PRILOG STATISTIČKOJ ANALIZI GREŠAKA U NIVELMANU

Manojlo MILADINOVIĆ — Beograd*

Klasičan prilaz problemima analize grešaka u nivelmanu razrađen je do svoje najviše mogućnosti u izvanrednom radu prof. Vinjala, koji je podnet Generalnoj skupštini 1936. god.

Pokušaj da se uvedu savremene metode statističke analize, podnet je na X generalnoj skupštini Međunarodne asocijacije za geodeziju u Rimu 1954. god. od strane porf. A. M. Vaseva.

Interesovanje za ovo prilaženje kulminiralo je u usvajanju odluke o formiranju specijalne studijske grupe radi »proučavanja najboljih načina primene matematičke statistike za analizu nivelmanskih grešaka« (3).

Od tada je postalo očevidno, da mnogi geodeti neće da prihvate ideju o primeni statistike u nivelmanu, jer se nivelmanske greške ne povinuju normalnom (Gausovom) zakonu raspodele grešaka.

Objašnjenje u vezi s tim dao je prof. Vasev u svom radu (2) gde kaže:

»Nedostatak normaliteta grešaka najverovatnije dolazi usled prisutnosti sistematskih uticaja i neizbežne heterogenosti podataka, prouzrokovane korišćenjem više nivelatora, koji opažaju pod promenljivim uslovima rada. Međutim, kada se odstrane komponente neslaganja, koje su vezane za sistematske uticaje, i preostalom odstupanju da pravilna težina, onda izgleda da se postižu oba uslova, normalitet i homogenost«.

Statistička metoda koju je predložio prof. A. M. Vasev je tzv. »dispersiona analiza«, čije je teoretske osnove postavio još engleski matematičar R. A. Fišer.

Klasične formule daju verovatnu slučajnu grešku i verovatnu sistematsku grešku, pri čemu se koriste zbirovi kvadrata

$$\frac{\sum\limits_{i}\sum\limits_{j} \rho_{ij}^2}{\sum\limits_{i}\sum\limits_{j} R_{ij}} \quad \text{i} \quad \frac{\sum\limits_{i}\left(\sum\limits_{j} \rho_{ij}\right)^2}{\sum\limits_{i}\sum\limits_{j} R_{ij}} \tag{1}$$

ρ_{ij} — odstupanje između nivelanja napred i nazad strane j između dva repera na liniji i čije je odstojanje R_{ij}.

Kod primene statističke metode analize varijanse, kao promenljivu uzimamo odstupanje po kilometru tj.

$w_{ij} = \frac{\rho_{ij}}{R_{ij}}$ [vidi (1)].

---

* adresa autora: Manojlo Miladinović dipl. inž. Zavod za fotogrametriju Beograd admirala Geprata 14

Predpostavlja se da se odstupanje w_{ij} sastoji iz jedne konstante, nekog uticaja koji se menja od jednog do drugog vlaka i jedne slučajne komponente koja se naziva preostalim odstupanjem (rezidualom) koje je normalno raspoređeno i ima nultu vrednost, tj.:

$$w_{ij} = w_c + \xi_i + \varepsilon_{ij} \tag{2}$$

Sada nastavljamo da računamo varijanse, da bi smo predstavili preostalo odstupanje i uticaj vlaka. U tom cilju koristimo dva zbira kvadrata,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N-m} \sum_i \sum_j \left(\frac{\rho_{ij}}{R_{ij}} - \frac{\sum_j \frac{\rho_{ij}}{R_{ij}}}{n_i} \right)^2 \\ &\frac{1}{m-1} \sum_i n_i \left(\frac{\sum_j \frac{\rho_{ij}}{R_{ij}}}{n_i} - \frac{\sum_i \sum_j \frac{\rho_{ij}}{R_{ij}}}{N} \right)^2 \end{aligned} \tag{3}$$

gdje je:

