TRANSFORMACIJA KOORDINATA IZMEĐU SUSJEDNIH KOORDINANTNIH SISTEMA GAUSS - KRÜGEROVE PROJEKCIJE

Mladen BOLT — Zagreb

UVOD — Pojavom elektronskih računala geodetska računanja doživjela su revoluc'ju. Dugotrajno računanje mehaničkim računskim strojevima i raznim tablicama zamjenjeno je vrlo brzim računanjem s elektroničkim računalima.

Korištenje elektroničkih računala velikih kapaciteta još uvijek je vezano za usluge računskih centara, budući da je nabava ovih računala svojom cijenom nepristupačna geodetskim organizacijama. Korištenje usluga u računskim centrima često je vezano uz razne poteškoće, počevši od količine obrada do brzine i cijene usluga.

Stolna elektronička računala zadovoljavaju veći dio potreba za klasičnim računanjem u geodeziji, ali su ograničenog kapaciteta memorije. Svoje opravdanje nalaze u mogućnosti nabave zbog pristupačne cijene, te mogućnosti obrade podataka, koji se javljaju u manjem opsegu ili zahtjevaju pojedinačnu obradu.

Ovdje će biti prikazan jedan od mogućih načina transformacije koordinata između susjedn'h koordinatnih sistema kod Gauss-Krügerove projekcije na stolnom elektroničkom računalu Hewlett-Packard 9100 B. Ovo računalo kapacitetom svoje slobodne memorije od 32 registra jedno je od manjih, koja se danas u nas upotrebljavaju.

1 — RAČUNANJE TRANSFORMACIJE — Transformacija koordinata iz jednog koordinatnog sistema u drugi — susjedni — Gauss-Krügerove projekcije često se javljaju u geodetskoj praksi kod računanja koordinata u blizini graničnog merdijana dvaju sistema. Zadatak se može riješiti na više načina. Ovdje će biti ukratko opisani neki poznati načini transformacije i to:

— neposredna transformacija pomoću tzv. »pomoćnih točaka«,
— transformacija prema Pravilniku za državni premjer [3],
— transformacija prema Tablicama [2].

Detaljnije će b'ti opisan postupak rješenja tog zadatka na stolnom računalu Hewlett-Packard 9100 B.

1. 1 — Računanje transformacije pomoću tzv. »pomoćnih točaka« — Osnovna postavka je neposredna transformaija iz jednog sistema u drugi pomoću tzv. »pomoćnih točaka«, koje se nalaze na graničnom meridijanu

Adresa autora: Mladen Bolt, dipl. inž. Zavod za fotogrametriju Zagreb, Borongajska 71.

dvaju sistema. Za te točke izračunaju se koordinate y i x na svakih 20' — 30' po širini φ, a pored svake pomoćne točke izračunaju se i pripadajući koeficijenti, koji se upotrebljavaju kod računanja. Za račun transformacije izvedene su formule koje glase:

$$x' = x'_0 + h_{11}\Delta x - h_{12}\Delta y + h_{21}\Delta x^2 - 2h_{22}\Delta x\Delta y - h_{21}\Delta y^2 +$$

$$+ h_{31}\Delta x^3 - 3h_{32}\Delta x^2\Delta y - 3h_{31}\Delta x\Delta y^2 + h_{32}\Delta y^3 \qquad (1)$$

$$y' = y'_0 + h_{12}\Delta x + h_{11}\Delta y + h_{22}\Delta x^2 + 2h_{21}\Delta x\Delta y - h_{22}\Delta y^2 +$$

$$+ h_{32}\Delta x^3 + 3h_{31}\Delta x^2\Delta y - 3h_{32}\Delta x\Delta y2 - h_{31}\Delta y^3$$

Gornje formule upotrebljavaju se za računanje računskim strojem, dok su za logaritamsko računanje izvedene slijedeće formule:

$$x' = x'_0 + \Delta x - (1 - h_{11})\Delta x - h_{12}\Delta y + k_2 g^2 \cos(2t + \omega_2) +$$

$$+ k_3 g^3 \cos(3t + \omega_3 \ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

$$y' = y'_0 + \Delta y - (1 - h_{11})\Delta y + h_{12}\Delta x + k_2 g^2 \sin(2t + \omega_2) + k_3 g^3$$

$$\sin(3t + \omega_3) \ldots\ldots\ldots$$

Formule (1) i (2) vrijede za transformaciju iz zapadnog u istočni sistem. Za transformaciju iz istočnog u zapadni sistem koeficijenti, koji zavise od neparnih potencija od Δy mijenjaju predznak. Ove formule izvedene su pod pretpostavkom, da se pomoćna točka nalazi na graničnom meridijanu, a cijeli postupak detaljno je opisan u [1].

