat{H}_{ij}^{(k)})/n = h_k^{(o)} \tag{20}$$

pa se onda računaju približna privlačenja $\bar{w}_{ij}^{(k)}$ i $\bar{W}_k$ potrebna za određivanje težinskih faktora. Njih ovdje označujemo s p'_{ij} u podudarnosti s prvim od dva naprijed spomenuta posebna slučaja.

Za reprezentativne visine $\tilde{H}_{ij}^{(k)}$ parcijalnih prizama valjalo bi uzeti prosječne visine unutar svake od njih, ali se u najvećem broju praktičnih slučajeva može proći već i s visinama očitanim za točke središta baza — (pomočno uzetih!) parcijalnih prizama. Na taj način predložena metoda težinskih faktora ne zahtjeva veći broj podataka (s karte »skinutih« visina) nego dosadašnje metode, jer otpada očitavanje visina za točke uglova (i središta baze) osnovnih prizama.

e) *Tabele i matrice težinskih faktora*

Ako su reljefni oblici odnosno topografske mase oko nekog fiksnog stajališta podijeljene pomoću kvadratične mreže (rastera), tada se unutar svake određene prizme može visinska razlika $\Delta h_{ij} = H_{ij} - H_0$ povećati za iste iznose δh i izračunati pripadajuće vrijednosti za p_{ij}. Za ukupno *s* ovakovih visinskih nivoa b, (gdje $\Delta h^b = \Delta h^{b-1} + \delta h$) dobiju se tako unaprijed težinski faktori uvršteni u slijedećoj tabeli (broj parcijalnih prizama u jednoj osnovnoj prizmi je $r \times r = n$):

$\Delta h = \Delta h_1$	$p_{11}^{(1)}\ p_{12}^{(1)} \cdots p_{1r}^{(1)}$	$p_{21}^{(1)}\ p_{22}^{(1)} \cdots p_{1r}^{(1)}$	....	$p_{r1}^{(1)}\ p_{r2}^{(1)} \cdots p_{rr}^{(1)}$	
Δh_2	$p_{11}^{(2)}\ p_{12}^{(2)} \cdots p_{1r}^{(2)}$	$p_{21}^{(2)}\ p_{22}^{(2)} \cdots p_{2r}^{(2)}$	....	$p_{r1}^{(2)}\ p_{r2}^{(2)} \cdots p_{rr}^{(2)}$	
....	....	....	....	....	(21)
Δh_s	$p_{11}^{(s)}\ p_{12}^{(s)} \cdots p_{1r}^{(s)}$	$p_{21}^{(s)}\ p_{22}^{(s)} \cdots p_{2r}^{(s)}$	....	$p_{r1}^{(s)}\ p_{r2}^{(s)} \cdots p_{rr}^{(s)}$	
Sredina:	$\overline{p}_{11}\ \overline{p}_{12} \cdots \overline{p}_{1r}$	$\overline{p}_{21}\ \overline{p}_{12} \cdots \overline{p}_{2r}$	....	$\overline{p}_{r1}\ \overline{p}_{r2} \cdots \overline{p}_{rr}$	

U posljednjem redu su načinjene *prosječne vrijednosti* za težinske faktore:

$$\overline{p}_{ij} = (\sum_{b=1}^{s} p_{ij}^{(b)})/s \tag{22}$$

Za mirnije tokove reljefa ustanovljeno je (Čolić 1975 b) da gornji niz vrijednosti $p_{ij}^{(b)}$ ne varira uopće naročito pa se možemo, posebno obzirom na 10‰ — odnosno 20‰ — granicu, zadovoljiti bez daljnjeg s srednjim vrijednostima $\overline{p}_{ij}$. Budući da se oni sada pojavljuju kao neovisni od visine može ih se svrstati u matricu $\overline{P}$:

$$\overline{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \overline{p}_{11}\ \overline{p}_{12} \cdots \overline{p}_{1r} \\ \overline{p}_{21}\ \overline{p}_{22} \cdots \overline{p}_{2r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overline{p}_{r1}\ \overline{p}_{r2} \cdots \overline{p}_{rr} \end{bmatrix} \tag{23}$$

Ona varira, dakle, samo još s podjelom koordinatne mreže odnosno jedino zbog koordinatnih razlika uglova osnovne prizme i njenih parcijalnih prizama od stajališta (točke računanja).

