O NIVELMANSKOJ REFRAKCIJI

*Jovan STEVANOVIĆ — Bor**

I pored niza radova na problemu nivelmanske refrakcije, prisutne su konstatacije da zadovoljavajuće rešenje ovog problema nije nađeno. Zahvaljujući pokazanom interesu Savezne geodetske uprave-Beograd za problem nivelmanske refrakcije, koja je preko Rudarsko-metalurškog fakulteta-Bor, finansirala rad na ovom problemu, omogućena su odgovarajuća istraživanja, iz kojih je proizišao i ovaj prilog rešavanju tog problema.

PROBLEM PROMENE TEMPERATURE VAZDUHA SA VISINOM

Osnova za rešavanje problema nivelmanske refrakcije je pretpostavka izometričkih slojeva vazduha iznad tla, koji su paralelni sa tlom. Temperatura ovih slojeva se menja u funkciji visine po nekom zakonu koji može biti izražen jednačinom:

$$t = f(z) \tag{1}$$

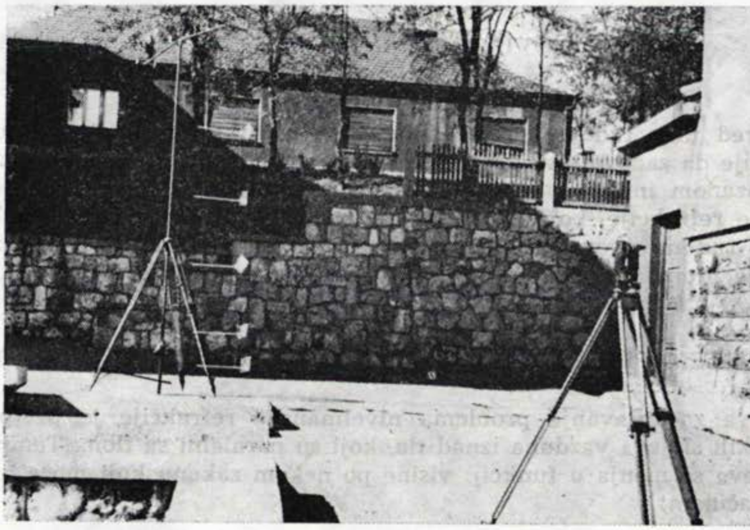
Jedan od osnovnih problema je određivanje što realnije funkcije f(z).

Merenje temperature. U cilju ispitivanja zakonitosti promene temperature vazduha sa visinom, obavljena su odgovarajuća merenja temperature. Temperatura vazduha je merena termometrima. Rađeno je sa 6 termometara koji su bili postavljeni jedan iznad drugog na visinama O, 30, 60, 120, 180 i 240 cm. Termometri su postavljani horizontalno, a najlon koncem su vezani za konzolu na visini od 3 m. Vidi sliku 1. Termometri su uvek bili postavljeni u pravcu sunca što je omogućeno okretanjem konzole oko vertikalnog stožera. Skala termometra je usmerena prema suncu, a živin sud na suprotnu stranu. Na svakom termometru su postavljani zaštitni kartoni 12x12 cm., na nekoliko santimetara od živinog suda, da bi se štitio živin sud od direktnog zračenja sunca. Vidi sliku 2. Kartoni su sa strane prema suncu bili oblepljeni staniolom. Termometar na tlu nije štićen od sunca. Termometri su očitovani teodolitom koji je postavljen na 5 do 6 metara od termometra, tako da je vizura bila upravna na termometre. Temperatura je očitavana do na 0,02°C. Rađeno je sa termometrima čija je skala dužine 40 cm. bila podjeljena na 100°C. Najmanji podeok na termometru je iznosio 0,1°C. Termometri su prethodno ispitani i određene su adicione konstante termometra, koje su iznosile i do 0,2°C.

