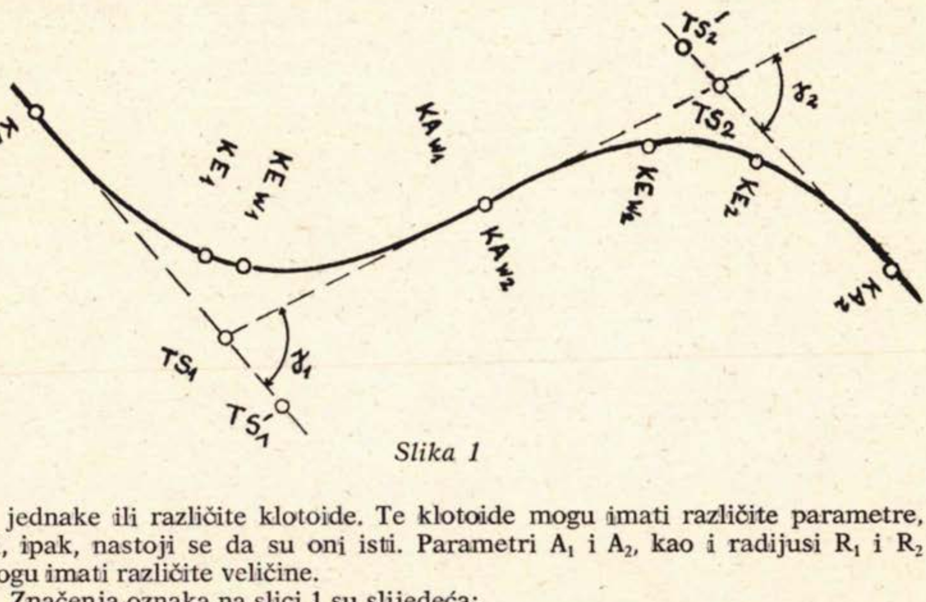
RAČUNANJE ELEMENATA KLOTOIDE U OBLIKU S-KRIVULJE

Borče PAUNOVSKI, Kiro STOJANOSKI — Skopje

Klotoida kao obratna linija u obliku S-krivulje, poznata u stručnoj literaturi pod nazivom — kontra krivina — nastaje vezivanjem dva suprotno položena kružna luka bez međupravaca. Kružni lukovi, pak, spajaju se sa glavnim tangentama, tj. sa pravcima, opet preko klotoide, te tako nastaje slijedeći niz: pravac — klotoida — kružni luk — klotoida kao S-krivulja — kružni luk — klotoida — pravac, sl. 1. Obratna linija se može sastojati iz dvi-



Slika 1

je jednake ili različite klotoide. Te klotoide mogu imati različite parametre, ali, ipak, nastoji se da su oni isti. Parametri A_1 i A_2, kao i radijusi R_1 i R_2 mogu imati različite veličine.

Značenja oznaka na slici 1 su slijedeća:

KA — koordinatni početak klotoide, odnosno koordinatni početak za obilježavanje;

KE — zajednička tačka klotoide i kružne krivine (kraj klotoide i početak kružne krivine);

KA_w — koordinatni početak obratne linije, koja je sastavljena iz dvije klotoidne grane;

Adresa autora: Paunovski Borče, dipl. ing. — Republička geodetska uprava, Skopje
Stojanoski Kiro, dipl. ing. Zemjodelsko-šumarski fakultet, Skopje