Prosječne vrijednosti $\overline{p}_{ij}$ su egzaktne samo za neku visinu u zahvaćenom visinkom intervalu, ali vrijede dovoljno točno za cijeli taj interval, pogotovo ako isti nije prevelik. Stoga će za nemirniji reljef, s većim visinskim razlikama, biti uputno načiniti podjelu u dva ili eventualno više intervala visina.

Postoji i naprijed istaknuta druga mogućnost pojednostavljenja u izračunavanju težinskih faktora za »aktualnu« visinu, tj. određivanje strožih vrijednosti p'_{ij} za visine parcijalnih prizama identičnih prosječnoj (»nekorigiranoj«)

visini osnovne prizme koju one sačinjavaju. Matricu ovih vrijednosti označimo sa P′:

$$\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} p'_{11} & p'_{12} & \cdots & p'_{1r} \\ p'_{21} & p'_{22} & \cdots & p'_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p'_{r1} & p'_{r2} & \cdots & p'_{rr} \end{bmatrix} \tag{24}$$

Na taj način potrebno je kod elektroničkog izračunavanja predati kompjutoru na učitavanje samo matrice H (sa »reprezentativnim« visinama reljefa parcijalnih prizama) zajedno s prije određenim matricama P (odnosno P′) po osnovnim prizmama. Elektroničko računalo će zatim prema sačinjenom programu (u FORTRAN-u) automatski izvršiti sva ostala računanja bazirajući ih na korigiranim visinama h_k osnovnih prizama. Privlačna djelovanja topografskih masa računaju se ovdje po tzv. strogim formulama za prizmatična tijela (Mader 1951), (Jung 1961), (Čolić 1971).

Potrebno je još naglasiti da se pogodnim izborom podjele u osnovne prizme, koja je simetrična s obzirom na stajalište, znatno smanjuje broj potrebnih matrica P (odnosno P′). Osobito je značajna i činjenica da se jedanput izračunate matrice $\overline{P}$ za jednu te istu stalno upotrebljavanu zonalnu podjelu mogu koristiti za sva stajališta, zapravo uvijek iznova kod primjene ovdje predložene metode težinskih faktora za određenu vrst računanja.

f) *Granični slučaj*

Pri beskonačno gustoj pokrivenosti topografske površine Zemlje s točkama reljefa došlo bi do sažimanja parcijalnih prizama u tzv. »linije mase«. (One se kao i »točkaste mase« koriste u dosadašnjim metodama za pojednostavljeno izračunavanje privlačnog djelovanja prizama položenih daleko od stajališta). Ako se diskretne visinske točke nalaze na malim konačnim udaljenostima može se stoga smatrati, da su H-vrijednosti, »skinute« s topografske karte, zaista stvarne visine malih parcijalnih prizama, koje su odozgo ograničene sa po jednom horizontalnom ravninom. Ovom činjenicom ostvaruje se još jedna mogućnost pojednostavljenja u izračunavanju težinskih faktora, tj. da se umjesto matrica $\overline{P}$ odnosno P′ koriste kontinuirane težinske funkcije $p^*(x_i, y_i)$.

g) *Kontinuirane težinske funkcije*

Diskretne vrijednosti $\overline{p_{ij}}$ odnosno p'_{ij} — kako se one nalaze u matricama $\overline{P}$ odnosno P′ — mogu se zamijeniti s aproksimirajućom funkcijom $p^*_{ij} = p^*(x_i, y_i)$, gdje se x_i i y_i mjere od stajališta. Tada se preporuča prikaz ili pomoću dvodimenzionalnog polinoma ili uz korištenje ortogonalnog sustava funkcija $F_j(x_i, y_i)$.[1] Za iznalaženje ovdje potrebnih koeficijenata $\bar{k}$ odnosno $\bar{c}$ polazi se od slijedećih jednadžbi pogrešaka:

$$v_i = \bar{k}_{00} + \bar{k}_{10}\bar{x}_i + \bar{k}_{01}\bar{y}_i + \bar{k}_{11}\bar{x}_i\bar{y}_i + \bar{k}_{20}\bar{x}_i^2 + \bar{k}_{02}\bar{y}_i^2 + \cdots - p_i \tag{25e}$$

odnosno

$$v_i = \bar{c}_0 F_0(\bar{x}_i, \bar{y}_i) + \bar{c}_1 F_1(\bar{x}_i, \bar{y}_i) + \bar{c}_2 F_2(\bar{x}_i, \bar{y}_i) + \cdots - p_i \tag{25b}$$

