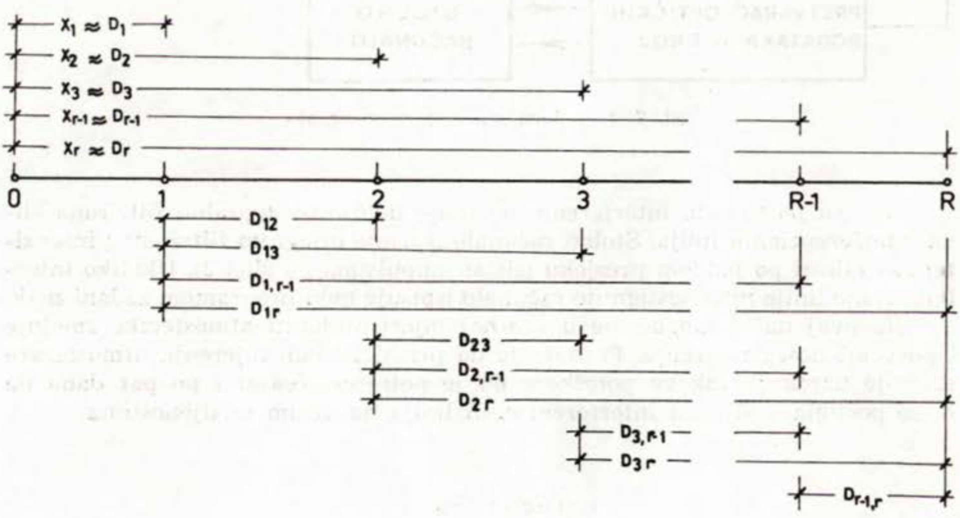
SKRAĆENI POSTUPAK ZA RAČUNANJE ODSJEČAKA OSNOVICE I ADICIONE KONSTANTE DALJINOMJERA

*Nihad KAPETANOVIĆ, Fadil HODŽIĆ — Sarajevo**

Neka iz mjerenja nekim daljinomjerom (prvenstveno se misli na elektronski, mada razmatranja vrijede za ma koji) želimo sa što većom tačnošću odrediti dužine odsječaka X_1, X_2, ... X_r osnovice OR (sl. 1). U tu svrhu sa stajališta *O* izmjerićemo dužine D_1, D_2, ... D_r; sa stajališta *1* dužine D_{12}, D_{13}, ... D_{1r}; ... sa stajališta R-1 dužinu $D_{r-1,r}$. Označimo li broj nepoznatih odsječaka osnovice OR sa *r* i uvedemo li oznaku $s = r + 1$, iznosi ukupan broj mjerenih dužina $n = \binom{s}{2}$.



Definitivne vrijednosti X_i ($i = 1, 2, \ldots r$) traženih odsječaka sračunaćemo izjednačenjem iz svih *n* mjerenja.

Adresa autora: Mr Nihad Kapetanović, dipl. ing. Šumarski fakultet Sarajevo,
Fadil Hodžić, geod. ing. Građevinski fakultet Sarajevo.

Ako mjerene vrijednosti odsječaka $D_1, D_2, \ldots D_r; D_{12}, D_{13}, \ldots D_{1r}; \ldots D_{r-1,r}$ shvatimo ujedno i kao približne, očigledno važe relacije

$$
\begin{array}{l}
D_1 + v_1 = D_1 + dx_1 \\
D_2 + v_2 = D_2 + dx_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
D_r + v_r = D_r + dx_r \\
D_{12} + v_{12} = D_2 + dx_2 - D_1 - dx_1 \\
D_{13} + v_{13} = D_3 + dx_3 - D_1 - dx_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
D_{1r} + v_{1r} = D_r + dx_r - D_1 - dx_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
D_{r-1,r} + v_{r-1,r} = D_r + dx_r - D_{r-1} - dx_{r-1}
\end{array}
\qquad (1)
$$

u kojima v znače popravke, a dx razlike izjednačenih i približnih vrijednosti odsječaka D_i. Iz jednadžbi (1) dobivaju se jednadžbe popravaka