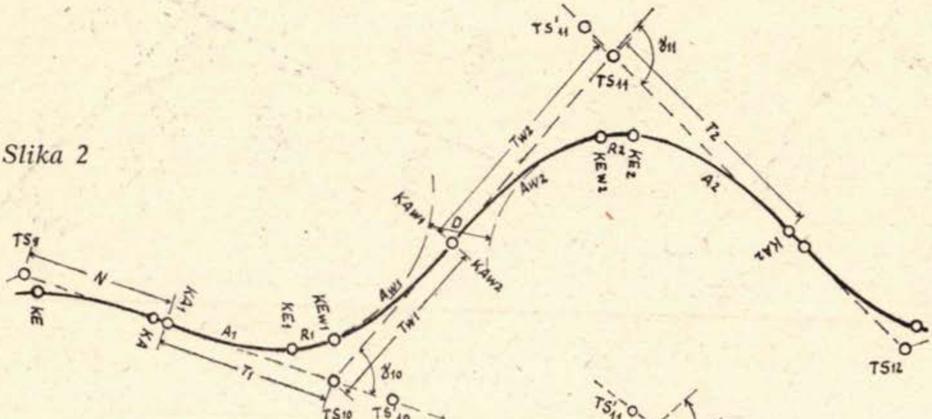
KE_w — zajednička tačka obratne linije i kružne krivine (kraj klotoidne grane obratne linije i početak kružne krivine).

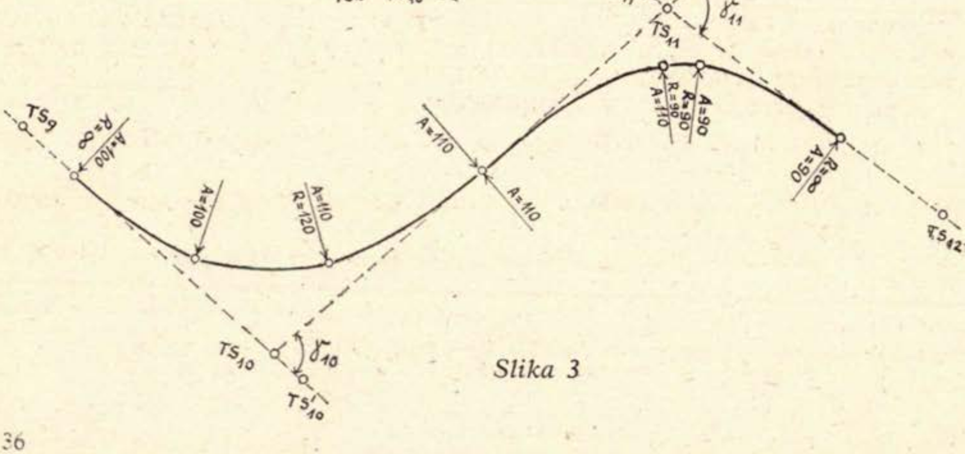
Računanje elemenata jednog takvog slijeda linija kakav je prikazan na sl. 1 može se izvršiti na različite načine što zavisi od postavljenih zahtjeva. Tako, na primjer, ako je postavljen zahtjev da tangenta obratne linije ne mijenja svoj položaj, t. j. da ona mora prolaziti sjecištima tangenata TS_1 i TS'_2 tada se prilikom računanja mora uzeti u obzir najmanje jedan nezaokruženi parametar. Ako, pak, tangenta obratne linije nije čvrsta, što znači da može neznatno promjeniti pravac, tada se grafički elementi lukova mogu bez daljnjega zadržati. To će zapravo biti t. zv. normalni slučaj računanja obratne linije sa zaokruženim vrijednostima za sve elemente lukova. U tom slučaju pored ostalog treba sračunati koordinate tačaka TS_1 i TS_2 koje će se neznatno razlikovati od zadatih koordinata tačaka TS'_1 i TS'_2. Naime, prilikom sastavljanja projekta tangenata obratne linije uzima se da prolazi sjecištima TS'_1 i TS'_2.

Ovdje će biti dat primjer računanja elemenata klotoide kao obratne linije uzimajući u obzir zaokružene vrijednosti za sve lučne elemente (normalni slučaj).

Iz projekata su na osnovu grafičkog rješenja uzeti lučni elementi kao i dužina N sa kojom je određen klotoidni početak KA_1, odnosno početak slijeda linija, sl. 2 i sl. 3.