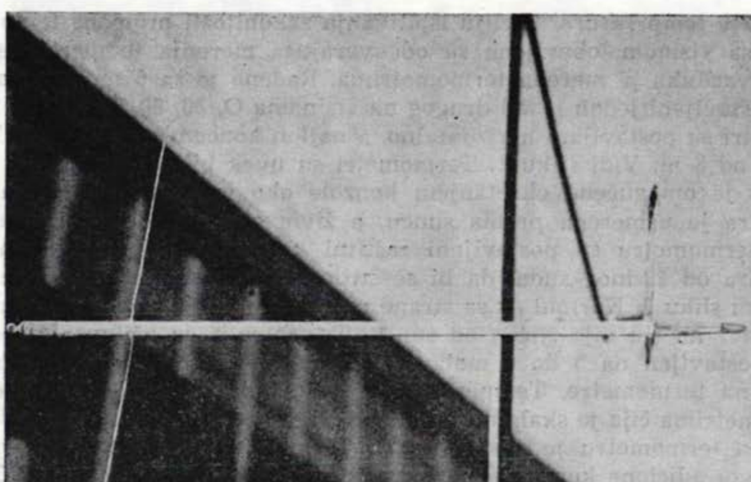
---

* Adresa autora: Prof. dr Jovan Stevanović — Rudarsko metalurški fakultet Bor

Temperatura je merena u serijala tako što su u jednoj seriji očitavani svi termometri po 15 puta. Prvo je čitan termometar na tlu, a zatim po redu svi termometri do krajneg gornjeg, pa opet termometar na tlu itd. Jedno očitavanje svih termometara je iznosilo oko 2 minute, a očitavanje cele serije je trajalo oko 30 minuta. Sva čitanja su ispravljana za konstante termometra. Ukupno je izmereno 30 serija. Ova merenja se odnose na oko 15 sati iz vremenskog perioda u toku dana kada se obavlja nivelanje.



Slika 1.



Slika 2.

U prilogu su dati podaci o pojedinim serijama. U prvom redu, koji odgovara jednoj seriji, date su aritmetičke sredine iz 15 čitanja na svakom termometru. U drugom redu su date temperaturne razlike- τ od tla do svakog termometra, a u trećem redu temperaturne razlike-v između pojedinih termometara.

U prilogu 2 dati su dijagrami promene temperature vazduha sa visinom, upravo dijagrami za vrednost τ iz priloga 1.

O Bestovoj jednačini. Bestova jednačina promene temperature vazduha sa visinom je najšire prihvaćena. Kukamakieva jednačina za refrakciju bazira na Bestovoj jednačini za temperaturu. Zbog ovoga je potrebno zaključiti u kakvom odnosu stoje dobiveni rezultati mjerenja temperature i Bestova jednačina.

Pre svega dijagrami za τ u prilogu 2 nisu uvek u skladu sa graficima koje može da dâ Bestova jednačina za razne vrednosti parametra b i c. Po Kukamakiu, za eliminaciju parametra b i c treba meriti temperature na visinama 33, 100 i 300 cm, pri čemu su odnosi susednih visina jednaki 3. U obavljenim eksperimentima, za visine 30, 60, 120 i 240 cm., odnos susednih visiia je 2. Temperaturne razlike τ i temperaturne razlike v omogućuju određivanje po 5 vrednosti za parametar c za jednu seriju.Rasturanjeovih vrednosti za c interval od 0 do 240 cm, je izrazito veliko, što znači da Bestova jednačina ne može da izrazi promenu temperature sa visinom u tom intervalu. Za interval od 60 do 240 cm, od 30 navedenih serija, samo 9 serija bi mogle zadovoljavajuće, do određenog stepena, da budu interpretirane Bestovom jednačinom.

Iz svega navedenog proizlazi da Bestova jednačina ne može zadovoljavajuće da izrazi fenomen promene temperature vazduha sa visinom ni u celom intervalu od 0 do 3 m, a ni za interval od 60 do 240 cm.