1. 2 — Računanje transformacije prema Pravilniku za državni premjer — Prema Pravilniku za državni premjer [3] računanje se vrši po formulama, koje su izvedene pod pretpostavkom, da se pomoćna točka nalazi na glavnom meridijanu onog koordinatnog sistema u koji želimo transformirati koordinate neke točke. Tada formule glase:

$$\overline{y}_{n\pm 1} = \Delta\overline{y} - (1 - h_{11})\Delta\overline{y} \pm h_{12}\Delta\overline{x} + x_2 g^2 \sin(2t + \omega_2) +$$

$$+ x_3 g^3 \sin(3t + \omega_3) + x_4 g^4 \sin(4t + \omega_4) + x_5 g^5 \sin(5t + \omega_5) \qquad (3)$$

$$\overline{x}_{n\pm 1} = \Delta\overline{x} - (1 - h_{11})\Delta \mp h_{12}\Delta\overline{y} + x_2 g^2 \cos(2t + \omega_2) +$$

$$+ x_3 g^3 \cos(3t + \omega_3) + x_4 g^4 \cos(4t + \omega_4) + x_5 g^5 \cos(5t + \omega_5 + \overline{X}_H$$

Računanje po ovim formulama izvodi se u trigonometrijskom obrascu broj 32. Za računanje su potrebne tablice za uzimanje koordinata pomoćnih točaka i potrebnih koeficijenata, te logaritamske tablice s 8 mjesta. Za kontrolu je potrebno izvesti računanje dva puta s dvije pomoćne točke, transformirati dobivene koordinate natrag u sistem iz kojeg su transformirane, ili izvršiti transformaciju pomoću pravokutnih sferoidnih koordinata Soldnera.

1. 3 — Računanje transformacije prema Tablicama [2] — Ovdje su koordinate pomoćnih točaka i koeficijenti tako gusto izračunati (svakih 30" po širini φ) i tabelarno poredani, da se interpolacijom mogu odrediti za svaki x, pa i za zadani, koji se transformira. Time veličine Δx u formulama (1) svodimo na 0, tj. $\Delta x=0$, te izrazi (1) dobivaju ovaj oblik:

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x} \mp b_1(\bar{y} - \bar{y}_0) + b_2(\bar{y} - \bar{y}_0)^2 \mp b_3(\bar{y} - \bar{y}_0)^3 \tag{4}$$

$$\bar{y}_{n+1} = \mp \bar{y}_0 + (\bar{y} - \bar{y}_0) - a_1(\bar{y} - \bar{y}_0) \mp a_2(\bar{y} - \bar{y}_0)^2 - a_3(\bar{y} - \bar{y}_0)^3$$

Računanje po ovim formulama je brzo i jdnostavno upotrebom Tablica [2] i računskog stroja. Izvodi se u trigonometrijskom obrascu 32b.

Ovdje treba napomenuti da su u formulama (1) — (4) upotrebljene različite oznake za iste veličine. Korištene su oznake, koje su upotrebljene u navednoj literaturi.

1. 4 — Računanje transformacije na stolnom električkom računalu. Ovaj zadatak može se riješiti na dva načina. Programski jednostavnije rješenje je po formulama (1). Ulazni podaci su tada koordinate pomoćne točke i pripadajući koeficijenti. Za ovaj način još uvijek su potrebne tablice i unošenje većeg broja podataka. Postavljen je zadatak, da se izradi program s najmanjim brojem ulaznih podataka.

Drugi način temelji se na istoj postavci kao kod Tablica [2]. Za točku, koja se želi transformirati uzima se pomoćna točka s istim x-om. To je u Tablicama [2] riješeno računanjem tablične interpolacije, tj. pomoćna točka i u njoj pripadajući koeficijenti r ačunaju se iz tabličnih razlika interpolacijom.

