

ISPITIVANJE REALNOG GEOIDA U JUGOSLAVIJI

Abdulah MUMINAGIĆ — Beograd

Ovaj članak predstavlja nastavak i završetak članaka objavljenih u G. L. 1—3 i 4—6/69, u kojima je opisan rad na orijentaciji elipsoida za Jugoslaviju. Ovde sam opisao postupak oko ispitivanja realnog geoida, koristeći mnogo rezultate orijentacije. Pomenuti članci zajedno sa ovim su ujedno i kratak prikaz moje disertacije.

1 — *Definicija* — Za površinu geoida koju sam ispitivao usvojio sam naj-približniju koju je Gauss definisao kao:

»Ono što u geometrijskom smislu smatramo površinom Zemlje nije ništa drugo do ona površina koja svuda pod pravim uglom preseca pravac sile teže i čiji deo čini površina svetskog okeana.«

2 — *Merenja sa kojima sam raspolagao* — Za ispitivanja sam raspolagao sledećim podacima:

1. merenjem uglova na 317 stranica sa sr. kv. greškom $\mp 0,92$;
2. 19 osnovica izmerenih invarskim žicama i telurometarskim merenjima figura pogodnih za izravnjanje; srednja tačnost bolja od 1:1000 000;

3 — *astronomskim opažanjima*:

a — na 30 stanica, izvršenim između dva rata;

$$m_{\varphi} = \pm 0'',48, \lambda \text{ nije određivano, } m_{\alpha} = \pm 0'',80;$$

b — na 55 Laplasovih tačaka; $m_{\varphi} = \pm 0'',075$, $m_{\lambda} = \pm 0'',059$

c — na 85 geoidnih tačaka; $m_{\varphi} = \pm 0'',10$, $m_{\lambda} = 0'',12$.

Ukupno sam koristio opažanja na 170 astronomskih stanica, ravnomerno raspoređenih po teritoriji Jugoslavije.

Visinske razlike sam računao po formuli Ölandera:

$$\Delta N_{12} = -0,90 \left[\frac{\xi''_1 + \xi''_2}{2} \Delta \varphi' + \frac{\eta''_1 + \eta''_2}{2} \Delta \lambda' \cos \varphi_1 \right] \text{ cm.} \quad 1$$

1) Ölander me je upozorio da je i on tu formulu od nekog pozajmio, ali se ne seća odakle. Međutim ona se lako izvodi iz opšte formule.

Adresa autora: Dr Abdulah Muminagić — Beograd, Ustanička 12/5

2 — *Formiranje mreže i njezino izravnanje* — Ovako sam sračunao 360 visinskih razlika geoida. Prije uvođenja u računanja ispitao sam ih uvođenjem u jednostavne zatvorene figure u nekoliko kombinacija. Kada su se pojavila neočekivana neslaganja proverena je obrada merenja; u najvećem broju slučajeva otkriveni su sledeći propusti:

- prilikom redukcije astronomskih opažanja pogrešno su dodate popravke;
- trigonometrijske tačke na kojima su izvršena merenja pogrešno su identifikovane, pa astronomske koordinate nisu odgovarale geodetskim;
- popravke za kretanje pola i za srednje vreme dodate sa obratnim znakom;
- astronomske stanice su izabrane na padini, ili u podnožju velikih masiva, što je prouzrokovalo veliki lokalni otklon vertikale u pravcu masiva (Velebit, Korab, Mokra Gora itd.).

Sve pogreške su zatim ispravljene osim poslednje. Prilikom zatvaranja figura u ovim slučajevima primetio sam da se figure bolje zatvaraju kada se uzmu pravci paralelni sa masivom i figura »opasuje« masiv. To mi je zapravo i ukazalo na poreklo velike greške zatvaranja. Kada sam baš morao koristiti pravac upravan na masiv, nastojao sam da uticaj masiva uzmem u obzir po slijedećim formulama:

$$\Delta\xi'' = \frac{\bar{g}-g}{\bar{g}} \cdot \frac{dh}{dx} = 0,0616 \text{ Hm} \frac{dh}{dx} \quad (2)$$

$$\Delta\eta'' = \frac{\bar{g}-g}{\bar{g}} \cdot \frac{dh}{dy} = 0,0616 \text{ Hm} \frac{dh}{dy}$$

gde je $\bar{g} - g$ — anomalija slobodnog vazduha

$\bar{g} = 1000\text{gala}$;

Hm = srednja visina u krugu radiusa 5 km. oko stanice;

$\frac{dh}{dx}$, $\frac{dh}{dy}$ — gradijenti nagiba padine na krugu dijametra 10 km u pravcu x, odn. y ose.