N — ukupan broj strana

m — broj linija

n_i — broj repera na liniji m

Kada predpostavimo da se mreža sastoji iz velikog broja podjednako raspoređenih repera, tada postaje očigledna sličnost odgovarajućih zbirova kvadrata u formulama (1) i (3). Stavljajući u (1) i (3) da je:

$$R_{ij} = R, \qquad n_i = \frac{N}{m}$$

i predpostavljajući da je N veliko u odnosu na m, dobijamo:

$$\frac{1}{NR} \sum_i \sum_j \rho_{ij}^2 \quad \text{i} \quad \frac{1}{NR} \sum_i \left(\sum_j \rho_{ij} \right)^2 \tag{1'}$$

$$\frac{1}{NR^2} \sum_i \sum_j \left(\rho_{ij} - \frac{\sum_j \rho_{ij}}{n_i} \right)^2 \quad \text{i} \quad \frac{1}{NR^2} \sum_i \left(\sum_j \rho_{ij} - \frac{\sum_i \sum_j \rho_{ij}}{m} \right)^2 \tag{2'}$$

gde se vidi sličnost odgovarajućih izraza 1′ i 2′.

U stvari, klasične formule su specijalni slučajevi parametara, koji proizlaze iz statističke tehnike, međutim ova druga uzima u obzir stvarni raspored repera i ograničene dimenzije mreže.

Nejednakost odstojanja repera omogućava da se analiza proširi ispitivanjem korelacije između w i R, ili pak onih promjenljivih koje bi bile »najreprezentativnije« za operaciju nivelanja.

Studijska grupa (5) objavila je »rezultate istraživanja u oblasti statističkog proučavanja grešaka u nivelmanu« u kojima preporučuje da se promenljive razmatraju u dve velike kategorije:

a) One koje pripadaju operaciji nivelanja i,

b) One koje pripadaju mogućim poremećajnim uticajima van operacije nivelanja.

Za sadašnje proučavanje usvojene su sledeće promenljive koje potiću od operacije nivelanja:

1. $r = (A - R)$ algebarski — zbir nivelanja napred-nazad,
2. $r' = (A) - (R)$ — razlika apsolutnih vrednosti A i R.

Dosada postignuti rezultati odnose se na primenu statističkih metoda koje su uzimale kao promjenljive veličinu ρ_{ij}/R_{ij}, a to će reći odstupanje po kilometru odstojanja između susednih repera.

Gore pomenuta studijska grupa uvela je nove promenljive:

1. $d = r/\sqrt{R}$; $d' = r'/\sqrt{R}$
2. $S = r/R$; $S' = r'/R$
3. $s = r/R^2$; $s' = r'/R^2$
4. $u = r/\sqrt{n}$; $u' = r'/\sqrt{n}$

i dala rezultate ispitivanja za svaku od gore pomenutih promenljivih.

Promenljive koje potiču od mogućih poremećajnih uticaja, a koje je predložila i razmatrala studijska grupa su:

1. nagnutost nivelmanske strane,
2. kolimacija,
3. terestrička plima (gravimetrijske popravke za terestričku plimu i to: C_A — za nivelanje napred: C_R — za nivelanje nazad),
4. pravac invelanja.

Razlog zbog koga smo naveli istraživanja studijske grupe (5) je taj, što njihova istraživanja u izvesnom smislu predstavljaju sintezu dosadašnjih istraživanja i analizu grešaka u nivelmanu.

Put koji je izabrala studijska grupa (5) svakako ne predstavlja jedinu mogućnost u rasvetljavanju prave istine o nivelmanskim greškama jer se još uvek ne zna ništa tačno o njihovoj pravoj prirodi.

Statističko proučavanje nivelmanskih grešaka, po našem mišljenju, prihvatljivije je i sa dijalektičke strane posmatranja sveta jer ono zahteva da se prikupi veliki broj različitih podataka, koje treba izvući iz operacije preciznog nivelanja.

Dugo se smatralo da u kosmosu vlada savršen red i da za njega važe Njutnovi zakoni mehanike. Međutim, nove teorije kvantne fizike su promenile takvo mišljenje i ukazale na to da statistički način mišljenja daje »sve više uvida u zakonitosti prirode, do kojih ne možemo nikada doći čistim matematičkim zaključivanjem, a to znači dati pravo shvatanje filozofskog problema kauzaliteta i statistike, koji je problem nabačen Hajsenbergovom relacijom neodređenosti«. (9).