Kod izrade programa na stolnom računalu, granični meridijan predstavljen je funkcijom $y = f(x)$. Za računanje u elektroničkim računalima vrlo su pogodni interpolacioni polinomi. Ovdje je upotrebljen Lagradgeov interpolacioni polinom 3-eg stupnja. Za njega je potrebno poznavati koordinate 4 točke svojim koordinatama. Kako je u zadatku predviđena transformacija samo iz 5-og u 6-i sistem i obratno za područje Jugoslavije, to su uzete slijedeće 4 točke:

$y_1 = 114\ 246,\ 536$	$x_1 = 5\ 198\ 546,\ 355$
$y_2 = 117\ 049,\ 597$	$x_2 = 5\ 050\ 356,\ 770$
$y_3 = 119\ 788,\ 863$	$x_3 = 4\ 902\ 199,\ 441$
$x_4 = 122\ 462,\ 879$	$x_4 = 4\ 754\ 074,\ 349$

Za računanje s manjim brojčanim vrijednostima reducirane su za račun polinoma koordinate na najmanji x i najmanji y. Nakon računanja dobiven je slijedeći interpolacioni polinom za granični meridijan:

$$y = 7\ 672\ 341 \cdot 10^{-17} x^3 - 1\ 507\ 293 \cdot 10^{-5} x^2$$
$$- 1\ 783\ 083 \cdot 10^{-2} x + 8\ 216\ 343$$

Zadavanjem koordinata neke točke za transformaciju uzimamo pomoćnu točku s istim x-om, a y računamo po gornjoj formuli. Da bi se dobio približan uvid u točnost koordinate y izračunate po gornjoj formuli izvršena je usporedba s vrijednostima iz Tablica [2]. U njima se nalazi 480 izračunatih pomoćnih točaka između uzete najveće i najmanje vrijednosti za x u gornjoj formuli. Vrijednosti y—a izračunate po gornjoj formuli razlikuju se od onih u tablicama od 0 — 4 mm, a srednja greška tih odstupanja iznosi 1,7 mm. Budući da je program izrađen za praktične potrebe, gdje se koriste koordinate na 1 cm, to je ova formula uzeta kao dovoljna.

Na sličan način izračunati su koeficijenti a_1, a_2, b_1 i b_2. Interpolacioni polinomi za koeficijente glase:

$$a_1 = 2,1509 \cdot 10^{-5} x + 63,568$$
$$a_2 = -3,448\,69 \cdot 10^{-13} x^2 - 4,459\,38 \cdot 10^{-6} x + 30,0741$$
$$b_1 = -4,608\,747\,71 \cdot 10^{-10} x^2 + 6,022\,823 \cdot 10^{-4} x + 3565,0477$$
$$b^2 = -7,997\,7 \cdot 10^{-14} x^2 - 3,442\,2 \cdot 10^{-8} x - 1,6111$$

Koeficijenti a_3 i b_3 nisu korišteni zbog ograničenog kapaciteta memorije na stolnom računalu. Utjecaj ovih koeficijenata na udaljenosti do 25 km od graničnog merdijaia iznosi maksimalno 2mm.

Ovime su prethodna računanja završena i prišlo se izradi programa. Program je izrađen za transformaciju iz 5-og u 6-i koordinatni sistem i obratno i to za račun s reduciranim koordinatama. Programom je predviđena i mogućnost računanja transformacije s nereduciranim koordinatama.

Tok programa je slijedeći:

Unesu se reducirane koordinate zadane točke. Prvo se računaju nereducirane koordinate, a zatim se interpolacionim polinomom za zadani x izračuna odgovarajući y na graničnom merdijanu. Time imamo koordinate pomoćne točke. Koeficijenti a_1, a_2 b_1 i b_2 izračunaju se svaki svojim polinomom. Iza toga se po formulama (4) računaju koordinate tražene točke u susjed nom koordinatnom sistemu i izvrši redukciju tih koordinata. Rezultat dobijemo na ekranu i printeru računala.

Ovdje treba naglasiti, da bi veći kapacitet slobodne memorije stalnog raučnala omogućio proširenje programa uzimanjem u obzir koeficijenata a_3 i b_3, izradu programa za više susjednih sistema odjednom i veće područje po širini φ, a vjerovatno i točniji rezultat. Međutim i ovaj program zadovoljava praktične potrebe. Sličan program može se izraditi za transformaciju između bilo koja dva sistema i za bilo koje područje po širiniφ.