$$
\begin{array}{l}
v_1 = dx_1 \\
v_2 = dx_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_r = dx_r \\
v_{12} = -dx_1 + dx_2 + l_{12} \\
v_{13} = -dx_1 + dx_3 + l_{13} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_{1r} = -dx_1 + dy_r + l_{1r} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_{r-1,r} = -dx_{r-1} + dx_r + l_{r-1,r}
\end{array}
\qquad (2a)
$$

pri čemu se slobodni članovi l računaju po formulama

$$
\begin{array}{l}
l_{12} = -D_1 + D_2 - D_{12} \\
l_{13} = -D_1 + D_3 - D_{13} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
l_{1r} = -D_1 + D_r - D_{1r} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
l_{r-1,r} = -D_{r-1,r} + D_r - D_{r-1,r}
\end{array}
\qquad (3)
$$

Jednadžbe pogrešaka ovog tipa važe uz pretpostavku da je adiciona konstanta daljinomjera sasvim tačno određena, na osnovu ranije objavljene kalibracije (slučaj *a*). Ova pretpostavka kod savremenih elektronskih daljinomjera redovito nema opravdanja; uprkos brižljivo obavljenoj kalibraciji treba očekivati da je još uvijek preostala neka korekcija dx_s adicione konstante, naročito ako je proteklo izvjesno vrijeme od izvršenja kalibracije. Stoga je bolje u račun uvesti i dx_s kao $(r+1)$-vu nepoznanicu, što znači da na lijevoj strani jednadžbi (1) svakom mjerenom odsječku *D*, pored popravke *v*, treba dodati i veličinu dx_s (slučaj *b*). Očigledno, jednadžbe popravaka u slučaju *b* glase

$$
\begin{array}{l}
v_1 = dx_1 - dx_s \\
v_2 = dx_2 - dx_s \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_r = dx_r - dx_s \\
v_{12} = -dx_1 + dy_2 - dx_s + l_{12} \\
v_{13} = -dx_1 + dx_3 - dx_s + l_{13} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_{1r} = -dx_1 + dx_r - dx_s + l_{1r} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_{r-1,r} = -dx_{r-1} + dx_r - dx_s + l_{r-1,r}
\end{array}
\qquad (2b)
$$

U slučaju *a* imamo, dakle, *r*, a u slučaju *b* imamo $s = r + 1$ nepoznanicu, pošto se u slučaju *b* pored vrijednosti X_i ($i = 1, 2, \ldots r$) odsječaka osnovice određuje i korekcija adicione konstante dx_s. Postupak *b* može se, stoga, primijeniti i samo u svrhu određivanja adicione konstante, pri čemu nije potrebno računati nepoznanice dx_i ($i = 1, 2, \ldots r$). Pri tome je kod daljinomjera koji imaju veliku adicionu konstantu (decimetar ili više) poželjno prethodno odrediti njenu približnu vrijednost, tj. tražiti samo korekciju dx_s približne vrjednosti adicione konstante K_p, da bi izbjegli računanje sa velikim brojevima.

Cilj ovoga rada nije iznošenje ovih, uglavnom poznatih postupaka; njegov je cilj pružanje skraćenog postupka za računanje nepoznanica i ocjenu tačnosti za oba spomenuta slučaja.

Klasičnim postupkom se na osnovu jednadžbi popravaka (2a) odnosno (2b) formiraju normalne jednadžbe čijim se rješavanjem određuju nepoznanice dx_i, pri čemu *i* zauzima vrijednosti $1, 2, \ldots r$ za slučaj *a*, odnosno $1, 2, \ldots r, s$ za slučaj *b*. Pri tome je neophodno rješavanje izvjesnog broja normalnih jednadžbi, znači rješavanje linearnog sistema jednadžbi. Numerička obrada, ako se ne vrši pomoću računskog automata, zahtijeva priličan utrošak vremena, što je nepogodno za rad na samom terenu.