Možda će nas jedna Ajnštajnova misao podsetiti na potrebu dubljeg i sveukupnijeg sagledavanja kosmičkog poretka stvari:

»Postoji nešto kao realno stanje jednog fizikalnog sistema koji postoji objektivno, nezavisno od svakog posmatranja i merenja, i koje se u principu može opisati sredstvima fizikalnog istraživanja. Koja su adekvatna sredstva istraživanja i prema tome koje fundamentalne pojmove u tom smislu treba upotrebiti, to je po mom mišljenju sada nepoznato. Materijalne tačke? Polje? Sredstvo determinacije koje tek treba biti stvoreno? Ova teza o realnosti nema smisao nekog iskaza po sebi jasnog, zbog njene metafizičke prirode: ona ima osobito značenje jednog programa« (7).

ODREĐIVANJE MINIMALNOG BROJA STANICA ZA ODREĐIVANJE RAZLIKE NIVELANJA NAPRED-NAZAD

U novoj mreži nivelmana visoke tačnosti naše zemlje na kojoj su radovi započeti 1970. god. pojavljuju se nivelmanske strane i sa vrlo kratkim odstojanjem između repera. To je nastalo kao rezultat težnje da se svi reperi mreže uključe u vlakove nove mreže zbog, potreba naučnih zadataka geodezije.

Međutim, promenljivo odstupanje ρ dobiveno iz nivelanja napred-nazad tako kratkih strana neće, reprezentovati stvarnu tačnost nivelanja nego će je redovno smanjivati.

Problem bi se mogao formulisati ovako: Na kojoj dužini R, odnosno, posle kolikog broja stanica treba očekivati, da raspored zbira numerički nezavisnih elementarnih grešaka teži ka normalnom rasporedu frekvencije?

U saglasnosti sa čuvenom centralnom graničnom teoremom teorije verovatnoće (11) raspored frekvencija zbira velikog broja numerički nezavisnih elementarnih grešaka teži ka normalnom rasporedu frekvencije, bez obzira kakav mogao biti raspored grešaka, pod pretpostavkom o zadovoljenju nekakvih opštih uslova*)

Funkcija frekvencije zbira od k komponenata sličnog rasporeda sa nultim srednjim vrednostima i jednakim jediničnim varijansama može se sračunati korišćenjem približne formule (12):

$$G = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Exp}\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \operatorname{Exp}\left(\frac{\mu_3 x^3}{6\sqrt{k}} - \frac{(\mu_4 - 3)\, x^4}{24 \cdot k}\right) \tag{9}$$

gde su μ_3 i μ_4 treći i četvrti moment rasporeda i gde razmera približno odgovara jediničnoj varijansi. Veličine μ_3 i μ_4 su mere asimetrije i kurtičnosti komponentnih rasporeda. K je broj viziranja.

Može se reći da elementarne greške mogu biti raspoređene slično Pirsonovom tipu VII sa indeksom 4 (12) koji odgovara $\mu_3 = 0$ i $\mu_4 = 5$.

Ako pretpostavimo da se slučajna greška tako raspoređuje kod svakog viziranja, tada možemo izvesti raspored frekvencije stavljajući u (9) da je $\mu_3 = 0$, $\mu_4 = 5$ i odgovarajuću vrednost za k.

---

* Neophodan i dovoljan uslov je da zbir varijansi komponentnih rasporeda teži ka beskonačnosti, s tim da uticaj svake varijanse na zbir varijansi teži ka nuli, a to će reći:

$\Sigma\sigma_\nu^2 \to \infty$; $\dfrac{\sigma_\nu^2}{\Sigma\sigma_\nu^2} \to 0$ Uslov je zadovoljen univelmanu.