Uvođenjem ovih popravki rezultati su donekle popravljeni (v. tablicu 1), ali se nisu mogli uvesti u mrežu iz dva razloga: prvo, na taj način se ne dobija realni geoid i, drugo, ovako jednostavna formula, izvedena pod pretpostavkom homogenosti materije masiva, ne može izraziti svu složenost njegove unutrašnje građe. Ne može se upotrebiti ni čista astronomsko-geodetska vrednost, jer su ovakvi otkloni vertikale lokalnog karaktera, pa se ne mogu uspešno uvrstiti u formulu (1) zbog njene prirode i teorijske osnove njezinog izvođenja.

Ovakove visinske razlike su korištene samo kao kriterijum za interpolaciju, kada gustina ostalih tačaka nije bila zadovoljavajuća. Za istu svrhu služile su i astronomske tačke opažane između dva rata, kod kojih je komponenta izvedena iz razlike astronomskog i geodetskog azimuta.

Zatvaranje figura za nepopravljenim i popravljenim visinskim razlikama geoida

Tablica 1

Strane		N _{ag} m	N _{popr} m	Strane		N _{ag} m	N _{popr} m
Od	Do			Od	Do		
Trougao 1				Trougao 2			
166	114	-0,03	-0,03	114	191	-1,04	-1,04
114	232	-2,34	-1,95	191	232	-2,85	-2,09
232	166	0,39	0,60	232	114	2,34	1,95
Suma		1,98	-1,38	Suma		-1,55	-1,18
Trougao 3				Trougao 4			
166	191	-0,93	-0,93	166	114	-0,03	
191	232	-2,85	-2,09	114	191	-1,04	
232	166	0,39	0,60	191	166	0,93	
Suma		-3,39	-2,42	Suma		-0,14	

Tablica 2

Br. poligona	Dužina /S km	Očekivano M cm	3 M	Stvarno w	Br. poligona	Dužina /S km	Očekivano M cm	3 M	Stvarno w
1	267	34	102	- 9	18	409	42	126	-63
2	340	39	117	+25	19	480	46	38	-53
3	342	39	117	-72	20	277	35	105	-68
4	365	40	120	- 1	21	683	55	165	+49
5	332	38	114	-67	22	283	35	105	-40
6	161	27	71	+ 5	23	303	37	111	+12
7	260	34	102	+24	24	253	33	99	+20
8	309	37	111	- 7	25	351	40	120	+75
9	220	31	93	+54	26	368	40	120	-78
10	300	36	108	-17	27	315	38	114	-41
11	335	38	114	+72	28	272	35	105	-12
12	302	36	108	+15	29	436	44	132	- 3
13	375	41	123	+39	30	495	47	141	- 8
14	306	37	111	-17	31	441	44	132	-66
15	380	41	123	-66	32	405	42	136	+12
16	280	35	105	-36	33	319	38	114	+47
17	409	42	126	-63	34	528	48	174	+84

Stanica br. 232 leži u podnožju Velebita. Ona sa stanicama 114,166 i 191 formira četvorougao sa obe dijagonale. Trougao br. 4 zatvara se bez pravca sa 232 upravnog na Velebit, što se vidi iz sasvim dobrog zatvaranja figure. Odavde se može izvući zaključak — da geoidne tačke treba birati na vrhovi-ma, ili u sredinama dolina sa simetričnim stranama.