Slika 2



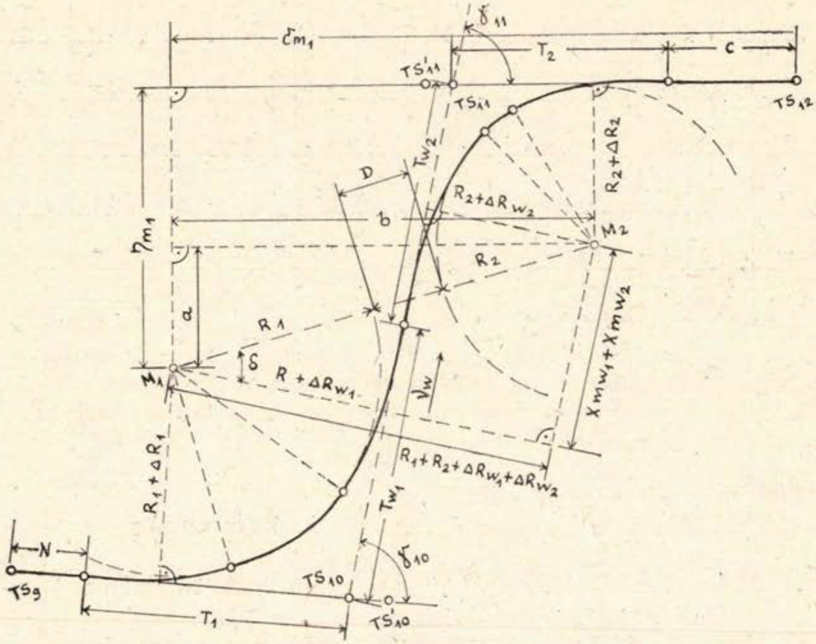


Slika 3

Prema tomu date su slijedeće veličine: koordinate presjecišta tangenata TS_9, TS_{12}, TS'_{10} i TS'_{11}; A_1, R_1, A_w, R_2, A_2 i N.

Potrebno je odrediti: elemente klotoide za A_1, A_w i A_2; koordinate presjecišta tangenata TS_{10} i TS_{11}; dužine tangenata T_1, T_{w1}, T_{w2}, i T_2; dužina kružnih lukova b_1 i b_2.

Postupak računanja ilustriran je slikom 4.



Slika 4

Primjer:

DATE VELIČINE IZ PROJEKTA

Koordinate sjecišta tangenata:

TS_9	7 504 329,52$_1$	4 572 731,07$_0$
TS'_{10}	7 504 525,54$_1$	4 572 639,98$_8$
TS'_{11}	7 504 645,52$_2$	4 572 911,10$_3$
TS_{12}	7 504 847,64$_0$	4 572 838,73$_2$

Lučni elementi: $A_1 = 100$ m, $R_1 = 120$ m,
$A_{w1} = A_{w2} = 110$ m,
$A_2 = 90$ m, $R_2 = 90$ m.

Klotoidni početak KA_1 posredstvom udaljenosti **N = 42,18 m.**

Redoslijed računanja je slijedeći:

a — Uzimanje elemenata iz tablice

Element	Veličina	Element	Veličina	Element	Veličina	Element	Veličina
$R_1 =$	120.00	$R_1 =$	120.00	$R_2 =$	90.00	$R_2 =$	90.00
$A_1 =$	100.00	$A_{W_1} =$	110.00	$A_{W_2} =$	110.00	$A_2 =$	90.00
$L_1 =$	83.33	$L_{W_1} =$	100.83	$L_{W_2} =$	134.44	$L_2 =$	90.00
$\Delta R_1 =$	2.40	$\Delta R_{W_1} =$	3.51	$\Delta R_{W_2} =$	8.20	$\Delta R_2 =$	3.72
$X_{m_1} =$	41.50	$X_{m_{W_1}} =$	50.12	$X_{m_{W_2}} =$	65.99	$X_{m_2} =$	44.63
$X_1 =$	82.33	$X_{W_1} =$	99.07	$X_{W_2} =$	127.14	$X_2 =$	87.78
$Y_1 =$	9.56	$Y_{W_1} =$	13.94	$Y_{W_2} =$	32.16	$Y_2 =$	14.73
$\tau_1 =$	19° 53′ 40″	$\tau_{W_1} =$	24° 04′ 20″	$\tau_{W_2} =$	42° 47′ 42″	$\tau_2 =$	28° 38′ 52″