TABLICA 1: Vrednosti ordinata N i G_χ-rasporeda

χ	N	G_2	G_4	G_6	G_8	G_{10}	G_{12}	G_{15}	G_{20}
0.00	0.3989	0.3989	0.3989	0.3989	0.3989	0.3989	0.3989	0.3989	0.3989
0.25	0.3867	0.3867	0.3867	0.3867	0.3867	0.3867	0.3867	0.3867	0.3867
0.05	0.3521	0.3529	0.3525	0.3523	0.3523	0.3523	0.3523	0.3523	0.3523
0.75	0.3011	0.3052	0.3032	0.3025	0.3020	0.3020	0.3018	0.3016	0.3016
1.00	0.2420	0.2521	0.2471	0.2454	0.2446	0.2441	0.2437	0.2434	0.2430
1.25	0.1826	0.2022	0.1923	0.1891	0.1875	0.1866	0.1859	0.1852	0.1844
1.50	0.1295	0.1597	0.1441	0.1390	0.1366	0.1352	0.1342	0.1332	0.1322
1.75	0.0863	0.1274	0.1050	0.0984	0.0952	0.0934	0.0921	0.0909	0.0898
2.00	0.0540	0.1048	0.0756	0.0675	0.0639	0.0618	0.0064	0.0589	0.0576
2.25	0.0317	0.0920	0.0543	0.0455	0.0415	0.0395	0.0380	0.0366	0.0354
2.50	0.0175	0.0887	0.0398	0.0303	0.0264	0.0244	0.0231	0.0217	0.0206
2.75	0.0091	0.0968	0.0302	0.0202	0.0166	0.0152	0.0136	0.0125	0.0115
3.00	0.0044	0.1278	0.0243	0.0138	0.0104	0.0088	0.0078	0.0069	0.0062
3.25	0.0020	0.2080	0.0211	0.0097	0.0065	0.0052	0.0044	0.0038	0.0033
3.50	0.0009	0.3600	0.0204	0.0071	0.0042	0.0032	0.0025	0.0020	0.0016
3.75	0.0004		0.0224	0.0056	0.0028	0.0019	0.0014	0.0010	0.0009
4.00	0.0001		0.0290	0.0049	0.0020	0.0012	0.0008	0.0006	0.0004

$$G_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2 - \frac{1}{6k} x^4}\right)^2} \quad (10$$

Vrednost ove funkcije se sada može pročitati u tablicama ordinate normalnog rasporeda, u koje se ulazi sa

$\left(x^2 - \frac{1}{6k} x^4\right)^{\frac{1}{2}}$, umesto sa x.

Vrednosti G_k i normalna funkcija N dati su u tablici 1.

Na slici 1 dat je dijagram vrednosti G_k = 2, 4, 6, 8 i normalne raspodele (izvučene crvenom bojom) odakle se vidi da u slučaju za k $\rightarrow \infty$ kriva teži ka normalnoj raspodeli.

U tablici 2 upisana je vrednost verovatnoća da neka greška leži van granice x $\pm$. Svakako da frekvencija većih odstupanja dovodi ka precenjivanju nivoa signifikantnosti, kada se metoda analize varijanse koja se zasniva na normalnom rasporedu, primjenjuje na nivelmanske greške, čiji raspored pokazuje izrazitu leptokurtičnost (kriva sa zaoštrenim vrhom i dužim krajevima od normalne krivine).

TABLICA 2

X	N	G_2	G_4	G_6	G_8	G_{10}	G_{12}	G_{15}	G_{20}
1,962	5%	10.8%	7.4%	6.6%	6.2%	6.0%	5.8%	5.7%	5.7%
2,576	1%	8.6%	3.0%	2.0%	1.8%	1.6%	1.5%	1.4%	1.4%

Drugim rečima, ako test pokazuje da je neki uticaj signifikantan recimo na nivou 1%, tada stvarni nivo signifikantnosti, naprimer za k = 8, iznosi 1,8%.

Može se smatrati da je greška u nivou signifikantnosti neznatna do 0,5%.

Provera normaliteta G_k — rasporeda za k = 10,12 i 20 data je u tablici 3. Provera je izvršena pomoću χ^2 testa za 33—3 stepeni slobode gde je:

