

SAGLASNOST BESTOVE JEDNAČINE I MERENJEM DOBIVENE TEMPERATURE VAZDUHA

Jovan STEVANOVIĆ — Bor*

U literaturi se mogu naći Lallmand-ova, Hugershof-ova, Kohlmüller-ova i Bestova jednačina za promenu temperature vazduha sa visinom. Pošto je Kukkamäki koristio Bestovu jednačinu, a kako je Kukkamäkiewa jednačina za refrakciju najšire prihvaćena, to će u sledećem detaljnije biti razmotrena Bestova jednačina, koja glasi:

$$t = a + bz^c$$

gde je: t — temperatura vazduha

z — visina

a , b i c — parametri

Parametre a , b i c moguće je naći na osnovu izmerenih temperatura vazduha u najmanje 3 tačke po vertikali. Kukkamäkiew predlog za određivanje parametara bazira na merenju temperature u tačkama sa visinama 33,100 i 300 cm, gde su, radi lakšeg određivanja parametara, odnosi visina 3. Pošto promena temperature vazduha sa visinom može biti i komplikovana, često je poželjno meriti temperature u više od tri tačke, pa će u sledećem biti razmotrena Kukkamäkiewa ideja o eliminaciji parametara ali u uopštem vidu.

Neka su temperature vazduha merene u tačkama: $z_0 = 0$, $z_1 = h$, $z_2 = kh$, $z_3 = k^2h$, $z_4 = k^3h$, itd., gde je k proizvoljna pozitivna konstanta, a h visina prve tačke iznad tla.

Na osnovu vrednosti za temperaturu u ovim tačkama mogu se postaviti sledeće jednačine:

$$t_0 = a$$

$$t_1 = a + bh^c$$

$$t_2 = a + bk^c h^c$$

$$t_3 = a + bk^{2c} h^c$$

$$t_4 = a + bk^{3c} h^c$$

Na osnovu ovih jednačina se može dobiti:

* Adresa autora: Prof. dr Jovan Stevanović, Rudarsko metalurški fakultet Bor

$$\begin{aligned}\tau_0 &= t_0 - a = 0 \\ \tau_1 &= t_1 - a = bh^c \\ \tau_2 &= t_2 - a = bk^c h^c \\ \tau_3 &= t_3 - a = bk^{2c} h^c \\ \tau_4 &= t_4 - a = bk^{3c} h^c \text{ itd.}\end{aligned}$$

Iz ovih jednačina sledi:

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{\tau_3}{\tau_2} = \frac{\tau_4}{\tau_3} = k^c \quad (1)$$

Na osnovu gornjih jednačina se isto može dobiti:

$$\begin{aligned}v_{10} &= t_1 - t_0 = bh^c \\ v_{21} &= t_2 - t_1 = bh^c(k^c - 1) \\ v_{32} &= t_3 - t_2 = bk^c h^c(k^c - 1) \\ v_{43} &= t_4 - t_3 = bk^{2c} h^c(k^c - 1)\end{aligned}$$

Iz ovih jednačina opet direktno sledi:

$$\frac{v_{32}}{v_{21}} = \frac{v_{43}}{v_{32}} = \dots = k^c \quad (2)$$

Preko jednačina 1 i 2 se mogu naći niz vrednosti za parametar c , obzirom da je k unapred poznata konstanta. Kod Kukkamäkia je $k = 3$. U radu »O nivelmanskoj refrakciji« — Geodetski list br. 7—12 1974. i 1—3 1975. u prilogu su dati rezultati merenja temperature vazduha na visinama, kod kojih je $k = 2$. Te visine su: $z_0 = 0$, $z_1 = 30$, $z_2 = 60$, $z_3 = 120$ i $z_4 = 240$ cm. Merenja temperature je obavljeno u serijama. Jedna serija obuhvata 15 kompletnih očitavanja svih termometara uključujući i kontrolni termometar na $z = 180$ cm. U istom prilogu 1 navedene su sredine iz pojedinih serija, zatim vrednosti za τ i v svake serije.