Elementi su uzeti iz knjige »Die Klotoide als Trassierungselement« od Kasper-Schürba-Lorenz-a, koja je pod gornjim naslovom izašla u izdanju Dümmler Verlag, Boni, 1954. Kod uzimanja elemenata korišćena je tablica A.

b — Računanje koordinata središta M_1

Računanje koordinata malih tačaka			Proba: $\Delta Y_n = o.S_n$, $\Delta X_n = a.S_n$	
Red. broj	$S=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$	$o=\frac{Y_b-Y_a}{S}$ $Y_n=Y_{n-1}+o.S_n$	$a=\frac{X_b-X_a}{S}$ $X_n=X_{n-1}+a.S_n$	Broj tačke
S=	216.15	o=+0.90687	a=−0.42142	
		504 329.52	572 731.07	TS_9
	83.68	+ 75.89	− 35.26	
		504 405.41	572 695.81	$F_p M_1$
1	(+122.40)	± 51.58	± 111.00	
		504 456.99	572 806.81	M_1
	132.47	± 120.13	− 55.83	
		504 577.12	572 750.98	F_p
	(−122.40)	− 51.58	− 111.00	
		504 525.54	572 639.98	TS'_{10}
		+ 196.09	− 91.09	

Računanje potrebnih dužina

$$S = \sqrt{196.09^2 + 91.09^2}$$

$$S = 216.15 \text{ m.}$$

$N = 42.18$	$R_1 = 120.00$	216.15
$X_{m_1} = 41.50$	$\Delta R_1 = 2.40$	− 83.68
$TS_9 - F_p = 83.68$	$R + \Delta R_1 = 122.40$	132.47

c — Transformacija koordinata središta M_1 u sistem tangente TS_{12} — TS'_{11}.
Rezultat: η_{ml} i ψ_{ml}

$S^2 = \Delta Y^2 + \Delta X^2$	ΔY / Y / o = −0.94145			ΔX / X / a = +0.33709			Tačka
$S=\sqrt{202.12^2+72.37^2}$	504	847.	64	572	838.	73	TS_{12}
	−	390.	65	−	31.	92	
S = 214.69	504	456.	99	572	806.	81	M_1
	+	188.	53	+	104.	29	
	504	645.	52	572	911.	10	TS'_{11}
	−	202.	12	+	72.	37	

	$+a\cdot\Delta Y$ / $-o\cdot\Delta X$ / η_p			$+a\cdot\Delta X$ / $+o\cdot\Delta Y$ / ψ_p			Tačka
		0.	00		0.	00	TS_{12}
	−	131.	68	−	10.	76	
	−	30	05	+	367.	78	
	−	161.	73	+	357.	02	M_1
	+	63.	55	+	35.	16	
	+	98.	18	−	177.	49	
		0.	00	+	214.	69	TS'_{11}
Treba:		0.	00		214.	69	

d — Računanje udaljenosti između središta M_1 i M_2

$$\overline{M_1M_2} = \sqrt{(R_1 + R_2 + \Delta R_{w1} + \Delta R_{w2})^2 + (X_{mw1} + X_{mw2})^2}$$

$$\overline{M_1M_2} = \sqrt{(120{,}00 + 90{,}00 + 3{,}51 + 8{,}20)^2 + (50{,}12 + 65{,}99)^2} = 250{,}27$$

e — Računanje dužina a, b i c

$$a = \eta_{ml} - (R_2 + \Delta R_2) = 161{,}73 - 93{,}72 = 68{,}01 \text{ m.}$$

$$b = \sqrt{\overline{M_1M_2}^2 - a^2} = \sqrt{250{,}27^2 - 68{,}1^2} = 240{,}85 \text{ m.}$$