$$P[\chi^2 > \chi^2(30; \alpha)] = \alpha\ \%$$

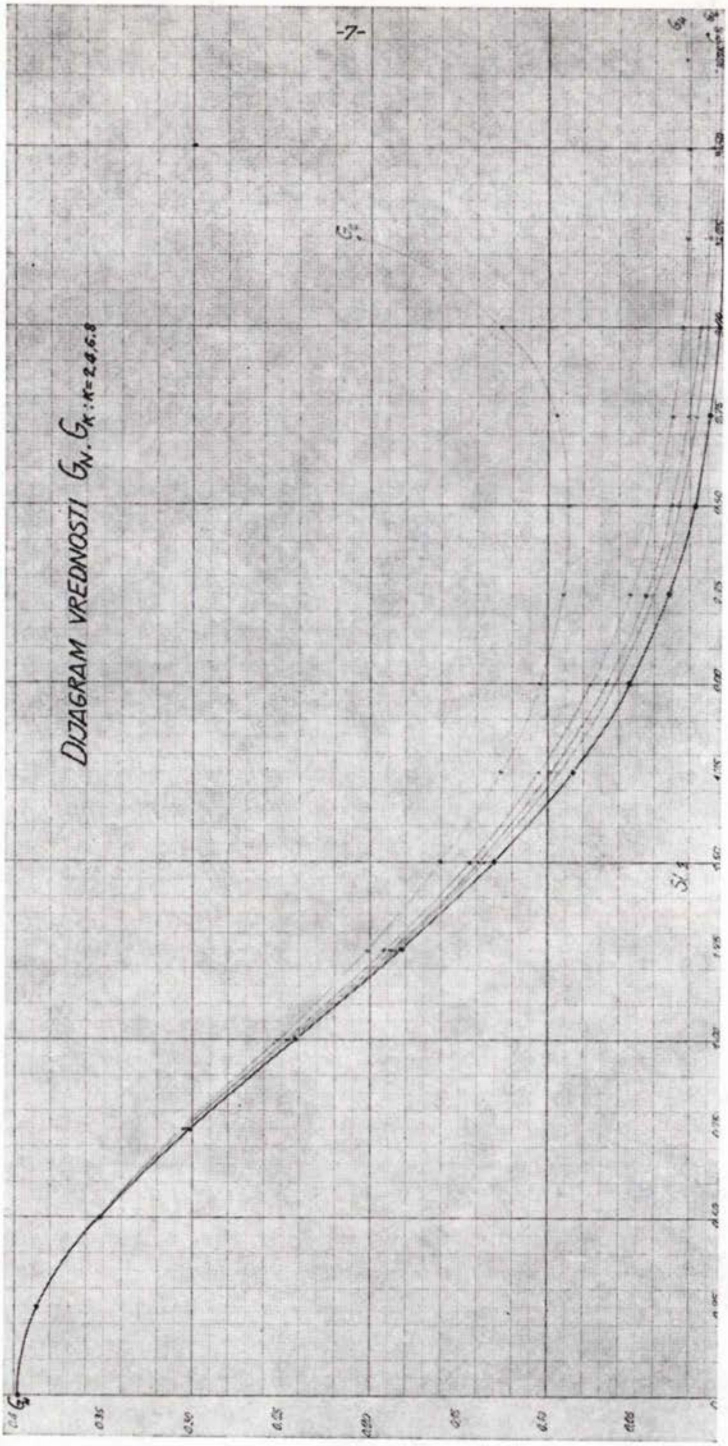
Iz tablice 3 se vidi da vrednost χ^2_{G12} odgovara čak nivou 5% dok je χ^2_{G10} znatno signifikantna i na nivou 1%.

Prema tome, za k = 12, odnosno za 6 stanica nivelanja u jednom smeru i 6 stanica nivelanja u drugom smeru treba očekivati da raspored frekvencija zbira elementranih grešaka teži ka normalnom rasporedu frekvencija.

ODREĐIVANJE ZAVISNOSTI ODSTOJANJA R I SREDNJE GREŠKE NIVELANJA NAPRED-NAZAD

U saglasnosti sa centralnom graničnom teoremom proizilazi da treba uzeti što veći broj stanica.

Međutim, prisustvo sistematskih grešaka, koje postoje u nivelmanu i o kojima se još ništa stvarno ne zna, a koje rastu sa povećanjem odstojanja R (odnosno broja stanica), sputava nas da odaberemo što duži odsečak.