Na osnovu ovih vrednosti za τ i v , a u skladu sa jednačinama I i II mogu se dobiti količnici:

$$\begin{aligned}q_1 &= \frac{\tau_{60}}{\tau_{30}} = 2^c \\ q_2 &= \frac{\tau_{120}}{\tau_{60}} = 2^c \\ q_3 &= \frac{\tau_{240}}{\tau_{120}} = 2^c \\ q_4 &= \frac{v_{120-60}}{v_{60-30}} = 2^c \\ q_5 &= \frac{v_{240-120}}{v_{120-60}} = 2^c\end{aligned} \quad (3)$$

Na osnovu ovih količina mogu se dobiti po 5 vrednosti za c za svaku seriju. Vrednosti za c se, zbog grešaka merenja temperature međusobno moraju razlikovati, ali, razlike u ovim vrednostima će da uslede i zbog toga što Bestova jednačina često ne može da izrazi konkretnu promenu temperature vazduha sa visinom. Iz jednačina (3) sledi:

$$c_1 = \frac{\lg q_1}{\lg 2}$$

U sledećoj tabeli su date, za svaku seriju, po 5 vrednosti za c.

Posmatrajući ove vrednosti uočavamo:

— Posmatrano u celini vrednosti za c jedne serije se jako mnogo razlikuju.

— Postoji izvesna saglasnost za vrednosti za c dobivenih preko q_1 , q_2 i q_3 , ali se te vrednosti često mnogo razlikuju od vrednosti za c dobivenih preko q_4 i q_5 .

№ ₉	c dobiveno preko					razlike		
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	r_1	r_2	r_3
1	+0,042	+0,116	+0,039	+1,149	+1,716	+0,157	+0,116	-0,216
2	+0,091	+0,022	+0,073	-1,970	+1,755	-0,235	-0,314	+0,175
3	+0,085	0,000	+0,092	-6,615	+6,812	-0,307	-0,300	+0,334
4	+0,086	+0,001	+0,095	+6,310	+6,535	-0,331	-0,316	+0,333
5	+0,096	+0,028	+0,057	-1,692	+1,055	-0,413	+0,685	+0,178
6	+0,072	+0,032	-0,042	-1,112	.	-0,094	-0,367	-0,172
7	+0,081	+0,042	+0,007	-0,891	-2,649	-0,132	-0,396	-0,120
8	+0,084	+0,037	+0,023	-1,124	-0,653	-0,212	-0,506	-0,063
9	+0,079	+0,019	+0,043	-2,013	+0,070	-0,385	-0,625	+0,151
10	+0,058	+0,032	+0,035	-1,016	+0,168	-0,184	-0,357	+0,023
11	+0,151	-0,002	+0,067	.	.	-0,187	-0,313	+0,083
12	+0,024	+0,045	+0,051	+0,957	+0,235	+0,110	+0,359	+0,034
13	+0,016	+0,057	+0,051	+1,850	-0,100	+0,171	+0,325	-0,025
14	+0,029	+0,090	+0,068	+1,692	-0,333	+0,153	+0,258	-0,060
15	-0,017	+0,105	+0,048	.	-1,063	+0,191	+0,296	-0,098
16	-0,020	-0,108	-0,254	+2,354	+1,046	-0,074	-0,246	-0,105
17	-0,074	-0,469	-0,064	+0,787	-1,186	-0,070	-0,057	+0,074
18	+0,131	-0,008	+0,062	.	.	-0,224	-0,357	+0,111
19	+0,118	+0,036	+0,087	-1,758	+1,307	-0,206	-0,326	+0,110
20	+0,106	+0,074	+0,089	-0,427	+0,360	-0,080	-0,129	+0,041
21	+0,065	+0,098	+0,098	+0,674	+0,084	+0,109	+0,227	-0,003
22	+0,050	+0,070	+0,081	+0,559	+0,280	+0,083	+0,220	+0,046
23	+0,036	+0,049	+0,054	+0,485	+0,185	+0,094	+0,230	+0,036
24	+0,073	+0,066	+0,055	+0,067	-0,548	-0,031	-0,116	-0,051
25	+0,219	+0,104	+0,071	-0,912	-0,456	-0,070	-0,177	-0,020
26	+0,343	+0,110	+0,093	-1,415	-0,147	-0,221	-0,536	-0,016
27	+0,375	+0,169	+0,123	-0,886	-0,313	-0,229	-0,606	-0,052
28	+0,386	+0,118	+0,110	-1,459	+0,018	-0,619	-1,498	-0,017
29	+0,267	+0,092	+0,084	-1,351	-0,054	-0,664	-1,540	-0,033
30	+0,057	+0,067	+0,089	+0,292	+0,492	+0,025	+0,155	+0,082

— Vrednosti za c preko q_4 i q_5 se međusobno vrlo mnogo razlikuju, često i u predznaku, a nekad su veće od jedinice.