Koristeći potpunu, (u slučaju *a*), odnosno djelomičnu, (u slučaju *b*), simetričnost jednadžbi popravaka i njima odgovarajućih normalnih jednadžbi, razradili smo postupak za direktno određivanje nepoznanica dx_i, bez rješavanja normalnih jednadžbi. Pri tome se svaka nepoznanica računa nezavisno od druge, što znači da se po želji mogu računati samo određene nepoznanice. Ovaj postupak ne zahtijeva mnogo vremena, a računanje se može obaviti logaritmarom.

Računanje nepoznatih vrši se na osnovu koeficijenata težina i vrijednosti slobodnih članova.

Normalne jednadžbe koeficijenata težina za slučaj *b* imaju slijedeći izgled

$$
\begin{array}{l}
[aa]Q_{i1} + [ab]Q_{i2} + \cdots + [ar]Q_{ir} + [as]Q_{is} = 10\cdots00 \\
[ab]Q_{i1} + [bb]Q_{i2} + \cdots + [br]Q_{ir} + [bs]Q_{is} = 01\cdots00 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[ar]Q_{i1} + [br]Q_{i2} + \cdots + [rr]Q_{ir} + [rs]Q_{is} = 00\cdots10 \\
[as]Q_{i1} + [bs]Q_{i2} + \cdots + [rs]Q_{ir} + [ss]Q_{is} = 00\cdots01 \\
(i = 1,2,\cdots r,s)
\end{array}
\tag{4}
$$

pri čemu *a*-ovi predstavljaju (jedinične) koeficijente uz dx_1, *b*-ovi uz $dx_2 \ldots$ *r*-ovi uz dx_r, *s*-ovi uz dx_s. Ovih *s* sistema jednadžbi sa *s* nepoznanica razlikuju se samo po položaju jediničnog slobodnog člana.

U slučaju *a* ostaje u sistemu (4) prvih *r*-jednadžbi, svaka bez posljednjeg člana s lijeve strane.

Za slučaj *a* koeficijenti *Q* nalaze se po jednostavnim formulama

$$Q_{ii} = \frac{2}{s} \qquad (i = 1,2,\cdots r) \tag{5}$$

$$Q_{ij} = Q_{ji} = \frac{1}{s} \quad (i = 1,2,\cdots r-1; \quad j = 1,2,\cdots r; \quad i < j) \tag{6}$$

U slučaju *b* treba najprije sračunati vrijednosti koeficijenata *Q* iz posljednjeg stupca jednadžbi (4) po formulama

$$Q_{is} = Q_{si} = \frac{2i}{p_{r-1}} \quad (i = 1,2,\cdots r) \tag{7}$$

gdje je

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 \\ p_2 &= 1 + (1 + 2) \\ p_3 &= 1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) \\ p_{r-1} &= 1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \cdots + (1 + 2 + \cdots r - 1) \end{aligned} \tag{8}$$

i

$$Q_{ss} = Q_{\frac{s}{2}, s} \quad \text{za } s \text{ parno, odnosno}$$

$$Q_{ss} = \frac{1}{2}\left(Q_{\left(\frac{s}{2}-\frac{1}{2}\right), s} + Q_{\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right), s}\right) \quad \text{za } s \text{ neparno} \tag{9}$$

Nakon računanja ovih, mogu se sračunati i svi ostali koeficijenti po formulama

$$Q_{ii} = \frac{2(1 + i \cdot Q_{is}}{s} \qquad (i = 1,2,\cdots r) \tag{10}$$

odnosno

$$Q_{ij} = Q_{ji} = \frac{1 + 2jQ_{is}}{s} \quad \begin{matrix}(i = 1,2,\cdots r - 1; \\ (j = 1,2,\cdots r; \quad i < j)\end{matrix} \tag{11}$$

Ispravnost formula (5) do (11) nije teško dokazati metodom matematičke indukcije.