$$c = \psi_{ml} - b - x_{m2} = 357{,}02 - 250{,}85 - 44{,}63 = 71{,}54.$$

f — Računanje koordinata središta M_2

Računanje koordinata malih tačaka									Proba: $\Delta Y_n = o.S_n$, $\Delta X_n = a.S_n$
Redni broj	$S=\sqrt{\Delta X^2+\Delta Y^2}$		$o=\frac{Y_b-Y_a}{S}$ / $Y_n=Y_{n-1}+o.S_n$			$a=\frac{X_b-X_a}{S}$ / $X_n=X_{n-1}+a.S_n$			Broj tačke
S=	214.	69	o = −0.94145			a = +0.33709			
			504	847.	64	572	838.	73	TS_{12}
	116.	17	−	109.	37	+	39.	16	
			504	738.	27	572	877.	89	F_pM_2
2	(−93.	72)	−	31.	59	−	88.	23	
			504	706.	68	572	789.	66	M_2
	98.	52	−	92.	75	+	33.	21	
			504	613.	93	572	822.	87	F_p
	(+93.	72)	+	31.	59	+	88.	23	
			504	645.	52	572	911.	10	TS'_{11}
			−	202.	12	+	72.	37	

Računanje potrebnih dužina

$$S = \sqrt{202.12^2 + 72.37^2}$$

$$S = 214.69 \text{ m.}$$

c = 71.54	R_2 = 90.00	214.69
X_{M_2} = 44.63	ΔR_2 = 3.72	116.17
$S_{12}-F_{pM_2}$ = 116.17	$R_2+\Delta R_2$ = 93.72	M_2-F_p = 98.52

g — Računanje smjera kuta $\nu_{M1,M2}$ i kontrola rastojanja $\overline{M_1M_2}$

	Y	X	
M_1	7 504 456,99	4 572 806,81	$\mathrm{tg}\ \nu_{M1M2} = 0{,}06869$
M_2	7 504 706,68	4 572 789,66	$\nu_{M1M2} = 93°55'45''$
	+ 249,69	— 17,15	

$\overline{M_1M_2} = \sqrt{249{,}69^2 + 17{,}15^2} = 250{,}28$ m, treba 250,27 m.

h — Računanje kuta δ

$$\mathrm{tg}\ \delta = \frac{X_{mw1} + X_{mw2}}{R_1 + R_2 + \Delta R_{w1} + \Delta R_{w2}} = \frac{116{,}11}{221{,}71}$$

$$\delta = 27°38'28''$$

i — Računanje kutova γ_{10} i γ_{11} u sjecištima glavnih tangenata sa tangentom S-klotoide

$$\nu_{M1M2} = 93°\,55'\,45'' \qquad \delta = 27°\,38'\,28''$$
$$= 90°\,00'\,00''$$
$$\nu_w = 31°\,34'\,13''$$

	Y	X
TS_9	504 329,52	572 731,07
TS_{10}'	504 525,54	572 639,98
	+ 196,02	— 91,09

$\mathrm{tg}\ \nu_{9,10'} = -2{,}15194$

$\nu_{9,10'} = 114°\,55'\,27''$

$-\nu_w = 31°\,34'\,13''$

$\delta_{10} = 83°\,21'\,14'' = 83{,}°3539$

	Y	X
TS_{11}	504 645,52	572 911,10
TS_{12}	504 847,64	572 838,73
	+ 202,12	— 72,73

$\mathrm{tg}\ \nu_{11',12} = -2{,}79287$

$\nu_{11',12} = 109°\,42'\,00''$

$-\nu_w = 31°\,34'\,13''$

$\delta_{11} = 78°\,07'\,47'' = 78{,}°1297$

k — Računanje dužina tangenata T_1, T_{w1}, T_{w2} i T_2

za luk kod TS_{10}

$$\frac{\delta_{10}}{2} = 41°\,40'\,37''$$

$$R_1 + \Delta R_1 = 122{,}40$$
$$R_1 + \Delta R_{w1} = 123{,}51$$
$$\Delta R_{w1} - \Delta R_1 = 1{,}11$$