Izrada samog programa ne će se ovdje iznositi, jer je ona specifična za svako računalo. Spomenuto računalo ima 32 registra slobodne memorije i danas već spada u jedno od manjih po kapacitetu memorije.

Izvođenje računanja nakon unošenja programa s kartice sastoji se u unošenju samo koordinata zadane točke. Rezultat se pojavljuje gotovo istovremeno na ekranu. Cijeli postupak za račun transformacijze jedne točke tj. unošenja koordinata zadane točke i prepisivanje rezultata traje manje od jedne minute.

Za navedene primjere u [1], [2] i [3] izračunata je transformacija i opisanim programom na stolnom računalu. Dobiveni su slijedeći rezultati:

Transformacija iz 5-og u 6-i koordinatni sistem:

Točka:	Transformacija klasično:		Transformacija na računalu:		Razlika:
Priseka	y = —133	323,930	y = —133	323,931	—0,001
	x = 5008	502,903	x = 5008	502,902	+0,001
Kloštar	y = —122	619,402	y = —122	619,407	—0,005
Ivanić	x = 5067	757,254	x = 5067	757,253	+0,001
Haganj	y = —109	966,499	y = —109	966,503	—0,004
	x = 5086	863,530	x = 5086	863,531	—0,001
Kalnik	y = —119	023,566	y = —119	023,573	—0,007
	x = 5111	342,128	x = 5111	342,129	—0,001

Transformacija iz 6-og u 5-i koordinatni sistem:

Točka:	Transformacija klasično:		Transformacija na računalu:		Razlika:
Priseka:	y = +102	347,254	y = +102	347,255	—0,001
	x = 5007	927,291	x = 5007	927,291	0,000
Kloštar	y = +110	832,254	y = +110	832,258	—0,004
Ivanić	x = 5067	536,204	x = 5067	536,204	0,000
Haganj	y = +122	758,826	y = +122	758,829	—0,003
	x = 5087	104,140	x = 5087	104,139	+0,001
Kalnik	y = +112	785,889	y = +112	785,896	—0,007
	x = 5111	224,370	x = 5111	224,372	—0,002

ZAKLJUČAK — Iz navedenih primjera vidi se, da su odstupanja kod transformacije za y veća, a manja za x. Najviše utjecaja na to odstupanje ima vrijednost y-a, koja se izračunava interpolacionim polinomom. Međutim svrha zadatka i namjera ovog članka nije bila da se ispituje točnost, koja se postiže ovim načinom transformacije, nego da ukažu na različite mogućnosti upotrebe stolnih električnih računala. Ova računala već se upotrebljavaju u našoj praksi. Svakim danom pojavljuju se sve novije i opsegom memorije veća stolna računala. Danas imamo stolna računala kapaciteta slobodne memorije od 8000 riječi (Hewlett-Packard 9830). Jasno je da se na njima mogu izvoditi računanja jednostavnije i brže, kao i rješavati opsežniji problemi. Račun transformacije koordinata na računalu HP 9100B ukazuje, da se pored uobičajnih računanja (poligoni, presjecanje, račun trokuta i drugi) na ovakvim računalima mogu izvoditi i drugi zadaci na dosad neuobičajni način.

SUMMARY: This article shows one of the possibile ways of computation the transformation of coordinates between two neighbouring coordinate systemes in the Gauss-Krugerprojection by means of the desktop computer HP 9100B. The article begins with a short description of the three classical ways of transformation to proceed with the procedure of somputation the transformation on the desktop computer. The programme computes the coordinate of the auxiliary point and the coefficients of the transformation by means of interpolation polynoms. The input data are only the given coordinates of the point to be transformaed while the autopt data are the coordinates of this transformed point the new system.

LITERATURA:

[1] Borčić: Gaus-Krigerova projekcija — Beograd 1955

[2] Borčić: Tablice za transformaciju koordinata između susjednih koordinatnih sistema kod Gauss-Krügerove projekcije — Beograd 1958

[3] Pravilnik za državni premjer I. dio — Beograd 1951