Sl. 1

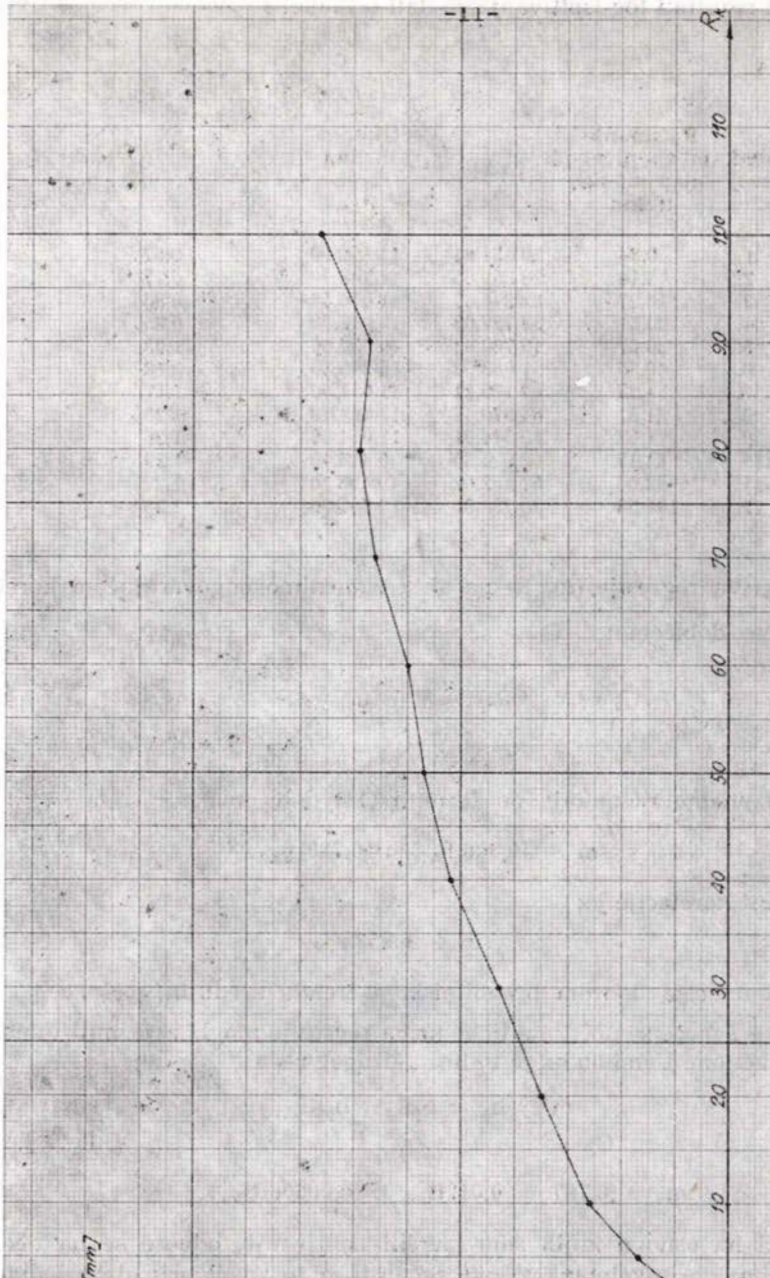
TABLICA 3

Provera normaliteta pomoću χ^2-testa

f_N	f_{G10}	x10^3 $f_{G10}-f_N$	$(f_{G10}-f_N)^2$	$\frac{(f_{G10}-f_N)^2}{f_N}$	f_{G12}	x10^3 $f_{G12}-f_N$	$(f_{G12}-f_N)^2$	$\frac{(f_{G12}-f_N)^2}{f_N}$	f_{G20}	x10^3 $f_{G20}-f_N$	$(f_{G20}-f_N)^2$	$\frac{(f_{G20}-f_N)^2}{f_N}$
0.000.1	0.399	0	0	0	0.399	0	0	0	0.399	0	0	0
0.387	0.387	0	0	0	0.387	0	0	0	0.387	0	0	0
0.352	0.352	0	0	0	0.352	0	0	0	0.352	0	0	0
0.301	0.302	1	1	0.003	0.302	1	1	0.003	0.302	1	1	0.003
0.242	0.244	2	4	0.016	0.244	2	4	0.017	0.243	1	1	0.004
0.183	0.187	4	16	0.086	0.186	3	9	0.049	0.184	1	1	0.005
0.129	0.135	6	36	0.279	0.134	5	25	0.194	0.132	3	9	0.070
0.086	0.093	7	49	0.570	0.092	6	36	0.419	0.090	4	16	0.186
0.054	0.062	8	64	1.185	0.060	6	36	0.667	0.058	4	16	0.296
0.032	0.040	8	64	2.000	0.038	6	36	1.125	0.035	3	9	0.281
0.018	0.024	6	36	2.000	0.023	5	25	1.389	0.021	3	9	0.500
0.009	0.015	6	36	4.000	0.014	5	25	2.778	0.011	2	4	0.444
0.004	0.009	5	25	6.250	0.007	3	9	2.250	0.006	2	4	1.000
0.002.0	0.005.2	3.2	10.24	5.120	0.004.4	2.4	5.76	2.880	0.003.3	1.3	1.69	0.845
0.000.9	0.003.2	2.3	5.29	5.878	0.002.5	1.6	2.56	2.844	0.001.6	0.7	0.49	0.544
0.000.4	0.001.9	1.5	2.25	5.625	0.001.4	1.0	1.00	2.500	0.000.9	0.5	0.25	0.625
0.000.1	0.001.2	1.1	1.21	12.100	0.000.8	0.7	0.49	4.900	0.000.4	0.3	0.09	0.900

Σ 44.861 $\qquad$ Σ 22.015 $\qquad$ Σ 5.703

$= \chi^2_{G10} = 89.722$ $\qquad$ $= \chi^2_{G12} = 44.030$ $\qquad$ $= \chi^2_{G20} = 11.406$



Sl. 2

Mi smo izvršili ispitivanje zavisnosti dužine odsečka R i srednje greške nivelanja i rezultati tog ispitivanja su dati u tablici 4.

TABLICA 4