Nakon računanja koeficijenata Q mogu se odrediti nepoznanice dx_i ($i = 1, 2, \ldots r, s$ za slučaj *b*, odnosno $i = 1, 2, \ldots r$ za slučaj *a*), po poznatim formulama

$$\begin{aligned} dx_1 &= -([al]\,Q_{11} + [bl]\,Q_{12} + \cdots + [rl]\,Q_{1r} + [sl]\,Q_{1s}) \\ dx_2 &= -([al]\,Q_{21} + [bl]\,Q_{22} + \cdots + [rl]\,Q_{2r} + [sl]\,Q_{2s}) \\ &\cdots \\ dx_r &= -([al]\,Q_{r1} + [bl]\,Q_{r2} + \cdots + [rl]\,Q_{rr} + [sl]\,Q_{rs}) \\ dx_s &= -([al]\,Q_{s1} + [bl]\,Q_{s2} + \cdots + [rl]\,Q_{sr} + [sl]\,Q_{ss}) \end{aligned} \tag{12}$$

Razumljivo je da je za slučaj *a* $Q_{is} = 0$ ($i = 1, 2, \ldots s$).

Ako se računaju sve nepoznanice, moguće je izvršiti poznatu kontrolu računanja pomoću sume kvadrata pogrešaka. Naime, suma kvadrata pogrešaka sračunata po formuli

$$[vv] = [ll] + [al]\,dx_1 + [bl]\,dx_2 + \cdots + [rl]\,dx_r + [sl]\,dx_s \tag{13}$$

pri čemu je, naravno, za slučaj *a* $dx_s = 0$, mora se, u granicama tačnosti računanja, složiti sa sumom kvadrata pogrešaka sračunatom iz odgovarajućih jednadžbi pogrešaka, tj. po formulama (2a) odnosno (2b).

Definitivne vrijednosti X_i odsječaka osnovice dobivaju se u oba slučaja po formulama

$$X_i = D_i + dx_i \qquad (i = 1,2,\cdots r) \tag{14}$$

a definitivna vrijednost adicione konstante (za slučaj *b*) po formuli

$$X_s = K_p + dx_s \tag{15}$$

s tim što je u slučaju ranije određene vrijednosti adicione konstante $K_p = 0$.

TABLICA 1. Vrijednosti koeficijenata q_{ij} i c_s za $s = 3, 4, 5, 6, 7$ i 8

$q_{11} = 2$								$c_3 = 1$	$s = 3$
$q_{12} = 3$	$q_{22} = 6$								
$q_{13} = 2$	$q_{23} = 4$	$q_{33} = 3$							
$q_{11} = 3$								$c_4 = 4$	$s = 4$
$q_{12} = 3$	$q_{22} = 6$								
$q_{13} = 4$	$q_{23} = 7$	$q_{33} = 11$							
$q_{14} = 2$	$q_{24} = 4$	$q_{34} = 6$	$q_{44} = 4$						
$q_{11} = 24$								$c_5 = 50$	$s = 5$
$q_{12} = 18$	$q_{22} = 36$								
$q_{13} = 22$	$q_{23} = 34$	$q_{33} = 56$							
$q_{14} = 26$	$q_{24} = 42$	$q_{34} = 58$	$q_{44} = 84$						
$q_{15} = 10$	$q_{25} = 20$	$q_{35} = 30$	$q_{45} = 40$	$q_{55} = 25$					
$q_{11} = 11$								$c_6 = 30$	$s = 6$
$q_{12} = 7$	$q_{22} = 14$								
$q_{13} = 9$	$q_{23} = 11$	$q_{33} = 19$							
$q_{14} = 9$	$q_{24} = 13$	$q_{34} = 17$	$q_{44} = 26$						
$q_{15} = 10$	$q_{25} = 15$	$q_{35} = 20$	$q_{45} = 25$	$q_{55} = 35$					
$q_{16} = 3$	$q_{26} = 6$	$q_{36} = 9$	$q_{46} = 12$	$q_{56} = 15$	$q_{66} = 9$				
$q_{11} = 74$								$c_7 = 245$	$s = 7$
$q_{12} = 43$	$q_{22} = 86$								
$q_{13} = 47$	$q_{23} = 59$	$q_{33} = 106$							
$q_{14} = 51$	$q_{24} = 67$	$q_{34} = 83$	$q_{44} = 134$						
$q_{15} = 55$	$q_{25} = 75$	$q_{35} = 95$	$q_{45} = 115$	$q_{55} = 170$					
$q_{16} = 59$	$q_{26} = 83$	$q_{36} = 107$	$q_{46} = 131$	$q_{56} = 155$	$q_{66} = 214$				
$q_{17} = 14$	$q_{27} = 28$	$q_{37} = 42$	$q_{47} = 56$	$q_{57} = 70$	$q_{67} = 84$	$q_{77} = 49$			
$q_{11} = 29$								$c_8 = 112$	$s = 8$
$q_{12} = 16$	$q_{22} = 32$								
$q_{13} = 17$	$q_{23} = 20$	$q_{33} = 37$							
$q_{14} = 18$	$q_{24} = 22$	$q_{34} = 26$	$q_{44} = 44$						
$q_{15} = 19$	$q_{25} = 24$	$q_{35} = 29$	$q_{45} = 34$	$q_{55} = 53$					
$q_{16} = 20$	$q_{26} = 26$	$q_{36} = 32$	$q_{46} = 38$	$q_{56} = 44$	$q_{66} = 64$				
$q_{17} = 21$	$q_{27} = 28$	$q_{37} = 35$	$q_{47} = 42$	$q_{57} = 49$	$q_{67} = 56$	$q_{77} = 77$			
$q_{18} = 4$	$q_{28} = 8$	$q_{38} = 12$	$q_{48} = 16$	$q_{58} = 20$	$q_{68} = 24$	$q_{78} = 28$	$q_{88} = 16$		