Na kraju pripreme opažačkog materijala, na osnovu podataka zatvaranja trouglova, ocenio sam da se na jedinicu dužine (1 km) može očekivati srednja kvadratna greška od $\pm 2,1$ cm. Kao kriterijum za ocenu prikladnosti poligona za uvrštavanje u mrežu služila mi je trostruka srednja kvadratna greška, sračunata po formuli

$$M_p = \pm 2,1 \sqrt{S_p} \quad (3)$$

gde je M_p — očekivana srednja kvadratna greška, a S_p — dužina poligona u kilogramima. U tablici 2 date su očekivane i stvarne greške zatvaranja.

Tablica 2 pokazuje da se raspored grešaka pokorava Gausovom zakonu slučajnih veličina i da formula (3) održava stvarno nagomilavanje grešaka. Zbog toga sam prilikom izravnivanja usvojio težine obrnuto proporcionalne rastojanjima S_p izražene u kilometrima.

3 — *Izrada karte geoida* — Mreža je izravnata kao slobodna po metodi uslova; dobijene popravke dodane su sračunatim visinskim razlikama. Trebalo je sada izabrati početnu tačku za računanje visina geoida. Smatrao sam da je najprirodnije da to budu fundamentalna tačka triangulacije, kako bismo imali jedinstven koordinatni početak za dužine i visine.

Postavilo se pitanje: kakvu vrednost dati visini u toj tački? Diferencijalne formule koje sam koristio pri određivanju ξ_0 i η_0 pretpostavljale su da u toj tački elipsoid dodiruje geoid, tj. da je $N_0 = 0$. Sasvim je opet prirodno i nastojanje da se merene ortometrijske visine H od usvojene nulte visoke površine ne razlikuju mnogo od geodetskih visina $h = N + H$ od elipsoida. Zbog toga sam sračunao visinu geoida u početnoj tački T_0 iz dva vlaka koja su polazila od iste tačke u Tršćanskom zalivu, nivo mora u kojem je i usvojen kao početak računanja ortometrijskih visina kod nas.

Kao što sam na osnovu prethodnih analiza, i očekivao visina geoida u T_0 se veoma malo ralikovala (-2 cm) od visine geoida na obali Jadranskog mora u Tršćanskom zalivu. Zbog toga sam i usvojio da je $N_0 = 0$. Tako je elipsoid orjentisan i po visini. Posle uzastopnog dodavanja izravnatih visinskih razlika ovoju visini, dobio sam visine svih tačaka uzetih u obzir.

Interpolacija horizontala geoida nije nimalo jednostavan posao jer nema prirodnog modela čiju površinu želimo predstaviti. Zbog toga sam morao tražiti pomoć i geologije i drugih — globalnih ispitivanja geoida, a — kao što sam rekao — i ranija astronomska opažanja. Prvo sam pokušao sa izohipsama na ekvidistanci od 1 m. Kako se izgubilo mnogo detalja, prešao sam na izohipse od 0,5 m. (Pokušaj pak sa $e = 0,25$ m davao je utisak veoma strmih padina, što je nerealno). Zbog toga sam se i zadržao na 0,5 m.

Ako se pogleda karta ovako dobijena geoida, primetiće se strm pad geoida u jadranskoj oblasti. Upoređujući naš geoid sa Uutilinim evropskim geoidom izvedenim na osnovu veoma inventivno korišćenih gravimetrijskih merenja, lako se uoči dosta dobro slaganje u osnovnim crtama: visinskim razlikama geoida u raznim delovima Jugoslavije i strmom padu prema jadranskoj obali, koji se kod Uotile deli na dve grane: jedna ide prema Siciliji, a druga — preko Makedonije, Grčke i Turske prema Kipru. To razdvajanje se nazire i kod nas. Osobito je izražena grana prema Turskoj i Kipru. Zanimljivo je da su sva ova područja — kod nas i naših suseda — trusne oblasti.

Primedba 1 — Formula (1) je očevidno korektna samo onda kada komponente imaju isti znak na oba kraja strane po kojoj se računa visinska razlika geoida. U protivnom premošćujemo male doline realnog geoida, ili sečemo njegove vrhove.