---

[1] U stručnoj literaturi je o ovome problemu već često izvještavano, a najšire je obrađen u (Wolf 1968). O primjeni u određivanju srednje gustoće topografskih masa nalazi se u (Čolić 1969 i 1971).

uz poznate svojstvo ortogonalnih sustava funkcija:

$$\Sigma \{ F_a(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot F_b(\bar{x}_i, \bar{x}_i) \} = 0 \text{ ako je } a \neq b$$

Koeficijenti k odnosno c dobiju se po metodi najmanjih kvadrata kao nepoznanice u posrednim mjerenjima.

Sada postoji mogućnost da se izračunavanje pojedinačnih p-vrijednosti — umjesto da ih se uzima iz matrice (23) odnosno (24) — ostavi kompjutoru, koji ih dobiva iz težinske funkcije $p^*(x, y)$ uvrštavanjem aktualnih x i y. Poboljšanja u smislu (21) postići će se ako se uvedu u (25a) ili (25b) i visine parcijalnih prizama (odnosno visinske razlike obzirom na stajalište) kao treća varijabla.

6. PRAKTIČNI POSTUPAK U PRIMJENI METODE

Pri primjeni metode težinskih faktora treba izvršiti pojedine faze u slijedećem redoslijedu:

1. dobivanje »reprezentativnih« visna $\tilde{H}_{ij}^{(k)}$ parcijalnih prizama očitavanjem (»skidanjem«) s topografskih karata;
2. preuzimanje za određeni visinski interval približno važećih vrijednosti $p_{ij}^{(k)}$ iz tabela odnosno matrica;
3. određivanje korigiranih visina h_k za svaku osnovnu prizmu (iz $\tilde{H}_{ij}^{(k)}$ uz pomoć $p_{ij}^{(k)}$ na temelju kvadratne (16b) ili — ako zadovoljava — linearne relacije (16a);
4. izračunavanje definitivnih privlačnih djelovanja osnovnih prizama W_k s korigiranim visinama $\bar{h}_k$ i konačno sumiranje tih djelovanja.

Za teški reljef (ali samo za njega) može se računanje poboljšati, tako da se najprije iz $\tilde{H}_{ij}^{(k)}$ unutar svake osnovne prizme formira prosta aritmetska sredina $h_k^{(o)}$ (»nekorigirana« visina), pa se s njom onda ulazi u tabelu (ili matricu P'), u kojoj su težinski faktori zavisni osim od položajnih koordinata također i od visine. S tako dobivenim »strožim« težinskim faktorima $p'^{(k)}_{ij}$ (umjesto $\bar{p}_{ij}^{(k)}$) poduzima se određivanje korigiranih visina $\bar{h}^k$, pa se na koncu računaju tražena privlačenja topografskih masa i njihova sumarna vrijednost.

Ovdje je potrebno još naglasiti da u praktičnoj primjeni ove metode parcijalne prizme treba promatrati samo kao zamišljena pomoćna sredstva za određivanje težinskih koeficijenata, pomoću kojih se onda horizontalne ravnine osnovnih prizama postavljaju u korigirane položaje zadovoljavajući pri tome dovoljno točno uvjet identiteta (11).

U nastavku članka će se primjerima numeričkog izračunavanja vertikalne komponente privlačenja topografskih masa ukratko uzakati na povećanje točnosti koje osigurava metoda težinskih faktora. Kako na ukupnu pozitivnu ocjenu nekog novog postupka posebno utječe stupanj jednostavnosti u praktičnoj uporabi bit će pridodan i osvrt o mogućnosti primjene ove metode u tzv. bliskom području to-

pografskih masa, koje seže do udaljenosti od oko 200 m od stajališta (točka računanja), tj. u tlocrtu pokriva površinu od 400 × 400 kvadratnih metara. Na ovo područje nadovezuje se i uska »popunjavajuća zona«, kojom se osigurava nesmetani prijelaz i uklapanje u eventualno postojeće digitalne modele reljefa, čime je tek osigurana optimalna primjena kompjutora u točnijem izračunavanju korekcije za reljef (ili topografske korekcije) izmjerenih vrijednosti sile teže odnosno brže i sigurnije određivanje komponenata topografskog otklona vertikale (težišnice).