Red. broj	Računanje m za nivelmansku lin. u km	$[\Delta\Delta]$	Ukupna dužina mreže R_{km}	$m_{[mm]} = \pm \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{4 R_{km}}}$
1.	0.84	20 531,61	11 402,29	0,67
2.	5.14	26 352,65	11 148,40	0,77
3.	10.27	32 244,09	11 014,50	0,86
4.	20.51	39 727,03	10 912,00	0,95
5.	30.67	46 760,63	10 950,00	1,03
6.	40.35	51 083,02	10 249,30	1,12
7.	51,23	60 175,21	11 014,50	1,17
8.	61,51	64 879,47	11 194,40	1,20
9.	71,52	69 544,61	11 014,30	1,26
10.	81,17	62 674,35	9 415,40	1,29
11.	92,07	67 862,02	10 496,10	1,27
12.	101,58	78 758,96	10 665,60	1,36

Ako krivu regresije (m, R) na sl. 2 zamenimo odgovarajućom korelacionom pravom, dobićemo:

$$m = \frac{\sum_{i}^{12} (R_i - R_{sred})(m_i - m_{sred})}{\sum_i (R_i - R_{sred})^2} (R_i - R_{sred}) + m_{sred} \tag{11}$$

Ako izvršimo računanja po formuli (11) dobićemo

$$m = (0{,}006\, R_{km} + 0{,}789)_{mm} \tag{12}$$

a koeficijent korelacije je:

$$r = 0{,}958$$

što govori o dosta dobrom pravoliniskom trendu srednjih grešaka.

Iz slike 2 može se uočiti da bi se kriva regresije mogla zamenuti i nelinearnom korelacijom. Uzmimo da je to linija drugog reda

$$m = b_0 + b_1 R + b_2 R^2 \tag{13}$$

odnosno,

$$m = (0{,}707 + 0{,}012 R_{km} - 0{,}00006 R^2_{km})_{mm} \tag{14}$$

Podaci na osnovu kojih smo izvršili ispitivanje, odnose se na deo naše prethodne mreže nivelmana visoke tačnosti, a to znači pripadaju jednom od načina izvršenih merenja u datoj epohi.

Za svako naredno merenje odnosno za svaku narednu epohu, treba očekivati drugačiju krivu regresije, koja bi trebala da ima tendenciju da postane paralelna sa osom R i da joj se što više približi.