$$t_1 = \mathrm{tg}\frac{\delta_{10}}{2}(R_1 + \Delta R_1)$$

$$t_1 = 0{,}89025 \cdot 122{,}40$$
$$t_1 = 108{,}97$$

$$t_2 = \mathrm{tg}\frac{\delta_{10}}{2}(R_1 + \Delta R_{w1})$$

$$t_2 = 0{,}89025 \cdot 123{,}51$$
$$t_2 = 109{,}95$$

za luk kod TS_{11}

$$\frac{\delta_{10}}{2} = 39°\,03'\,54''$$

$$R_2 + \Delta R_{w2} = 98{,}20$$
$$R_2 + \Delta R_2 = 93{,}72$$
$$\Delta R_2 - \Delta R_{w2} = -4{,}48$$

$$t_1 = \mathrm{tg}\frac{\delta_{11}}{2}(R_2 + \Delta R_{w2})$$

$$t_1 = 0{,}81166 \cdot 98{,}20$$
$$t_1 = 79{,}71$$

$$t_2 = \mathrm{tg}\frac{\delta_{11}}{2}(R_2 + \Delta R_2)$$

$$t_2 = 0{,}81166 \cdot 93{,}72$$
$$t_2 = 76{,}07$$

(Kod nesimetričnih prelaznica računa se i veličina d)

$$d = \frac{\Delta R_{w1} - \Delta R_1}{\sin\delta_{10}} \qquad d = \frac{\Delta R_2 - \Delta R_{w2}}{\sin\delta_{11}}$$

$$d = \frac{+1{,}11}{0{,}99328} \qquad d = \frac{-4{,}48}{0{,}97862}$$

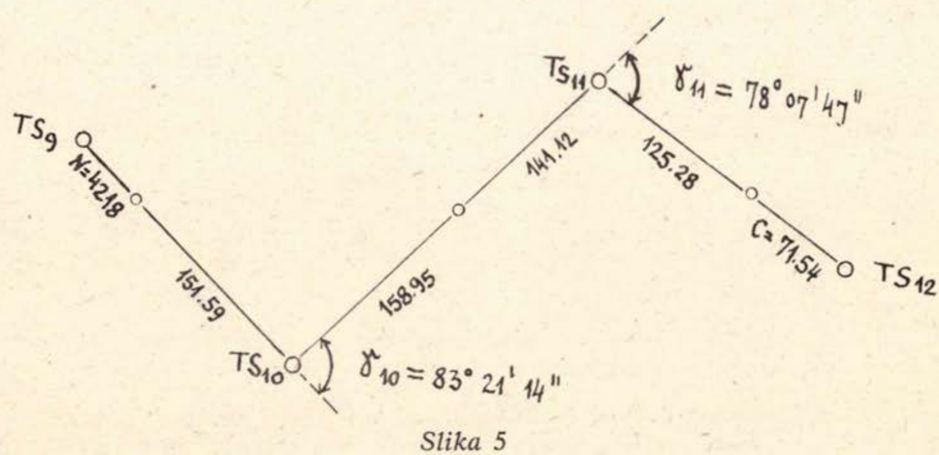
$$d = +\ 1{,}12 \qquad d = -\ 4{,}58$$

$$T_1 = X_{m1} + t_1 + d \qquad T_{w2} = X_{mw2} + t_1 + d$$
$$T_1 = 41{,}50 + 108{,}97 + 1{,}12 \qquad T_{w2} = 65{,}99 + 79{,}71 - 4{,}58$$
$$T_1 = 151{,}59 \text{ m.} \qquad T_{w2} = 141{,}12 \text{ m.}$$

$$T_{w1} = X_{mw1} + t_2 - d \qquad T_2 = X_{mw2} + t_2 - d$$
$$T_{w1} = 50{,}12 + 109{,}95 - 1{,}12 \qquad T_2 = 44{,}63 + 76{,}07 + 4{,}58$$
$$T_{w1} = 158{,}95 \text{ m.} \qquad T_2 = 125{,}28 \text{ m.}$$