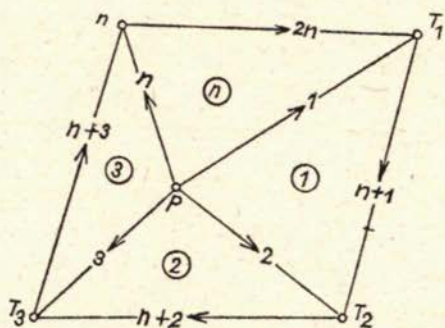
Primedba 2 — Vektor težišnice u Jugoslaviji — zbog geološkog sastava koji se menja na malim rastojanjima — menja svoj pravac skoro sasvim po zakonu slučajnih pojava.

Primedba 3 — Astronomske stanice nisu pravilno raspoređene: gušće su u SAP Vojvodini i ravničarskim delovima SR Hrvatske, nego u planinskim i alpskim krajevima. Trebalo bi biti obrnuto.

4 — *Interpolacija komponentata ξ i η* — Radi okolnosti pobrojanih u primedbama 1—3 pojavila se potreba da se za neke tačke, na kojima nisu vršena astronomska posmatranja, sračunaju komponente ξ i η , odnosno da se i za te tačke sračunaju visine geoida.

Da bih to postigao koristio sam ili metodu uslova, ili metodu posrednih računanja. Kod prve se, naravno, koriste date merne veličine na okolnim stanicama, a kod druge — osim njih treba znati i visine geoida na tim stanicama, a kod druge — osim njih treba znati i visine geoida na tim stranicama.

1. T_1, T_2, \dots, T_n su stranice na kojima su vršena astronomska opažanja,



pa je za njih dato $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots, \xi_n, \eta_n$. P je fiktivna stanica za koju treba sračunati ξ_p i η_p . Kada bi ξ i η bili tačni, moglo bi se zatvoriti n trouglova sa sa greškom zatvaranja nula. Računajući sve ΔN_i po (1) dobije se n jednačina vida:

$$a_i \xi_p + b_i \eta_p + F_i = 0. \quad (4)$$

Njihovim rešenjem po teoriji najmanjih kvadrata dobije se ξ_0 i η_0 u njima je:

$$a_i = \Delta \varphi'_n + i$$

$$b_i = \Delta \lambda'_n + i \cos \varphi_0$$

$$F_i = -\Delta \varphi'_i + 1 \xi_i + \Delta \varphi'_i \xi_i + 1 - \Delta \lambda'_i + 1 \eta_i \cos \varphi_i + \Delta \lambda'_i \eta_i + 1 \eta_i \cos \varphi_i$$

Sve je isto kao i u prvom slučaju, samo su za stanice T_i date visine geoida N_i . . . Ako želimo sračunati visinu N tačke P , onda bi ona trebala biti ista kada se ma kojoj od visina N_i doda odgovarajuća visinska razlika sračunata po (1). Tako imamo:

$$N_0 = N_i + \Delta N_i; \Delta N_i \text{ računato po (1).}$$

Odavde se dobije n jednačina opažanja vida:

$$d \Delta N_i = a_i \xi_0 + b_i \eta_0 + F_i$$

gde je:

$$a_i = 0,45 \Delta \varphi'_i$$

$$b_i = 0,45 \Delta \lambda'_i \cos \varphi_0$$

$$F_i = N_0 - N_i + 0,45(\Delta \varphi'_i \xi_i + \Delta \lambda'_i \cos \varphi_i \eta_i)$$

Ovakve interpolacije sam vršio posebno u prvim ispitivanjima, kada su astronomske tačke bile retke, s ciljem da se dobije opšta slika geoida, iako bez dovoljno podataka.

Docnije su na tim istim mestima izvršena astronomska merenja, pa je bilo moguće — uspoređenjem vrednosti — proveriti metodu.