Na osnovu opšteg utiska, pošto nisu evidentirani svi detalji o uslovima pod kojim su se obavljala merenja, moglo bi se zaključiti da Bestova jednačina može da zadovoljavajuće interpretira promenu temperature vazduha sa visinom ako je opšte temperaturno stanje konstantno, tj. u podnevnim časovima kada su uravnoteženi zračenje sunca, temperatura tla i hlađenje, kao i pri oblačnom vremenu kada postoji isto uravnoteženje.

PREDLOG JEDNAČINE ZA TEMPERATURU

Iz navedenih dijagrama je očigledno da će se realnija slika o promeni temperature vazduha sa visinom dobiti ako se na osnovu poligonalnog dijagrama koistruiše odgovarajuća kriva linija. U najopštijem slučaju, samo za interval iznad 60 cm., interpolacioni polinom odgovarajućeg stepena bi se najbolje prilagodio toj krivoj liniji. Ako je temperatura merena u n tačaka duž vertikale na visinama jednakim ili većim od 60 cm., može se koristiti polinom n-l stepena.

Za slučaj sa datim dijagramima mogu se koritsiti temperature u 60, 120, 180 i 240 cm. i postaviti polinom trećeg steepna. Ako bi se merila temperatura i u tački na visini od 300 cm., što bi bilo poželjno bar u fazi istraživanja problema, treba koristiti polinom četvrtog stepena. Iz kasnijeg izlaganja će se videti da je po tačnost refrakcije izuzetno važno poznavati što tačnije temperaturu vazduha na visini instrumenta, pa ako bi se merila i temperatura na visini instrumenta, treba koristiti polinom petog stepena.

Ako uzmemo u razmatranje ovaj po svoj prilici dovoljno uopšten slučaj, interpolacioni polinom za temperaturu bi imao oblik:

$$t = a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 \tag{2}$$

Za slučaj ako su temperature merene u pet tačaka treba smatrati da je $f = 0$, a ako su temperature merene u četiri tačke, treba smatrati da su $e = f = 0$.

Za eliminaciju parametra a, b, c, d, e, i f, treba postaviti jednačine za svaku tačku u kojoj je merena temperatura, čime se dobija dovoljan broj jednačina za određivanje navedenih parametara.

Pri računanju refrakcije parametar *a* nije od važnosti. Parametar a je temperatura tla, što znači da je on svakako poznat, ako je jedan termometar bio na tlu. Međutim, nije prihvatljivo pri formiranju jednačina koristiti podatak za temperaturu za $z = o$, tj. postaviti jdenačinu za $z = o$, jer, zbog ogromnog pada temperature od 0 do 30 cm. po visini, interpolacioni polinom ne može realno da interpretira temperaturno stanje vazduha i za visine iznad 60 cm.

Treba napomenuti da će, ako su, kao u slučaju navedenih dijagrama, temperature merene uvek na istim visinama, u jednačinama da figuriraju uvek iste visine, pa se može sračunati invezna matrica sistema i računanje parametara obavljati na vrlo jednostavan način.

Radi ilustracije korisno je, za slučaj merenih temperatura kao na dijagramima, postaviti jednačine za temperaturu u tačkama sa visinama 60, 120, 180 i 240 cm., čime se dobija:

$$\begin{aligned} t_1 &= a + b \cdot 0{,}6 + c \cdot 0{,}6^2 + d \cdot 0{,}6^3 \\ t_2 &= a + b \cdot 1{,}2 + c \cdot 1{,}2^2 + d \cdot 1{,}2^3 \\ t_3 &= a + b \cdot 1{,}8 + c \cdot 1{,}8^2 + d \cdot 1{,}8^3 \\ t_4 &= a + b \cdot 2{,}4 + c \cdot 2{,}4^2 + d \cdot 2{,}4^3 \end{aligned} \tag{3}$$