— Vrlo je mali broj serija u kojima je c, dobiveno na osnovu q_1 , q_2 i q_3 , negativno.

— Navedeni eksperimenti, posmatrano u celini, praktično ne daju vrednosti za c od -0,1 do -0,8, dok po Kukkamäkiu, ovakve vrednosti za c karakterišu temperaturno stanje vazduha u toku dana.

Ovde je korisno skrenuti pažnju na tačnost sa kojom se određuju vrednosti za c . Prva tri količnika se dobivaju na osnovu vrednosti za τ , a druga dva na osnovu vrednosti za v .

Ako pođemo od činjenice da je za prvi slučaj:

$$c = \frac{1}{\lg 2} (\lg \tau_i - \lg \tau_{i-1}) = \frac{1}{\lg 2} [\lg (t_i - t_0) - \lg (t_{i-1} - t_0)]$$

a za drugi slučaj:

$$c = \frac{1}{\lg 2} (\lg v_{i+1,i} - \lg v_{i,i-1}) = \frac{1}{\lg 2} [\lg (t_{i+1} - t_i) \lg (t_i - t_{i-1})]$$

Diferenciranjem dobijamo za oba slučaja:

$$dc = \frac{1}{\lg 2} \left[\frac{dt_i}{\tau_i} - \frac{dt_{i-1}}{\tau_{i-1}} + \left(\frac{1}{\tau_{i-1}} - \frac{1}{\tau_i} \right) dt_0 \right]$$

$$dc = \frac{1}{\lg 2} \left[\frac{dt_{i+1}}{v_{i+1,i}} + \frac{dt_{i-1}}{v_{i,i-1}} - \left(\frac{1}{v_{i+1,i}} + \frac{1}{v_{i,i-1}} \right) dt_i \right]$$

Polazeći od ovih jednačina, uz pretpostavku da su sve temperature merene sa istom tačnošću m_τ , nakon odgovarajućeg sređivanja dobijamo:

$$m_c^2 = \frac{2}{(\lg 2)^2} \left(\frac{1}{\tau_i^2} + \frac{1}{\tau_{i-1}^2} - \frac{1}{\tau_{i-1}\tau_i} \right) m_\tau^2$$

$$m_c^2 = \frac{2}{(\lg 2)^2} \left(\frac{1}{v_{i+1,i}^2} + \frac{1}{v_{i,i-1}^2} + \frac{1}{v_{i+1,i}v_{i,i-1}} \right) m_\tau^2$$

S obzirom da su vrednosti za τ kod obavljenih merenja skoro za oko 10 puta veće od vrednosti za v , kao i na činjenicu da se u gornjim jednačinama u prvom slučaju radi o razlici, a u drugom slučaju o zbiru korelativnih faktora, na osnovu ovih jednačina proizilazi da će c , dobiveno preko τ , biti daleko tačnije no c dobiveno preko v . Navedene konstatacije o rasturanju vrednosti za c su u skladu sa ovom konstatacijom.

U predlogu Kukkamäkia bilo je $k = 3$ (u ovom slučaju je $k = 2$) a temperature su merene na visinama 33, 100 i 300 cm, pa su vrednosti za v relativno u odnosu na τ , veće no u ovom eksperimentu, ali se i u tom slučaju dobija tačnije c preko τ no preko v .