Na koncu bit će naznačena i neka druga područja moguća, primjene metode težinskih faktora.

Literatura

Baeschlin, C. F.: Lehrbuch der Geodäsie. Zürich 1948.

Bott, M. H.: The use of electronic digital computers of the gravimetric terrain corrections. Geophys. Prospect. 7 (1959). S. 45 ff

Carrozzo, M. T.: A general formula for the computation of the terrain corrections to the gravity measurements by electronic computers. Boll. di geof. 8 (1966). S. 256 ff

Čolić, K.: Geodetsko-gravimetrijske metode određivanja srednje gustoće površinskih slojeva Zemljine kore. Zbornik radova Geodet. fak., Zagreb 1970. S. 83 ff

Čolić, K.: Analytische Fortsetzung von Oberflächenwerten der Schwere nach unten und Bestimmung ihrer Ableitungen im Tunnel. (Disertacija) Bonn 1971.

Čolić, K.: Die Gewichtsfaktoren-Methode, ein Verfahren zur topographischen Schwere- und Lotabweichungsberechnung. ZfV 1975. (a), (u tisku).

Čolić, K.: Erprobung der Gewichtsfaktoren — Methode zur Berechnung gravimetrischer Geländekorrektionen. Mitteil. a. d. Institut für Theor. Geodäsie, Bonn 1975. (b).

Čubranić, N.: Teorija pogrešaka s računom izjednačenja. Zagreb, 1967.

Čubranić, N.: Viša geodezija II dio. Zagreb 1974.

Ehrismann, W.; Müller, G.; Rosenbach, O.; Sperlich, N.: Topographic Reduction of Gravity Measurements by the aid of digital Computers. Boll. di geof. 8 (1966). S. 3 ff

Jakubcova, I.: Nomograms for more accurate calculation of gravity terrain correction. Geof. Sborník 13 (1966). S. 71 ff

Jordan, O., Eggert, O.: Handbuch der Vermessungskunde, 3. Band, 2. Halbband. Stuttgart 1941.

Jung, K.: Schwerkraftverfahren in der angewandten Geophysik. Leipzig 1961.

Kane, M. F.: A comprehensive system of terrain corrections using a digital computer. Geophys. 27 (1962). S. 455 ff

Klak, S.: Gravimetrija. Zagreb 1962.

Koch, K.-R.: Die gravimetrische Lotabweichungs-Berechnung in begrenztten Gebieten bei lückenhaften Schwerematerial. (Disertacija) Bonn 1965 (a).

Koch, K.-R.: Die topographische Schwere-und Lotabweichungsreduktion für Aufpunkte in geneigtem Gelände. AVN 72 (1965), (b). S 438 ff

Koch, K.-R.: Die topographische Schwere- und Lotabweichungsreduktion aus einer Entwicklung der Geländeoberfläche in Ortogonal — Polynome. Gerlands Beirt. 75 (1966). S. 56 ff

Koch, K.-R.: Die Berechnung topographischer Schwerekorrektionen mit Hilfe von Rechenanlagen. AVN 74 (1967). S. 338 ff

Mader, K.: Das Newtonsche Raumpotential prismatischer Körper und seine Ableitungen bis zur 3. Ordnung. Österr. ZfV, Sonderheft 11 (1951).

Makarov, P. N.: Geodezičeskaja gravimetrija. Moskva 1968.

Nemcov, L. D.: Visoktočnaja gravirazvedka. Moskva 1967.

Pick, M.: Einfluss der nächsten Umgebung eines Schwerepunktes auf den Wert der topographischen Schwerekorrektion. Studia geoph. at geod. 7 (1963). S. 146 ff

Vajk, F.: Bouguer corrections with varying surface density. Geophys. 21 (1956), S. 1004 ff.

Wolf, H.: Ausgeichungsrechnung nach der Methode kes kleinsten Quadrate. Bonn 1968.

Wolf, H.: Osobni razgovori, Bonn 1974 i 1975.