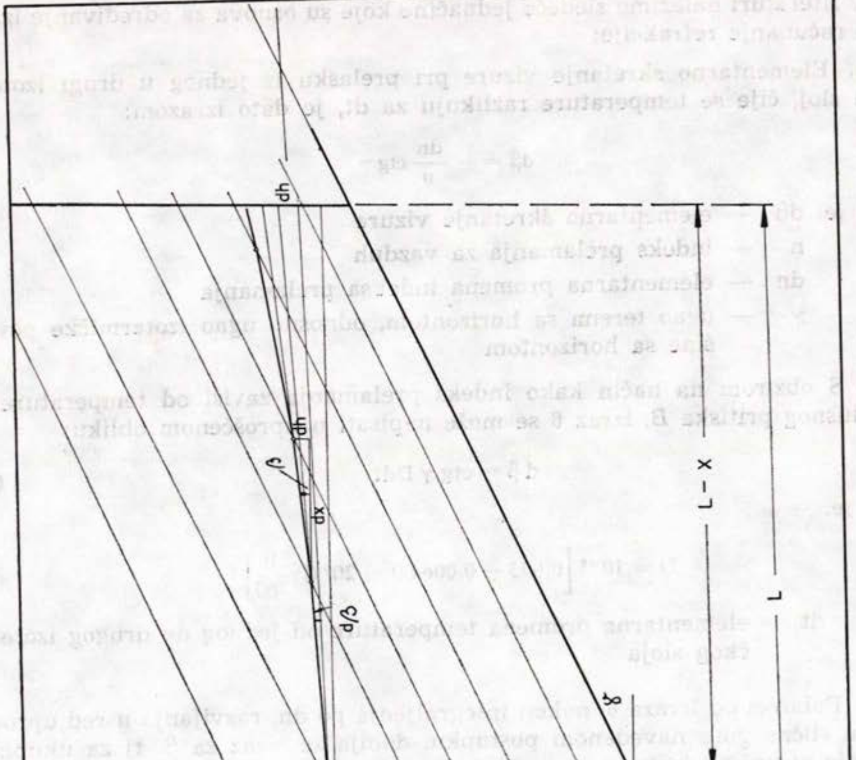
Eliminisanjem parametra a, dobiće se:

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= v_{21} = b \cdot 0{,}6 + c \cdot 1{,}08 + d \cdot 1{,}512 \\ t_3 - t_2 &= v_{32} = b \cdot 0{,}6 + c \cdot 1{,}80 + d \cdot 4{,}104 \\ t_4 - t_3 &= v_{43} = b \cdot 0{,}6 + c \cdot 2{,}52 + d \cdot 7{,}992 \end{aligned} \tag{4}$$

Inverzan sistem ovom sistemu bi bio:

$$\begin{aligned} b &= 7{,}2222 \cdot v_{21} - 8{,}6110 \cdot v_{32} + 3{,}0555 \cdot v_{43} \\ c &= -4{,}1666 \cdot v_{21} + 6{,}9444 \cdot v_{32} - 2{,}7778 \cdot v_{43} \\ d &= 0{,}7716 \cdot v_{21} - 1{,}5432 \cdot v_{32} + 0{,}7716 \cdot v_{43} \end{aligned} \tag{5}$$

Na osnovu merenjem dobivenih vrednosti za temperaturu, lako se mogu sračunati vrednosti v, a zatim i parametri b, c i d ako razpolažemo temperaturama na visinama 60, 120, 180 i 240 cm. Za druge vrednosti visina mora se sračunati njima odgovarajući inverzni sistem jednačina.



Slika 3.

JEDNAČINA ZA REFRAKCIJU

U literaturi nalazimo sledeće jednačine koje su osnova za određivanje izraza za računanje refrakcije:

1. Elementarno skretanje vizure pri prelasku iz jednog u drugi izotermički sloj, čije se temperature razlikuju za dt, je dato izrazom:

$$d\beta = -\frac{dn}{n}\operatorname{ctg}\gamma \tag{6}$$

Ovde je: $d\beta$ — elementarno skretanje vizure
n — indeks prelamanja za vazduh
dn — elementarna promena indeksa prelamanja
γ — ugao terena sa horizontom, odnosno ugao izotermičke površine sa horizontom

2. S obzirom na način kako indeks prelamanja zavisi od temperature *t* i vazdušnog pritiska *B*, izraz 6 se može napisati u uprošćenom obliku:

$$d\beta = \operatorname{ctg}\gamma\, D dt \tag{7}$$

Ovde je:

$$D = 10^{-6}\left[0{,}933 - 0{,}0064\,(t - 20^\circ C)\frac{B}{760}\right] \tag{8}$$

dt — elementarna promena temperature od jednog do drugog izoterčkog sloja

3. Polazeći od izraza 6, nakon integraljenja po dn, razvijanja u red uprošćavanja slično gore navedenom postupku, dobija se izraz za β, tj za ukupno skretanje vizure od instrumenata do odnosne tačke:

$$\beta = \operatorname{ctg}\gamma\, D\,(t - t_0) \tag{9}$$

Ovde je: t — temperatura vazduha u nekoj tački vizure
t_0 — temperatura vazduha kod instrumenta

4. Kako je zbog dejstva refrakcije vizura kriva linija, a β ugao između tangente na tu krivu i horizonta, izraz za elementarnu promenu refrakcije je:

$$dh = \beta\, dx \tag{10}$$

Osim ovog izraza, s obzirom na sl. 3, za elementarnu promenu refrakcije može da se napiše i sledeći izraz:

$$dh = d\beta\,(L - x) \tag{11}$$

Ovde je: dh — elementarna promena refrakcije
x — horizontalno rastojanje od instrumenata do neke tačke na vizuri
L — horizontalno rastojanje od instrumenta do letve

Ako se u, daljim izvođenjima, u jednačinu 10 unese izraz za β, odnosno u jednačinu 11 izraz za $d\beta$, i obavi integraljenje ako je poznata funkcija za promenu temperature sa visinom, dobiće se isti izrazi za refrakciju, što znači da je sve jedno od koje jednačine će se poći u daljoj razradi problema.

Ako se u jednačinu 10 unese vrednost za β, koja je data jednačinom 9, dobiće se:

$$dh = \operatorname{ctg}\gamma\ D\,(t - t_0)\,dx \tag{12}$$

Pošto je prema sl.3:

$$x = \operatorname{ctg}\gamma\,(z_0 - z) \tag{13}$$

biće:

$$dx = -\operatorname{ctg}\gamma\,dz \tag{14}$$

Zamenom izraza za dx u jednačinu 12, ona postaje:

$$dh = \operatorname{ctg}^2\gamma\ D\,(t_0 - t)\,dz \tag{15}$$

Na osnovu ove jednačine je:

$$h = \operatorname{ctg}^2\gamma \cdot D \cdot \int_{Z_0}^{Z} (t_0 - t)\,dz \tag{16}$$

ili dalje:

$$h = \operatorname{ctg}^2\gamma \cdot D\,[t_0\,(z - z_0) - \int_{Z_0}^{Z} t dz] \tag{17}$$

Obzirom na jednačinu 1, ovaj izraz postaje:

$$h = \operatorname{ctg}^2\gamma \cdot D\,[t_0\,(z - z_0) - \int_{Z_0}^{Z} f(z)\,dz] \tag{18}$$

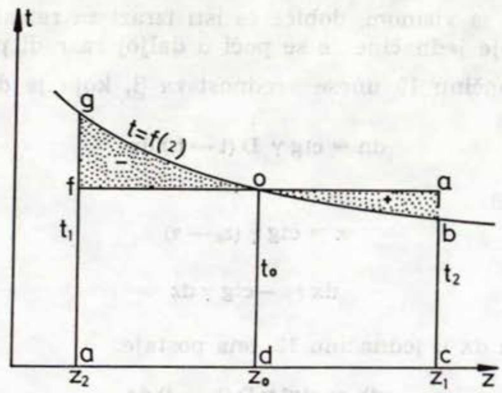
Ako se refrakcija prema donjoj letvi obeleži sa h_1, prema gornjoj sa h_2, biće:

$$h_1 = \operatorname{ctg}^2\gamma \cdot D\,[t_0\,(z_1 - z_0) - \int_{Z_0}^{Z_1} f(z)\,dz] \tag{19}$$

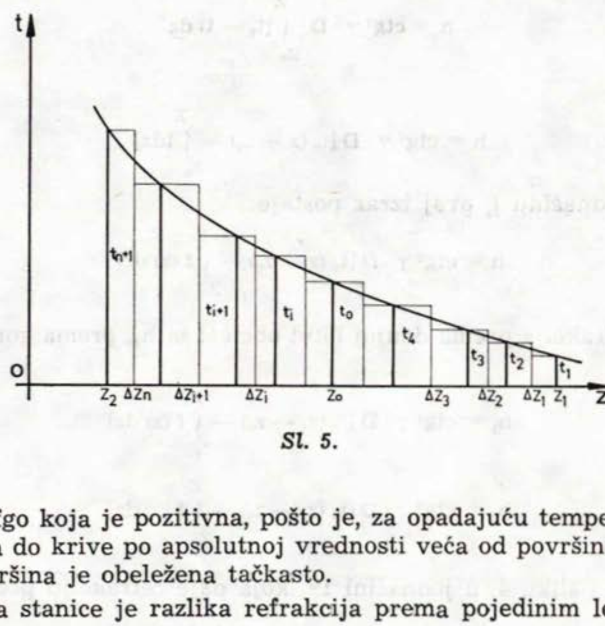
$$h_2 = \operatorname{ctg}^2\gamma \cdot D\,[t_0\,(z_2 - z_0) - \int_{Z_0}^{Z_2} f(z)\,dz] \tag{20}$$

Obzirom na sliku 4, u jednačini 19, koja daje refrakciju prema donjoj letvi, $t_0(z_1 - z_0)$ je površina pravougaonika oacd, koja je pozitivna, a $\int_{Z_0}^{Z_1} f(z)dz$ je površina obcd između apscise i krive, koja je isto pozitivna. Razlika ovih dveju površina je tačkasto obeležena površina oabo koja je, za opadajuću temperaturu sa visinom, pozitivna, jer je površina do krive manja od površine pravougaonika.

U jednačini 20, koja se odnosi na gornju letvu, $t_0(z_2 - z_0)$ je površina pravougaonika odef, koja je negativna, jer je $z_2 - z_0$ negativno, a $\int_{Z_0}^{Z_2} f(z)dz$ je površina odeg između apscise i krive, koja je zbog integracije od veće ka manjoj granici negativna. Razlika ovih dveju površina, u skladu sa jednačinom 20,



Sl. 4.



Sl. 5.

je površina ofgo koja je pozitivna, pošto je, za opadajuću temperaturu sa visinom, površina do krive po apsolutnoj vrednosti veća od površine pravougaonika. I ova površina je obeležena tačkasto.

Refrakcija stanice je razlika refrakcija prema pojedinim letvama:

$$H = h_1 - h_2 = \mathrm{ctg}^2 \gamma D \left[t_0 (z_1 - z_2) - \int_{Z_0}^{Z_1} f(z)\, dz + \int_{Z_0}^{Z_2} f(z)\, dz\right] \tag{21}$$

Ovde se drugi integral, koji ima smer integracije suprotan rašćenju visina, može da napiše sa negativnim znakom i obrnutim granicama, pa bi se u tom slučaju radilo o integraljenuj jedinstvene funkcije od z_2 do z_1, pri čemu jednačina 21 može da se napiše u obliku:

$$H = \mathrm{ctg}^2 \gamma D \left[t_0 (z_1 - z_2) - \int_{Z_2}^{Z_1} f(z)\, dz\right] \tag{22}$$

U ovim jednačinama je z_0 — visina instrumenata, z_1 — čitanje na donjoj letvi, z_2 — čitanje na gornjoj letvi.

Refrakcija stanice je proporcionalna razlici tačkastih površina, pri čemu je, za dnevne temperaturne uslove, površina koja odgovara gornjoj letvi pozitivna, a koja odgovara donjoj letvi negativna.

Ukupna refrakcija je i ovde proporcionalna razlici između površine pravougaonika acef i površine beceg od apscise do kriva za temperaturu. Ako je površina pravougaonika manja, uticaj refrakcije je negativan i u obrnutom slučaju on je pozitivan.

Prema ovome i pri dnevnim temperaturama uticaj refrakcije stanice može biti pozitivan, što zavisi odtoga koja je tačkasta površna iveća po apsolutnoj vrednosti.

U jednačini 22, temperatura (t = f(z) može biti funkcija na različite načine. Ako je t funkcija od z preko Bestove jednačine, i ako se u tom slučaju obavi integracija, dobiće se Kukamakieva jednačina za refrakciju.

Jednačina za refrakciju na osnovu predložene jednačine za temperaturu. Ako se u jednačinu 22 unese izraz za temperaturu koji je dat jednačinom 2, dobiće se:

$$H = \mathrm{ctg}^2 \gamma\, D \left[t_0 (z_1 - z_2) - \int_{z_2}^{z_1} (a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5)\, dz\right] \tag{23}$$

Naokn integraljenja biće:

$$H = \mathrm{ctg}^2 \gamma \cdot D \left\{ t_0 (z_1 - z_2) - a (z_1 - z_2) - \left[b \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_2^2}{2} \right) + c \left(\frac{z_1^3}{3} - \frac{z_2^3}{3} \right) + d \left(\frac{z_1^4}{4} - \frac{z_2^4}{4} \right) + e \left(\frac{z_1^5}{5} - \frac{z_2^5}{5} \right) + f \left(\frac{z_1^6}{6} + \frac{z_2^6}{6} \right) \right] \right\} \tag{24}$$

Temperatura vazduha na visini instrumenta može da se izrazi i kao:

$$t_0 = a + \tau_0 \tag{25}$$

Ako se sa ovim izrazom uđe u jednačinu 24, dobiće se:

$$H = \mathrm{ctg}^2 \gamma \cdot D \left\{ \tau_0 (z_1 - z_2) - \left[b \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_2^2}{2} \right) + c \left(\frac{z_1^3}{3} - \frac{z_2^3}{3} \right) + d \left(\frac{z_1^4}{4} - \frac{z_2^4}{4} \right) + e \left(\frac{z_1^5}{5} - \frac{z_2^5}{5} \right) + f \left(\frac{z_1^6}{6} - \frac{z_2^6}{6} \right) \right] \right\} \tag{26}$$

Ako je jednačina za promenu temperature sa visinom dobivena na osnovu merenjem dobivenih temperatura u pojedinim tačkama, pa i u tački na visini instrumenta z_0, tada treba, na osnovu t_0 odrediti τ_0 i sa tom vrednošću ući u jednačinu 26.

Ako se polazi od neke predpostavljene jednačine za temperaturu, pri čemu nije merena temperatura na visini z_0, tada u jednačini 26 treba za τ_0 uvesti izraz:

$$\tau_0 = t_0 - a = bz_0 + cz^2{}_0 + dz^3{}_0 + ez^4{}_0 + fz^5{}_0 \tag{27}$$

Jednačinom 26 u kombinaciji sa jednačinom 27 je dat definitivan izraz za uticaj refrakcije ako je poznata funkcija za temperaturu i ako ima predpostavljen oblik polinoma petog stepena. Ako imamo merene temperature samo u 5, odnosno samo u 4 tačke, moraće polinom da bude četvrtog odnosno trećeg stepena, pa će za te slučajeve morati da se ide na predpostavku da su f, odnosno f i e jednaki nuli.

RAČUNANJE REFRAKCIJE SUMIRANJEM

Na osnovu slike 4 i jednačine 22 proizlazi da je, za određivanje refrakcije, u slučaju da je poznat dijagram promene temperature vazduha sa visinom, neophodno naći površinu od apscise do ovog dijagrama. Ako nije moguće naći pogodnu jednačinu koja bi mogla da reprezentuje dijagram, tada se problem može rešiti približnom integracijom tj. sumiranjem.

Neka je obzirom na sliku 5 temperatura vazduha poznata u n + 1 proizvoljno raspoređenih tačaka duž vertikale od z_2 do z_l. U tom slučaju može da se smatra da se površina od apscise do dijagrama sastoji od niza trapeza osnovice: $\frac{\Delta z_i}{2} + \frac{\Delta z_{i+1}}{2}$ i srednje visine t_{i+1}. Ako se u jednačinu 22 integral zameni sumom ovih trapeza, dobiće se:

$$H = \mathrm{ctg}^2 \gamma \cdot D \left(t_0 \sum_1^n \Delta z_i - \sum_1^n t_{i+1} \frac{\Delta z_i + \Delta z_{i+1}}{2} - t_1 \frac{\Delta z_1}{2} - t_{n+1} \frac{\Delta z_n}{2} \right) \tag{28}$$

Ovom najopštijom jednačinom se treba poslužiti ako se radi o složenijoj promeni temperature vazduha sa visinom, zbog čega je celishodno odabiranje tačaka u kojima se određuje temperatura.

Ako se radi o jednostavnijim promenama i ako raspolažemo dijagramima za temperaturu, mogu se sa dijagrama uzimati temperature u tačkama na međusobno rastojanjima po z osi, pri čemu će intervali Δz_i biti konstantni. U tom slučaju mogu se ovi konstantni intervali Δz_i izvući ispred zagrade, pa jednačina 28 postaje:

$$H = \mathrm{ctg}^2 \gamma\, D\, \Delta z \left(n t_0 - \sum_1^{n-1} t_{i+1} - \frac{t_1}{2} - \frac{t_{n+1}}{2} \right) \tag{29}$$

Postupak približnog određivanja refrakcije za slučaj merenih temperatura na visinama 60, 120, 180 i 240 cm. U navedinim eksperimentima temperatura vazduha je merena u tačkama na visinama 60, 120, 180 i 240 cm. Pošto se nivelman izvodi sa vizurama višim od 60 cm., to se mogu za računanje refrakcije sumiranjem, iskoristiti dobivene vrednosti za temperaturu u ovim tačkama, i to uz predpostavku da vizure pogađaju letve na visinama 60 i 240 cm., a da je visina instrumenta 150 cm. Približna vrednost temperature na visini instrumenta se može dobiti prostom interpolacijom između temperatura na 120 i 180 cm.:

$$t_{150} = \frac{t_{120} + t_{180}}{2} \tag{30}$$

Polazeći od jednačine 28, u razvijenom obliku dobijamo:

$$H = \mathrm{ctg}^2 \gamma \cdot D \left[t_{150} (300 + 600 + 300 + 600) - t_{60} \frac{600}{2} - t_{120} \frac{600 + 300}{2} - \right.$$
$$\left. - t_{150} \frac{300 + 300}{2} - t_{180} \frac{300 + 600}{2} - t_{240} \frac{600}{2} \right] \tag{31}$$

Na osnovu jednačina 30 i 31 se dobija definitivna jednačina za refrakciju za ovaj slučaj:

$$H = \mathrm{ctg}^2 \gamma \cdot D \cdot 300\, [t_{120} + t_{180} - (t_{60} + t_{240})]\ \mathrm{mm}. \tag{32}$$

Ako su sračunate vrednosti v, kao u navedenom prilogu, ova jednačina može biti napisana i u obliku:

$$H = \mathrm{ctg}^2 \gamma \, D \, 300 \, (v_{120-60} - v_{240-180}) \text{ mm.} \tag{33}$$

Na prvi pogled može da izgleda nelogično da refrakcija ne zavisi od $v_{180-120}$, ali to je zbog činjenice da je $z_0 = 150$, tj. na polovini između 120 i 180, i predpostavke da se temperatura linearno menja od jedne do druge tačke merenja.

(Nastavit će se)