Srednja pogreška jednog mjerenja za slučaj *a* iznosi

$$m_o = \sqrt{\frac{[vv]}{n - r}} \tag{16a}$$

a za slučaj *b*

$$m_o = \sqrt{\frac{[vv]}{n - s}} \tag{16b}$$

Srednje pogreške M_i izjednačenih vrijednosti X_i mogu se sračunati po formulama

$$M_i = m_o \sqrt{Q_{ii}} \tag{17}$$

(i = 1, 2, ... r za slučaj *a*,
i = 1, 2, ... r, s za slučaj *b*)

U tablici 1 su, za slučaj *b* pregledno navedene vrijednosti koeficijenata q_{ij} i c_s, na osnovu kojih se nalaze odgovarajući koeficijenti Q_{ij} po jednostavnoj formuli

$$Q_{ij} = Q_{ji} = \frac{q_{ij}}{c_s} \quad (i, j = 1, 2, \cdots s) \tag{18}$$

za vrijednosti s = 3, 4, ... 8.

Redoslijed računanja

1. Na osnovu rezultata mjerenja, po formulama (3) sračunaju se slobodni članovi l;
2. Na osnovu jednadžbi popravaka (2a) odnosno (2b) formiraju se odgovarajuće sume [al], [bl], ... [rl], a za slučaj *b* i [sl];
3. Sračunaju se koeficijenti težina *Q* i to za slučaj *a* po formulama (5) i (6); a za slučaj *b* pomoću Tablice 1 i formula (18) kada je $s \leq 8$, odnosno pomoću formula (7) do (11) kada je $s > 8$;
4. Po formulama (12) sračunaju se vrijednosti veličina dx_i (i = 1, 2, ... r odnosno i = 1, 2, ... r, s);
5. Sračuna se [vv] po formuli (13) i iz jednadžbi popravaka, tj. na osnovu formula (2a) odnosno (2b), i dobijeni rezultati u svrhu kontrole uporede;
6. Po formulama (14) sračunaju se definitivne vrijednosti X_i odsječaka osnovice OR, a u slučaju *b* sračuna se po formuli (15) i definitivna vrijednost adicione konstante X_s;
7. Po odgovarajućim formulama (16) i (17) sračunaju se srednja pogreška jednog mjerenja i srednje pogreške izjednačenih vrijednosti.

Literatura

1. Čubranić N.: Teorija pogrešaka sračunom izjednačenja, Zagreb 1967.
2. Pauli W.: Messung einer kurzen Basis mit dem EOS durch Streckenmessung in allen Kombinationen. Vermessungstechnik 7/1968.
3. Pauli W.: Infracrveni daljinomjer Wild DI 10, Uputstvo za upotrebu.