Pre zauzimanja definitivnog stava o Bestovoj jednačini, korisno je sagledati kakve su praktične posledice ovako ogromnih rasturanja za c . Da bi se ovo postiglo na najjednostavniji način, na krajnjoj desnoj strani navedene tabele su unete razlike r_1 , r_2 i r_3 , koje su dobivene na sledeći način:

Ako bi se temperatura menjala po jednačini Besta, bile bi zadovoljene sledeće relacije:

$$\frac{\tau_{60}}{\tau_{30}} = q_1 \equiv \frac{\tau_{120}}{\tau_{60}} = \frac{\tau_{240}}{\tau_{120}}$$

Na osnovu ovih jednačina bi trebalo da bude:

$$\tau_{120} = q_1 \tau_{60}$$

$$\tau_{240} = q_1 \tau_{120} = q_1^2 \tau_{60}$$

Sa druge strane, ako se isključi promena temperature ispod 60 cm, pa se posmatra temperaturno stanje vazduha od 60 do 240 cm, u kojem intervalu praktično prolazi vizura pri nivelanju, za taj interval bi trebalo da važe odnosi:

$$\frac{\tau_{120}}{\tau_{60}} = Q_2 = \frac{\tau_{240}}{\tau_{120}}$$

Odavde, ako se temperatura menja po Bestu, sledi

$$\tau_{240} = Q_2 \tau_{120}$$

Upoređivanjem ovako dobivenih vrednosti, sa vrednostima koje su dobivene merenjem, dobijaju se razlike r:

$$r_1 = Q_1 \tau_{60} - \tau_{120}$$

$$r_2 = Q_1^2 \tau_{60} - \tau_{240}$$

$$r_3 = Q_2 \tau_{120} - \tau_{240}$$

Ako posmatramo ove razlike r, uočavamo da r_1 i r_2 u opštem slučaju imaju izrazito velike vrednosti, što znači da se, za ceo interval od 0 do 240 cm, temperatura ne menja po Bestovoj jednačini. Vrednosti za r_3 često imaju i relativno male vrednosti, a ove vrednosti karakterišu slaganje promene temperature vazduha sa Bestovom jednačinom u intervalu od 60 do 240 cm.

Pre donošenja zaključka koji proizilazi iz analize ovih razlika r, potrebno je da se ukaže na tačnost sa kojom su obavljena merenja temperature, da bi iz toga mogao da proizide kriterijum o veličini razlika r, za koje se može smatrati da su dovoljno male i da za tu seriju obezbeđuju saglasnost realne promene temperature i Bestove jednačine. Posebno je obrađen problem ocene tačnosti merenja temperature, koji je ovde posebno specifičan, jer se radi o merenju promenljive veličine i o oceni tačnosti merenja takve veličine. Ovde navodimo da je, na osnovu ocene tačnosti jedne proizvoljno odabrane serije, postupkom koji podrazumeva linearnu promenu temperature vazduha sa vremenom, a koji se odnosi na po 5 merenja u okviru jedne serije, dobivena srednja greška aritmetičke sredine od 15 merenja od $\pm 0,03^\circ\text{C}$.

Pošto je promena temperature u funkciji vremena bila složenija, to se može smatrati da je ova greška prevelika. Međutim, bez obzira na to, ako pretpostavimo da je maksimalna greška jednaka dvostrukoj srednjoj greški, zaključujemo da se za serije, za koje je r_3 manje od $0,06^\circ\text{C}$, može smatrati da se koliko toliko povinjuju Bestovoj jednačini, a ostale ne.

Međutim, pošto je u navedenim eksperimentima merena temperatura na visini 180 cm, potrebno je da se i ova vrednost uklapa u Bestovu jednačinu. Serije br. 8, 13, 14, 24 i 29 imaju dovoljno malo r_3 , ali im se τ_{180} ne povinuje Bestovoj jednačini.

Na kraju može se konstatovati da se od 30 serija njih 9 uklapaju u Bestovu jednačinu, a to su serije br. 10, 12, 20, 21, 22, 23, 24, 26, i 28, i to za interval od 60 do 240 cm.

Ako se uzme u obzir da su za ovih 9 serija merenja obavljena ili pri visokim temperaturama, kada se ređe nivela, ili pak pri oblačnom letnjem vremenu i vlažnom tlu, koje je povoljno za nivelanje ali nije mnogo zastupljeno pri nivelanju, nameće se zaključak da i tih 9 serija ne karakterišu prosečne temperaturne uslove nivelanja.

Na osnovu svega, i pored svih rezervi, s obzirom da je Bestova jednačina sa Kukkamäkievim vrednostima za c u svetu široko prihvaćena, morao bi da proizide zaključak da Bestova jednačina ne može da se tretira kao zadovoljavajući interpretator realne promene temperature vazduha sa visinom.