UKLAPANJE LOKALNIH MREŽA U DRŽAVNI SISTEM METODOM ORTOGONALNIH TRANSFORMACIJA

*Ivan MOLNAR — Novi Sad**

Razvojem tehničkih dostignuća i naučnih saznanja, usavršila se merna tehnika i metode rada u oblasti geodezije. Na taj način već sada se nameće problem (kasnije će to biti i sve urgentnije) da precizne i geodetske mreže visoke tačnosti oslonimo na državne mreže manje tačnosti.

U cilju očuvanja tačnosti mernih veličina, ostvarenih korišćenjem savremenog geodetskog instrumentarija, neophodno je geodetske mreže odrediti samostalno u lokalnom koordinatnom sistemu. Ovako određenu lokalnu mrežu treba u daljem postupku vezati za državni koordinatni sistem.

Međutim, neposredno oslanjanje lokalne geodetske na državnu mrežu u duhu važećih pravilničkih propisa, neizbežno dovodi do »prisilno« uklapanja, natezanja novoodređenih tačaka veće tačnosti na postojeće ranije određene tačke manje tačnosti. Time se deformiše i izmešta homogen odnos između tačaka lokalne mreže, ostvaren na bazi merenih veličina koje se određuju sa visokom tačnošću savremenim instrumentima.

Otuda proizilazi da postojeće date tačke, koje su uključene u lokalnu mrežu ne treba koristiti pri izravnanju tačaka, nego ih valja tretirati kao i sve ostale novoodređene tačke.

Identične tačke (tačke čije su koordinate poznate i u lokalnom i u državnom koordinatnom sistemu) treba koristiti u svrhu uklapanja mreža u državni koordinatni sistem. Uklapanje mreža najbolje je ostvariti pod uslovom da se ne menja ni oblik ni razmera lokalne geodetske mreže. Ukoliko je u slobodno izravnatoj mreži zastupljen veći broj ranije određenih tačaka u Gauss-Krügerovom sistemu, utoliko će i detalj snimljen na osnovu elemenata lokalne mreže biti bolje usaglašen sa detaljem koji se oslanja na državnu mrežu.

U geodetskoj praksi koriste se različite metode transformacija tačaka, putem kojih se sa promenljivim uspehom uklapaju lokalne geodetske mreže u družavni kordinatni sistem. Kao što je poznato pri uklapanju se mogu deformisati uglovne i linearne veličine, samo linearne veličine ili pak tačke zadržavaju svoj međusoban relativan položaj koje su imale pre uklapanja.

U nastavku će biti prikazana jedna metoda, tzv. metoda ortogonalnih transformacija, putem koje se vrši uklapanje lokalnih mreža u Gauss-Krügerov sistem. Ova metoda do sada nije bila korišćena u geodetskoj praksi. Primenom metode ortogonalnih transformacija postiže se integralno očuvanje izravnatih vrednosti dužina strana i uglova. Takav cilj se ostvaruje posredstvom orto-

---

*Adresa autora: Mr. Ivan Molnar dipl. inž., Novi Sad Vojvode Mišića 15/IV.

gonalne matrice kojom se definišu ortogonalne transformacije. Prema tome, za uklapanje lokalnih mreža u državni sistem metodom ortogonalnih transformacija, biće korišćena poznata osobina ortogonalnih transformacija, putem kojih se realizuje očuvanje veličina uglova i dužina.

Uklapanje koordinata tačaka lokalnih mreža u državni sistem metodom ortogonalnih transformacija sadrži tri faze rada:

1. Izmeštanje koordinatnog sistema
2. Dovođenja u razmeru
3. Rotacija koordinatnog sistema

Prva faza podrazumeva uvođenje redukovanih koordinata tačaka, putem kojih se izmeštanje koordinatnog sistema vrši bilo u odnosu na jednu od identičnih tačaka, bilo u odnosu na težište tih tačaka. U drugoj fazi iznalazi se faktor razmere (odnos dužina dveju identičnih tačaka u oba sistema, obično najudaljenijih), kojim treba izmnožiti lokalne koordinate svih tačaka koje podležu uklapanju. Najznačajnija je treća faza kojom se adekvatno određuje rotacija koordinatnog sistema. Rotacioni koeficijenti u ravni obrazuju ortogonalnu matricu drugoga reda, čiji se elementi imaju sračunati.

Formiranje ortogonalne matrice

Linearna smena je tada ortogonalna, ako se ostvaruje uslov

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 \tag{1}$$

gde veličine sa primovima, označavaju koordinate tačaka u državnom sistemu a bez njih, koordinate tačaka u lokalnom sistemu, (smenom uvedene vrednosti).

Transformaciona jednačina ima sledeći izgled:

$$\left\| \begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix} \right\| = R \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| \tag{2}$$

gdje je R matrica koeficijenata rotacije

$$R = \left\| \begin{matrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{matrix} \right\|$$

i obzirom da je R ortogonalna matrica

$$\left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| = R^T \left\| \begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix} \right\| \tag{3}$$

to uslov (1) biva zadovoljen.

Uvedimo sledeću smenu:

$$\left\| \begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & -q \\ q & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} K_1 \\ K_2 \end{matrix} \right\| \quad i \tag{4}$$

$$\left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & q \\ -q & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} K_1 \\ K_2 \end{matrix} \right\| \tag{5}$$

Rešimo izraze (4) i (5) po K_1 i K_2

$$DK_1 = x' D_1 + y' D_2 \qquad DK_2 = x' D_2 + y' D_4 \tag{6}$$

kao i

$$DK_1 = x D_1 = y D_3 \qquad DK_2 = x D_2 = y D_4 \tag{7}$$

gde su:

D je determinanta sistema, a

$$D = 1 + q^2 \tag{8}$$

D_1, D_2, D_3 i D_4 su subdeterminante

$$\begin{matrix} D_1 = 1 & D_3 = -q \\ D_2 = q & D_4 = 1 \end{matrix} \tag{9}$$

Zbrajajući odgovarajuće jednačine u jednačinama sistema (4) i (5), dobijamo sledeću vezu:

$$K_1 = \frac{1}{2q}(y' - y) \qquad K_2 = -\frac{1}{2q}(x' - x) \tag{10}$$

Uvrštavajući jednačine (10) u izraze (7), i imajući u vidu vrednosti odgovarajućih determinanata i subdeterminanata iz jednačina (8) i (9), dobijamo

$$x' = \frac{1 - q^2}{1 + q^2}x - \frac{2q}{1 + q^2}y$$

$$y' = \frac{2q}{1 + q^2}x + \frac{1 - q^2}{1 + q^2}y$$

Na taj način, transformaciona jednačina (2) glasi:

$$\left\| \begin{matrix} x' \\ \\ y' \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \dfrac{1 - q^2}{1 + q^2} & -\dfrac{2q}{1 + q^2} \\ & \\ \dfrac{2q}{1 + q^2} & \dfrac{1 - q^2}{1 + q^2} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x \\ \\ y \end{matrix} \right\| \tag{11}$$

Prema tome, matrica rotacionih koeficijenata ima sledeći izgled:

$$R = \left\| \begin{matrix} \dfrac{1 - q^2}{1 + q^2} & -\dfrac{2q}{1 + q^2} \\ & \\ \dfrac{2q}{1 + q^2} & \dfrac{1 - q^2}{1 + q^2} \end{matrix} \right\| \tag{12}$$

Određivanje parametra q

Ukoliko želimo da na osnovu izraza (12) sračunamo, u svrhu rotacije potrebne koeficiente r_{11}, r_{12}, r_{21} i r_{22}, prethodno se mora odrediti parametar q. Uspostavljanje zavisnosti između lokalnog i državnog koordinatnog sistema, ostvaruje se putem koordinata identičnih tačaka.

Parametar q se određuje na temelju koordinata tačaka, koje se redukuju na težište. Osim toga, potrebno je sve koordinate tačaka u lokalnom sistemu multiplicirati sa faktorom razmere. Ovako redukovane koordinate označimo sa $\bar{x}'$ i $\bar{y}'$ u državnom, a sa $\bar{x}$ i $\bar{y}$ u lokalnom koordinatnom sistemu.

Tabela I.

BROJ	LOKALNI SISTEM				DRŽAVNI SISTEM				RAČUNANJE ELEMENATA PARAMETRA q			
Tačke	$\mathcal{M}_{yi}$	$\bar{y}_i$	$\mathcal{M}_{xi}$	$\bar{x}_i$	y'_i	$\bar{y}'_i$	x'_i	$\bar{x}'_i$	$\bar{x}'_i\ \bar{y}_i$	$\bar{y}'_i\ \bar{x}_i$	$\bar{x}'_i + \bar{x}_i$ $(\bar{x}'_i + \bar{x}_i)^2$	$\bar{y}'_i + \bar{y}_i$ $(\bar{y}'_i + \bar{y}_i)^2$
△467	—51183.292	—3482.722	210870.797	—75.321	399251.20	— 3478.982	50119.45	160.158	557785.790	262040.403	84.837 7187.317	3.740 13.988
△14	—52173.162	2492.852	208070.373	—2875.745	400309.07	— 2421.112	52894.36	2935.068	7316690.134	6962500.728	59.323 3519.218	71.740 5146.628
△346	—57292.417	—2626.403	209102.136	—1843.982	405400.11	+ 2669.928	51738.15	1778.858	—4671997.983	—4923299.173	—65.124 4241.135	43.525 1894.425
△206	—54641.815	24.199	211140.534	194.416	402701.36	— 28.822	49765.60	— 193.692	— 4687.153	— 5603.458	0.724 0.524	— 40.623 21.372
△903	—58039.385	—3373.371	215546.748	4600.630	405989.17	+ 3258.988	45278.90	— 4680.392	15788698.641	14993397.962	—79.762 6361.977	—114.383 13083.471
Σ	-273330.071	0.001	1054730.588	—0.002	2013650.51	± 0.000	249796.46	± 0.000	18986489.424	17289036.462	21320.171	20159.884
Σ/n	—54666.014		210946.118		402730.182		49959.292					
$\mathcal{M}$	1.89648384											
△202	—55139.566	—473.552	212559.369	1613.251								
△195	—56916.818	—2250.804	213922.694	2976.576								
△196	—56881.505	—2215.491	212452.464	1506.346								

$$\bar{x}'_i = x'_i - \frac{[x']}{n} = x'_i - x'_o \qquad \bar{y}'_i = y'_i - \frac{[y']}{n} = y'_i - y'_o$$

$$\bar{x}_i = \mu\left(x_i - \frac{[x]}{n}\right) = \mu(x_i - x_o) \qquad \bar{y}_i = \mu\left(y_i - \frac{[y]}{n}\right) = \mu(y_i - y_o) \tag{13}$$

U cilju iznalaženja parametra q, uzimaju se u ozbir izrazi (4) i (10), te se mogu napisati sledeći izrazi:

$$\left\|\begin{matrix}\bar{x}'_i \\ \bar{y}'_i\end{matrix}\right\| = \frac{1}{2q}\left\|\begin{matrix}1 & -q \\ q & 1\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}\bar{y}'_i - \bar{y}_i \\ \bar{x}'_i - \bar{x}_i\end{matrix}\right\| \tag{14}$$

Prema tome, jednačine odstupanja glase:

$$\begin{aligned} -(\bar{y}'_i + \bar{y}_i)\,q + \bar{x}_i - \bar{x}' &= V_{xi} \\ (\bar{x}'_i + \bar{x})\,q + \bar{y}_i - \bar{y}'_i &= V_{yi} \end{aligned} \tag{15}$$

$$i - 1,2, \cdots n.$$

Normalne jednačine obrazujemo potraživši minimum odstupanja sume kvadrata koordinata identičnih tačaka.

$$[(\bar{x}' + \bar{x})^2 + (\bar{y}' + \bar{y})^2]\,q + 2\,[-\bar{y}'\bar{x} + \bar{y}\bar{x}'] = 0$$

Odavde se dobija parametar q.

$$q = 2\,\frac{[\bar{y}'\bar{x} - \bar{y}\bar{x}']}{(\bar{y}' + \bar{y})^2 + (\bar{x}' + \bar{x})^2} \tag{16}$$

Ostale koordinate tačaka, koje su poznate samo u lokalnom sistemu, mogu se transformisati u državni koordinatni sistem, na osnovu ranije određene matrice rotacionih koeficijenata:

$$\left\|\begin{matrix}X'_i \\ Y'_i\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22}\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}\bar{x}_i \\ \bar{y}_i\end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix}x'_o \\ y'_o\end{matrix}\right\| \tag{17}$$

Najzad, prikažimo računski postupak na jednom konkretnom primeru. Date su koordinate tačaka u:

	Gauss-Krügerov sistem		Lokalni Budimpeštanski sistem	
	y'	x'	y	x
346	405400.11	51738.15	−30209,81	110257.80
14	400309.07	52894.36	−27510.47	109713.76
467	399251.20	50119.45	−26988.52	111190.40
206	492701.36	49765.60	−28812.17	111332.63
903	405989.17	45278.90	−30603.68	113655.99
202			−29074.63	112080.77
196			−29993.14	112824.40
195			−30011.76	112709.64

Na osnovu tabele I., možemo računati parametar q.

$$q = 2\,\frac{(17289036.462 - 18986489.424)}{21320.171 + 20159.884} = -\frac{3394919.924}{41480.055} = -81.844$$

$$q = -81.844 \quad 2q = -163.688 \quad 1 - q^2 = -6697.449 \quad 1 + q^2 = 6699.440$$

Tabela II.

Tačka	LOKALNE KOORDINATE		NOVOTRANSFORMISANE KOORDINATE	
	$y_{(XB)}$	$x_{(XB)}$	y′ (Metara)	x′ (Metara)
467	−26 988.52	111 190.40	399 250.340	50 119.685
14	−27 510.47	109 713.76	400 308.337	52 895.087
346	−30 209.81	110 257.80	405 400.855	51 738.552
206	−28 812.17	111 332.63	402 701.240	49 765.525
903	−30 603.68	113 655.99	405 990.138	45 277.614
195	−30 011.76	112 799.64	404 907.587	46 928.611
196	−29 993.14	112 024.40	404 908.207	48 399.265
202	−29 074.63	112 080.77	403 164.176	48 334.952

	Direkcioni ugao 0 I II	Dužina D (hvati)	Direkcioni ugao 0 I II	Dužina S (Metara)
206 − 14	141 11 52.65	2077.297	322 35 52.87	3939.561
14 − 346	281 23 42.20	2753.618	102 47 42.42	5222.194
346 − 206	52 26 18.81	1763.138	233 50 19.00	3343.763
202 − 196	266 29 17.15	920.238	87 53 17.33	1745.217
196 − 195	358 37 26.81	775.464	180 01 26.96	1470.654
195 − 202	127 29 30.21	1181.095	308 53 30.39	2239.929
467 − 346	253 51 13.21	3353.572	75 15 13.44	6359.998
346 − 903	353 23 18.91	3420.939	174 47 19.10	6487.759
903 − 467	124 17 40.33	4375.902	305 41 40.52	8298.829

	Ugao α_o 0 I II	Dužina S_o (Metara)	Ugao α 0 I II	Razlike	
				$S - S_o$ (M)	$\alpha - \alpha_o$ (II)
14	39 48 10.45	3939.561	39 48 10.45	± 0.000	± 0.00
206	91 14 26.16	5222.192	91 14 26.13	+ 0.002	− 0.03
346	48 57 23.39	3343.763	48 57 23.42	± 0.000	+ 0.03
202	41 00 13.06	1745.217	41 00 13.06	± 0.000	± 0.00
195	51 07 56.60	1470.655	51 07 56.57	− 0.001	− 0.03
196	87 51 50.34	2239.928	87 51 50.37	+ 0.001	+ 0.03
467	50 26 27.12	6359.996	50 26 27.08	+ 0.002	− 0.04
346	80 27 54.30	6487.756	80 27 54.34	− 0.002	+ 0.04
903	49 05 38.58	8298.828	49 05 38.58	+ 0.001	± 0.00

Prema tome, matrica rotacionih koeficijenata ovako izgleda:

$$R = \begin{Vmatrix} -0.999701468 & 0.024433087 \\ -0.024433087 & -0.999701468 \end{Vmatrix}$$

Novotransformisane koordinate tačaka računate su u tabeli II., u kojoj su pored toga dati i podaci o elementima koordinata tačaka lokalnog i novotransformisanog sistema. Upoređenjem dužina strana i uglova, zaključujemo da se uklapanje lokalnih mreža u državni sistem metodom ortogonalnih transformacija, odlikuje visokim stepenom saglasnosti uglova i dužina. Obzirom na to da je određivanje rotacione matrice zasnovano na metodi najmanjih kvadrata, to je obezbeđena i adekvtna orjentacija lokalne mreže u državnom koordinatnom sistemu.