IZBOR TEