NEKE MOGUĆNOSTI ODREĐIVANJA KARAKTERA SISTEMATSKIH GREŠAKA I REALNIJE OCENE TAČNOSTI MERENJA

Jovan STEVANOVIĆ — Bor*

Karakter uticaja sistematskih grešaka je različit. Različiti su i izvori sistematskih grešaka. U ovom razmatranju će biti posvećena pažnja samo jednoj grupi sistematskih grešaka, upravo sistematskim greškama koje su funkcija vremena.

U 1 je razmatran ovaj problem kroz prizmu kriterijuma o prisutnosti sistematskih grešaka vremena u merenjima, a ovaj rad je dalja razrada tog problema.

Pri merenju često se može uočiti da se rezultati merenja povećavaju ili smanjuju u funkciji redosleda kako su pri merenju dobiveni. Merenja su u tom slučaju opterećena sistematskom greškom koja je funkcija vremena. Svakako je od interesa definisati karakter takve sistematske greške, sa jedne strane, zbog kasnijeg nastojanja da se, dovođenjem u vezu uslova pod kojim su se obavljala merenja i uočenog karaktera sistematskih grešaka, napravi pokušaj da se eventualno otkriju izvori takvih sistematskih grešaka, a sa druge strane da se, uzimajući u obzir karakter promenljivosti sistematskih grešaka, one izoluju i izvrši pravilnija ocena tačnosti merenja.

Sistematska greška može biti funkcija vremena na različite načine. Radi uopštavanja, premda se mogu razmatrati i opštiji slučajevi, pretpostavimo da je sistematska greška koju ćemo obeležiti sa σ funkcija trećeg stepena od vremena. Ako se vreme meri od trenutka kada je počelo merenje merene veličine, izraz za sistematsku grešku bi bio:

$$\sigma = p + qt + rt^2 + st^3 \qquad (1)$$

Izvori sistematskih grešaka do početka merenja uslovljavaju sistematsku grešku koja je za odnosnu seriju merenja konstantna. U navedenoj jednačini ova vrednost sistematske greške je data parametrom p. Kasnije ćemo videti da se ovde izloženim postupkom ova početna greška ne može da izoluje pa ni eliminiše.

Ako pretpostavimo da su vremenski intervali između pojedinih merenja međusobno jednaki što približno i jest, može se ovaj vremenski interval uzeti za jedinicu, pa se u tom slučaju sistematska greška može izraziti kao funkcija redosleda rezultata. Za prvo merenje sistematska greška je *p*, jer je po pretpostavci tada $t = 0$.Do drugog merenja, sistematska greška je delovala u toku

* Adresa autora: Prof. dr Jovan Stevanović — R. M. Fakultet Bor

jednog intervala, do trećeg, ona je delovala u toku dva vremenska intervala itd. Do merenja po redu »i«, ona je delovala u toku i—1 vremenskih intervala. Obzirom na ovo, jednačina (1) može biti napisana u obliku:

$$\sigma_i = p + q(i-1) + r(i-1)^2 + s(i-1)^3 \tag{2}$$

Treba skrenuti pažnju da ovakva promena sistematske greške treba da bude pretpostavljena kod velikog broja merenja. Za manji broj merenja, zbog manje promene sistematske greške, predpostavljena funkcija za sistematsku grešku bi bila jednostavnija. Za najčešće praktikovan broj ponavljanja merenja neke veličine — 4 do 6 puta — logično je predpostaviti, zbog manjeg vremenskog intervala, da se sistematska greška merenja menja linearno sa vremenom, tj. da su parametri *r* i *s* jednaki nuli. Pažljivim posmatranjem rezultata, može se na osnovu samih rezultata zaključiti sa kakvom funkcijom bi trebalo ići na njihovu analizu, a sama funkcija može biti lienearna, drugog ili trećeg stepena, a za vrlo veliki broj merenja i složenu promenu sistematske greške, ona može imati i drugojačiji karakter.

Pri svemu treba imati u vidu da ovaj postupak može imati smisla samo ako je broj merenja znatno veći od broja parametara pretpostavljene funkcije za sistematsku grešku.

Ako je neka veličina merena n puta, dobiveno je n rezultata $l_1; l_2, .. l_n$. Neka je X istinita vrednost te merene veličine, a X najverovatnija dobivena aritmetičkom sredinom na uobičajen način. Kada ne bi bilo sistematskih i slučajnih grešaka, tada bi se mjerenjem dobijali tačni rezultati, tj. za bilo koje mjerenje bilo bi:

$$l_i = \overline{X} \tag{3}$$

Međutim ako je mjerenje l_i opterećeno sistematskom greškom σ_i i slučajnom greškom v_i, tada treba ispraviti l_i za ove vrednosti da bi se dobila najverovatnija vrednost X' koja će se u opštem slučaju razlikovati od aritmetičke sredine X. Veličine σ i v mogu da se tretiraju kao greške ili kao popravke pri čemu im je predznak različit.

Ako su σ i v greške, one se oduzimaju od rezultata merenja, pa bi bilo:

$$l_i - \sigma_i - v_i = X' \tag{4}$$

Ako su σ i v popravke, one se dodaju rezultatima merenja, pa bi bilo:

$$l_i + \sigma_i + v_i = X' \tag{5}$$

Pošto je uobičajeno da se slučajne greške uzimaju u razmatranje preko popravaka, u ovom slučaju je poželjno da se sistematske greške razmatraju kao uticaji, to ćemo u daljem izlaganju poći od izraza:

$$l_i - \sigma_i + v_i = X' \tag{6}$$

Odavde je:

$$v_i = X' + \sigma_i - l_i \tag{7}$$

Obzirom na jednačinu 2, ovaj izraz postaje:

$$v_i = X' + p + q(i-1) + r(i-1)^2 + s(i-1)^3 - l_i \tag{8}$$

U ovoj jednačini su nepoznate popravke v_i, koje su po pretpostavci posledica samo slučajnih grešaka, najverovatnija vrednost X' i parametri p, q, r i s, a može se postaviti n jednačina popravaka. Za ove nepoznate se mogu dobiti najvjerovatnije vrednosti uobičajenim načinom preko uslova minimuma za sumu kvadarata popravaka.

Međutim, pre daljeg izvođenja korisnno je uočiti neke detalje problema. Kako je navedeno, p je konstantni deo sistematske greške ili sistematska greška na početku merenja vremena. X' i p u svim jednačinama popravaka imaju iste koeficijente tj. množeni su samo sa jedinicom, zbog čega je nemoguće preko uslova minimuma naći odvojeno X' i p, već samo zbir ovih dveju veličina. Ako se ovaj zbir, za slučaj koga razmatraju veličine 2 i 8 obeleži sa:

$$x_0 = X' + p_0$$

jednačine popravaka dobivaju oblik:

$$v_i = x_0 + q_0(i-1) + r_0(i-1)^2 + s_0(i-1)^3 - l_i \tag{9}$$

Pošto se radi o početku merenja vremena koji se poklapa sa početkom merenja merene veličine, parametri imaju indeks »o« da bi se razlikovali od parametara za slučaj koji će tek biti razmatran. Iz ovoga sledi da, izravnanjem koga treba obaviti, možemo naći najverovatnije vrednosti za zbir merene veličine i sistematske greške koja odgovara trenutku početka merenja vremena i parametre q_0, r_0 i s_0.

U principu sve jedno je koji će se trenutak uzeti za početak merenja vremena. Za opšte shvatanje problema najlogičnije je da se trenutak početka merenja vremena poklapa sa trenutkom početka merenja merene veličine. Međutim zbog prostijeg oblika normalnih jednačina i jednostavnijih mogućnosti ocene tačnosti, kao i zbog mogućnosti da se najverovatnija vrednost za x u izvesnim slučajevima poklapa sa aritmetičkom sredinom X, korisno je uzeti za početni trenutak merenja vremena, ne početni trenutak merenja merene veličine kako je urađeno, već trenutak u sredini intervala vremena u kome je merenje obavljeno. U tom slučaju bi prva polovina vremenskog intervala merenja merene veličine imala negativno vreme a druga pozitivno.

Ako je n-to merenje obavljeno nakon n-1 pojedinačnih intervala, srednji trenutak merenja bi bio u trenutku $(n-1)/2$. Merenja pre ovog trenutka unazad, ako je n neparno, imala bi redne brojeve u novom sistemu -1, -2, -3, ... $-(n-1)/2$, a merenja posle ovog trenutka bi imala redne brojeve $+1$, $+2$, ... $+(n-1)/2$.

Ako je n parno, novi redni brojevi bi bili $-0{,}5$, $-1{,}5$, $-2{,}5$... odnosno $+0{,}5$, $+1{,}5$, ... U ovom slučaju bolje je zamisliti da vremenski interval u u toku koga traje jedno merenje iznosi dve vremenske jedinice pri čemu bi se u novom sistemu dobili celi neparni brojevi -1, -3, -5, ... odnosno $+1$, $+3$, $+5$, ...

Jednačine 2 bi za opštiji slučaj imale oblik:

$$\sigma_i = p_s + q_s\left(i - 1 - \frac{n-1}{2}\right) + r_s\left(i - 1 - \frac{n-1}{2}\right)^2 + s_s\left(i - 1 - \frac{n-1}{2}\right)^3 \tag{10}$$

a jednačina 9 bi u tom slučaju bila:

$$v_i = x_s + q_s\left(i - 1 - \frac{n-1}{2}\right) + r_s\left(i - 1 - \frac{n-1}{2}\right)^2 + s_s\left(i - 1 - \frac{n-1}{2}\right)^3 - l_i \tag{11}$$

Za ovako usvojen trenutak početka merenja vremena, nepoznate su označene indeksom »s« pri čemu je: $x_s = X' + p_s$.

Teorija posrednog izravnavanja je poznata pa bi bilo suvišno izlaganje o načinu formiranja normalnih jednačina, a mislim da bi bilo i dovoljno i jasno ako se na osnovu izraza 11 prezentira matrica jednačina popravka, a zatim matrica normalnih jednačina u opštem obliku:

Jednačine grešaka

v_i	x_s	q_s	r_s	s	l_i
	a	b	c	d	
1	$+1$	$-\frac{n-1}{2}$	$\left(-\frac{n-1}{2}\right)^2$	$\left(-\frac{n-1}{2}\right)^3$	l_1
2	$+1$	$-\frac{n-1}{2}+1$	$\left(-\frac{n-1}{2}+1\right)^2$	$\left(-\frac{n-1}{2}+1\right)^3$	l_2
$\frac{n-1}{2}-2$	$+1$	-2	4	-8	$l_{\frac{n-1}{2}-2}$
$\frac{n-1}{2}-1$	$+1$	-1	1	-1	$l_{\frac{n-1}{2}-1}$
$\frac{n-1}{2}$	$+1$	0	0	0	$l_{\frac{n-1}{2}}$
$\frac{n-1}{2}+1$	$+1$	1	1	1	$l_{\frac{n-1}{2}+1}$
$\frac{n-1}{2}+2$	$+1$	2	4	8	$l_{\frac{n-1}{2}+2}$
$n-1$	$+1$	$\frac{n-1}{2}-1$	$\left(\frac{n-1}{2}-1\right)^2$	$\left(\frac{n-1}{2}-1\right)^3$	l_{n-1}
n	$+1$	$\frac{n-1}{2}$	$\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{n-1}{2}\right)^3$	l_n

Normalne jednačine

x_s	q_s	r_s	s_s	F
n	0	$2S_2$	0	F_1
0	$2S_2$	0	$2S_4$	F_2
$2S_2$	0	$2S_4$	0	F_3
0	$2S_4$	0	$2S_6$	F_4

U normalnim jednačinama je obeleženo sa:

S_2 — zbir kvadrata svih brojeva od 1 do (n — 1)/2 za neparno n, ili zbir kvadrata brojeva 0,5, 1,5, ... do (n — 1)/2 za parno n.

S_4 — zbir četvrtih stepena svih brojeva od 1 do (n — 1)/2 za neparno n, ili zbir četvrtih stepena brojeva 0,5, 1,5, ... itd. za parno n.

S_6 — zbir šestih stepena svih brojeva od 1 do (n — 1)/2 za neparno n, ili zbir šestih stepena brojeva 0,5, 1,5, ... itd. za parno n.

Promatrajući ove normalne jednačine uočavamo:

— One se relativno lako rešavaju, jer je dosta koeficijenata u njima jednako nuli. Neparne jednačine se mogu odvojeno rešavati od parnih.

— Za najprostiji slučaj, ako bi pretpostavljena funkcija za sistematsku grešku bila linearna, tj. kada bi po pretpostavci r_s i s_s bili jednaki nuli, x_s i q_s se mogu nezavisno određivati. U tom slučaju je $x_s = X$.

— Ako priroda promene sistematske greške uslovljava da je $r_s = 0$, tada se nepoznata x_s može dobiti nezavisno od određivanja koeficijenata q_s i s_s. I u ovom slučaju je $x_s = X$. Za taj slučaj su međuzavisne samo q_s i s_s.

— Nepoznata x_s, bez obzira da li je ona jednaka aritmetičkoj sredini ili ne, izražavaće i ovde najverovatniju vrednost za zbir istinite vrednosti i sistematske greške u trenutku početka merenja vremena.

Kada su određeni parametri x, q, r i s, mogu se jednačinom 11 sračunati popravke v'_i. Popravke sračunate na ovaj način, za razliku od popravaka aritmetičke sredine, su obeležene sa »prim«. Ocena tačnosti merenja bi se dobila preko jednačine:

$$m'^2 = \frac{\Sigma v'_i v'_i}{n-4} \tag{12}$$

Ako je pretpostavljena funkcija sistematske greške linearna, tada su nepoznate samo x_s i q_s, pa bi se ocena tačnosti obavila preko izraza:

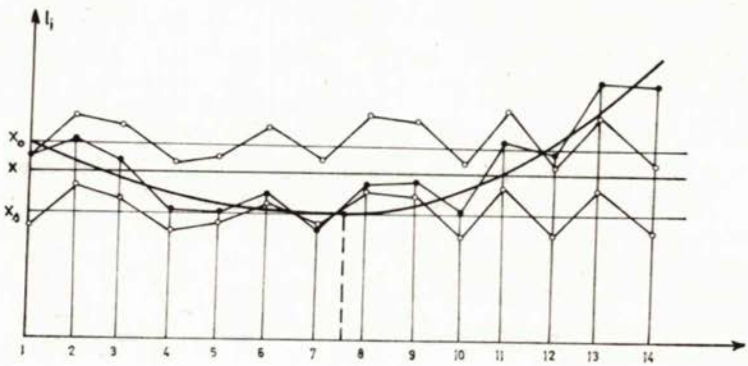
$$m'^2 = \frac{\Sigma v'_i v'_i}{n-2} \tag{13}$$

Na sl. 1 je data ilustracija razmatranog problema. Po apscisi je naneto vreme odnosno redni broj merenja, a po ordinati su naneti rezultati merenja zapunjenim kružićima. Obzirom na rezultate, ucrtana je kriva koja se najbolje prilagođava rezultatima. Ova kriva karakteriše promjenljivost sistematske greške merenja. Ako ne bi bilo sistematskih grešaka koje su funkcija vremena, kriva bi se pretvorila u pravu paralelnu sa apscisom.

Ako se pri analizi trenutak početka merenja vremena poklapa sa početkom merenja merene veličine, izravnavanjem će biti određene nepoznate x_0, q_0, r_0 i s_0. Ako se na osnovu ovih koeficijenata odredi promenljivi deo sistematske greške za svako merenje, koji će biti obeležen sa σ'_i po jednačini:

$$\sigma'_i = q_0(i-1) + r_0(i-1)^2 + s_0(i-1)^3 \tag{14}$$

i isprave rezultati i tako ispravljeni nanesu, na sl. 1 su ovi ispravljeni rezultati naneti nezapunjenim kružićima, oni će da osciliraju oko prave paralelne sa apscisom, na rastojanju x_0 od apscise. Odstupanje ispravljenih rezultata od ove prave karakterisaće slučajne greške merenja. Ocena tačnosti preko jednačina 12 i 13 bazira na ovim odstupanjima. Ova ocena tačnosti može da dâ realniju predstavu o kvalitetu instrumenta, mogućnostima metode, obučenosti operatora itd. ako je izvor sistematskih grešaka izvan ovih činioca.



Sl. 1

Ako se, pri analizi, početak merenja vremena poklapa sa srednjim trenutkom merenja merene veličine, tada će se kao nepoznate dobiti x_s, q_s, r_s i s_s, koje će da se razlikuju od odgovarajućih vrednosti prethodnog slučaja. Ovi parametri definisaće istu krivu sistematskih grešaka, ali u odnosu na novi koordinatni početak. Ako se i ovde sračuna promenljivi deo sistematske greške jednačinom:

$$\sigma_i' = q_s \left(i - 1 - \frac{n-1}{2}\right) + r_s \left(i - 1 - \frac{n-1}{2}\right)^2 + s_s \left(n - 1 - \frac{n-1}{2}\right)^3 \qquad (15)$$

i isprave rezultati mjerenja za σ'_i, pa se tako ispravljeni nanesu na sl. 1, oni će da osciliraju oko prave paralelne sa apscisom na rastojanju x_s od nje. Odstupanja ispravljenih rezultata od ove prave biće slična kao u gornjem slučaju, odnosno ova odstupanja isto karakterišu slučajne greške merenja. Ocena tačnosti imaće isti smisao i daće iste rezultate kao u gornjem slučaju.

Uobičajeni način ocene tačnosti merenja je ocena tačnosti na osnovu popravaka $v_i = X - l_i$, jednačinom:

$$m^2 = \frac{\Sigma v_i v_i}{n-1} \qquad (16)$$

Ova srednja greška će da bude uvek veća i tim više će da se razlikuje od srednjih grešaka dobivenih jednačinom 12 odnosno 13, u koliko je sistematska greška vremena izražajnija.

Kada se radi o najverovatnijoj vrednosti iz n rezultata koju treba dalje koristiti, i oceni tačnosti ove najverovatnije vrednosti, tada treba skrenuti pažnju na pojedinosti.

Zbog nepoznate konstante p, nemoguće je steći neki pojam o pravoj veličini sistematske greške svakog merenja, pa je nemoguće eliminisati sistematske greške u njihovom punom iznosu. Zbog ovoga je najbolje da krajnji rezultat bude opterećen prosečnom sistematskom greškom iz svih merenja, a to će biti ako se za krajnji rezultat usvoji uobičajena aritmetička sredina, jer je:

$$x_s + \frac{\Sigma\sigma'_i}{n} = X \qquad (17)$$

Ocena tačnosti aritmetičke sredine X isto može da se obavi na dva načina:

1. Na osnovu odstupanja od aritmetičke sredine X, tj. popravaka v, poznatom jednačinom:

$$M^2 = \frac{m^2}{n} = \frac{\Sigma vv}{n(n-1)} \qquad (18)$$

2. Na osnovu popravaka v′, nakon obavljene analize. Dosledno izvođenje ocene tačnosti za najopštiji razmatran slučaj je relativno komplikovano. Ovde će da bude razmatrana ocena tačnosti prostijeg slučaja, tj. ako je predpostavljena funkcija sistematske greške linearna. U tom slučaju, u jednačini 17, od koje moramo poći pri oceni tačnosti, je $\Sigma\sigma'_i = 0$, pa je:

$$M_X^2 = M_{x_s}^2 = \frac{m'^2}{n} = \frac{\Sigma v'v'}{n(n-1)} \qquad (19)$$

M i M_x će se, ako egzistira sistematska greška, isto međusobno osetno razlikovati. M_x biće uvek manje od M. Logično objašnjenje ovakvog odnosa ovih srednjih grešaka bi bilo da će, ako postoji simetrično dejstvo promenljivog dela sistematskih grešaka u odnosu na srednji trenutak merenja, aritmetička sredina biti oslobođena tog dela sistematske greške. U tom slučaju ona će biti pogrešna samo zbog slučajnih grešaka v′, a ove su, nakon eliminisanja promenljivog dela sistematske greške često znatno smanjene. Srednja greška M bazira na postavci da su i sve sistematske greške slučajne, dok srednja greška M_x vodi računa samo o zaostalom delu slučajnih grešaka.

Kao primer ovakvog postupka ocene tačnosti obrađena su oba primera koja su navedena u 1. Primeri su obrađeni uz pretpostavku da je sistematska greška linearna funkcija vremena.

U okviru obrade su date jednačine grešaka, normalne jednačine, a zatim rešenja $x_s = X$ i q_s. Naspram rezultata merenja l_i, data su odstupanja od aritmetičke sredine, zatim promenljiv deo sistematske greške $b_i q_s = \sigma'_i$, zatim $x_s + \sigma'_i$, i na kraju popravke v'_i kao razlike između $x_s + \sigma'_i$ i rezultata l_i. Sračunate su i srednje greške m i m′, kao i odgovarajuće srednje greške M i M_x.

Vredi istaći da za prvi primer sistematska greška vremena iznosi + 0,73″, po jednom merenju, a za drugi primer +0″, 64 po jednom merenju. Uočavamo i drastično smanjenje srednje greške merenja sa ± 1″,40 na ± 0″,36, odnosno sa ± 1″,44 na ± 0″,40. Korisno je uočiti da, kao što su prve od navedenh vrednosti prevelike zbog zaista postojećih sistematskih grešaka, tako su druge navedene vrednosti premale, po svoj prilici zbog toga što je i deo slučajnih grešaka pripisan sistematskim greškama, pošto analiza bazira na relativno malom broju obavljenih merenja.

Primer broj 1. Podaci iz gradske trig. mreže Valjeva

Jednačine grešaka

girus	x_s / a_i	q_s / b_i	l_i / 42°58′	$X - l_i =$ / $= v_i$	σ'_i / $b_i q_s$	$x_s + \sigma'_i$ / $x_s + b_i q_s$	$x_s + \sigma'_i - l_i =$ / $= v_i$
1	+ 1	− 2,5	09,0	+ 1,88	− 1,83	9,05	+ 0,05
2	+ 1	− 1,5	09,6	+ 1,28	− 1,10	9,78	+ 0,18
3	+ 1	− 0,5	11,1	− 0,22	− 0,36	11,25	− 0,58
4	+ 1	+ 0,5	10,9	− 0,02	+ 0,36	11,25	+ 0,35
5	+ 1	+ 1,5	11,9	− 1,02	+ 1,10	11,98	+ 0,08
6	+ 1	+ 2,5	12,8	− 1,92	+ 1,83	12,71	− 0,09

[vv] = 9,9486 [vv′] = 0,5083

Normalne jednačine

x_s	q_s	F
6	0	65,3
0	17,50	+ 12,85

$X = x_s = 10,88$

$q_s = + 0,73$

$m = \pm 1,40$ $m' = \pm 0,36$

$M = \pm 0,23$ $M_x = \pm 0,06$

Primer broj 2. Podaci iz gradske trig. mreže Bora

Jednačina grešaka

girus	x_s / a_i	q_s / b_i	l_i / 23°03′	$X - l_i =$ / $= v_i$	σ'_i / $b_i q_s$	$x_s + \sigma'_i$ / $x_s + b_i q_s$	$x_s + \sigma'_i - l_i =$ / $= v_i$
1	+ 1	− 3	37,0	+ 2,21	− 1,93	37,28	+ 0,28
2	+ 1	− 2	38,8	+ 0,91	− 1,29	37,92	− 0,38
3	+ 1	− 1	38,8	+ 0,41	− 0,64	38,57	− 0,23
4	+ 1	0	39,2	+ 0,01	0,00	39,21	− 0,01
5	+ 1	+ 1	39,6	− 0,39	+ 0,64	39,85	+ 0,25
6	+ 1	+ 2	40,0	− 0,79	+ 1,29	40,50	+ 0,50
7	+ 1	+ 3	41,6	− 2,39	+ 1,93	41,14	− 0,46

[vv] = 12,3687 [vv′] = 0,7999

Normalne jednačine

x_s	q_s	F
7	0	274,5
0	38	+ 18,0

$X = x_s = 39,21$

$q_s = + 0,64$

$m = \pm 1,44$ $m' = \pm 0,40$

$M = \pm 0,21$ $M_x = \pm 0,06$

Na kraju, u okviru zaključka, treba naglasiti da je ovde izneta jedna mogućnost ocene tačnosti koja može da bude interesantna, ali ne treba shvatiti, bez dubljeg zalaženja u suštinu problema, da se toj mogućnosti daje apsolutna prednost nad uobičajenim načinom ocene tačnosti. Kod visoko tačnih merenja, korisno je vršiti ocenu i analizu tačnosti preko više mogućnosti, pošto svaka mogućnost može da ukaže na neku posebno važnu okolnost koja se odnosi na merenja.

Literatura:

1. D. Tomković, Otkrivanje sistematskih grešaka u uglovnim merenjima, Geodetska služba br. 5, 1972, Beograd.

2. P. A. Gajdejev, V. D. Boljšakov, Teorija matematičeskoj obrabotki geodezičeskih izmerenii, Moskva, 1969.