Uspoređenje računatih komponenta sa opažanim

Tablica 3

Stanica	ξ		η		razlike	
	opažano	računato	opažano	računato	$\Delta \xi$	$\Delta \eta$
15	-13,4	-17,3	-1,5	-5,1	-2,9	-3,6
230	-17,3	-14,6	-9,8	-9,2	+2,7	+0,6
395	-0,1	+1,1	-0,2	+2,4	+1,2	+2,6

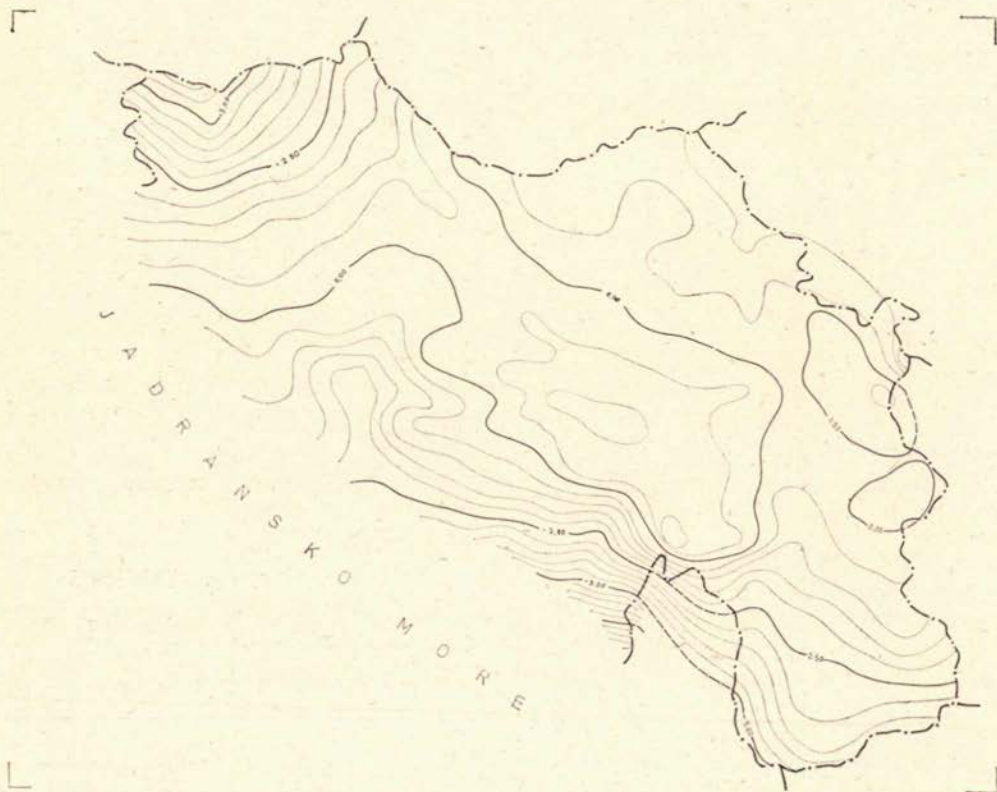
Iz primjedbi 1—3 jasno je da se ova metoda može primeniti u homogenom polju otklona težišnice. Ipak, ni u našim slučajevima razlike nisu velike. Daleko su manje, naprimer, nego razlike između η izvedenih iz dužina i iz azimuta, o čemu ima dokumentacija u disertaciji.

Primenjeni način je dao bolje rezultate nego kad sam koristio Bomfordovu preporuku — zasnovanu na pretpostavci da sve neregularnosti nastaju zbog izostatički kompenzovanog reljefa.

Na osnovu ovih istraživanja izvukao sam zaključke i dao preporuke gde bi trebalo izvršiti dodatna astronomska merenja.

Zanimljivo bi bilo uključiti ovaj naš geoid u jedan od Evropskih, (na primer — za danas najdetaljniji i najbolji — Bomfordov). Profesor Bomford mi je ponudio pomoć da to uradim sam.

KARTA STVARNOG GEOIDA NA TERITORIJI JUGOSLAVIJE
u odnosu na Beselov elipsoid



Smatram da na tome treba nastojati.

Dr. Balodimos sa Nacionalnog univerziteta u Atini je isti posao obavio za Grčku. Opšti tok izohipsa se na granici dosta dobro podudara sa našim geoidom, ali se po visini razlikujemo za oko 8 m. To svakako zavisi od usvojene visine početne tačke.