1 Računanje kontrolnog poligona TS_9 — TS_{10} — TS_{11} — TS_{12}

Broj tač-ke	Prelomni kutovi β			Smjerni kutovi ν			Dužine S	sin ν cos ν		Koordinate Y_n $Y_n = Y_{n-1} + \Delta Y_n$ $\Delta Y_n = S_n \sin\nu_n$			Koordinate X_n $X_n = X_{n-1} + \Delta X_n$ $\Delta X_n = S_n \cos\nu_n$			Broj tač-ke
	°	′	″	°	′	″										
1	2			3			4	5	6	7			8			9
TS_9										504	329	52	572	731	07	TS_9
TS_{10}	96	38	46	114	55	27	193 77	0.90686 0.42142		+ 504	175 505	72 24	- 572	81 649	66 41	TS_{10}
TS_{11}	258	07	47	31	34	13	300 07	0.52354 0.85200		+ 504	157 662	10 34	+ 572	255 905	66 07	TS_{11}
TS_{12}				109	42	00	196 82	0.94147 0.33710		+ 504	185 847	30 64	- 572	66 838	35 72	TS_{12}
									Treba:	504	847	64	572	838	73	



Slika 5

Računanje kontrolnog poligona se vrši na osnovu sračunatih dužina tangenata N, T_1, T_{w1}, T_{w2} i c kao i kutova u sjecištima tangenata γ_{10} i γ_{11}, sl. 5. Time se dobijaju konačne koordinate sjecišta tangenata TS_{10} i TS_{11}. Na temelju iskustva ovaj tangencijalni poligon ne smije imati veće odstupanje od ± 3 sm. Veće odstupanje ukazuje na grešku u računanju. Sračunate koordinate su konačne dok se koordinate sjecišta tangenata TS'_{10} i TS'_{11} odbacuju.

m — Računanje dužina lukova b_1 i b_2

$$\alpha_1 = \gamma_{10} - (\tau_1 + \tau_{w1})$$

$$\alpha_1 = 83^\circ\ 21'\ 14'' - (19^\circ\ 53'\ 40'' + 24^\circ\ 04'\ 20'')$$

$$\alpha_1 = 39^\circ\ 23'\ 14'' = 39^\circ,38722$$

$$\alpha_2 = \gamma_{11} - (\tau_{w2} + \tau_2)$$

$$\alpha_2 = 78^\circ\ 07'\ 47'' - (42^\circ\ 47'\ 42'' + 28^\circ\ 38'\ 52'')$$

$$\alpha_2 = 6^\circ\ 41'\ 13'' = 6^\circ,68694$$

$$\bar{b}_1 = \frac{R_1 \cdot \pi \cdot \alpha_1^\circ}{180^\circ} \qquad \bar{b}_2 = \frac{R_2 \cdot \pi \cdot \alpha_2^\circ}{180^\circ} \qquad (\pi = 3,142)$$

$$\bar{b}_1 = \frac{120,00 \cdot \pi \cdot 39^\circ,38722}{180^\circ} \qquad \bar{b}_2 = \frac{90,00 \cdot \pi \cdot 6^\circ,68694}{180^\circ}$$

$$\bar{b}_1 = 82,50\ \text{m.} \qquad \bar{b}_2 = 10,51\ \text{m.}$$

LITERATURA:

1. Janković M.: Inženjerska geodezija, drugi dio, Zagreb, 1966.
2. Osterloh H. Strassenplanung mit Klothoiden, Wiesbaden . Berlin, 1964.
3. Kasper . Schürba . Lorenz : Die Klotoide als Trasierungselement, Dümmler . Bonn, 1954.
4. Cvetković Č.: Primena geodezije u inženjerstvu, Beograd, 1970.