DOZVOLJENO ODSTUPANJE

Pitanje izbora dozvoljenog odstupanja nije dovoljno razmatrano u kompleksu drugih istraživanja u nivelmanu. Sasvim je izvesno da je ono negde manje tolerantno a negde više i da se kreće od 1 do 3 mm pa i više, što govori da je razlika nivelanja donekle falsifikovana i da dozvoljeno odstupanje ima izvestan konvencionalni karakter.

Ukoliko je dozvoljeno odstupanje tolerantnije, tada će ono dati mogućnost izvršiocu nivelanja da smanji pažnju i koncentraciju prilikom merenja, odnosno da se tolerantnije odnosi prema mnogim izvorima grešaka što će naravno uticati na samu tačnost.

Izbor metode rada i instrumenata će također uticati na formiranje dozvoljenog odstupanja, ali na pitanje koju metodu i koji instrument treba upotrebiti da bi se postigla maksimalna tačnost, teško je odgovoriti.

Po našem mišljenju, dozvoljeno odstupanje bi se moglo određivati na ovaj način:

Pre zvaničnog izvršenja radova, potrebno je odabrati karakteristični poligon, na kome bi se izvršila sva potrebna merenja, sa raspoloživim instrumentarijem i po metodi rada koja se trenutno kvalifikovala kao najispravnija.

Ocenu tačnosti dobijenih rezultata izvršiti po metodama matematičke statistike. Tada bi se dozvoljeno odstupanje moglo dobiti po formuli:

$$\Delta = 2\beta\, s \sqrt{R} \tag{15}$$

gde je:

β = Koeficijenat za određivanje kritične granice, određen brojem članova datog uzorka i nivoom signifikantnosti (8, str. 242),

s = standardno odstupanje, dobiveno iz statističke ocene rezultata merenja,

R = dužina nivelmanske strane u km.

Ukoliko nismo u stanju da izvršimo preliminarna merenja tada bi dozvoljeno odstupanje mogli odrediti po formuli:

$$\Delta = 2\beta\,(b_0 + b_1 R)\sqrt{R}, \tag{16}$$

gde su b_0 i b_1 koeficijenti linearne regresije dobiveni po formuli (11) i po postupku koji je već objašnjen.

U tom slučaju za našu mrežu bi imali (α = 1‰)

$$\Delta = 2{,}58\ (0{,}79 + 0{,}006 R_{km}) \sqrt{R_{km}}$$

LITERATURA:

1. A. M. Wassef, Statistical Analysis of Discrepancies in Levelling with Applications to the first-order Levelling of the Nille Delta, Bulletin gèodèsique No. 36-1er juin 1955.
2. A. M. Wassef, F. Z. A. Messih, On the Statistical Distribution of Levelling Errors, Bulletin gèodèsique No. 56-1er juin 1960.
3. A. M. Wassef, Principles and Methods of Statistical Analysis of Levelling Errors, Travaux de l'Association Internationale de Gèodèsie, Tome 21, Paris, 1962.

4. J. Böhm, Statistische Prüfung von Messergebnissen auf Normalverteilung, Zeitschrift für Vermessungswesen, Heft 3, März 1965.
5. R. Marchant et L. Jones, Resultates de recherchers dans le domaine de l'etude statistique des erreures de nivellement, Bulletin gèodèsique No. 94-1er Decembre 1969, Paris.
6. Robert Openhajmer, Nauka i zdrav razum (prevod), Beograd, 1970.
7. A. Einstein, Einleitende Bemerkungen über Grundbegriffe, ogled u knjizi Louis de Broglie-phisicen et penseur, Paris 1953.
8. N. V. Smirnov, I. V. Dunin-Barkovskij, Kurs teorii verojatnostej i matematičeskoj statistiki, Moskva 1965.
9. Vladimir Vranić, Vjerojatnost i statistika, Zagreb, 1970.
10. H. Cramer, Mathematical Methods of Statistics, Princetown, 1946.
11. H. Jeffreys, Theory of Probability, Oxford.
12. N. Svečnikov, Viša geodezija, druga knjiga, Beograd, 1955.
13. M. G. Kendall and A. Stuart, The Advanced Theory of Statistics, London 1963.
14. Savezna geodetska uprava, Analiza metode nivelanja nivelmana visoke tačnosti, predavanja N. Činklovića, Beograd, 1970.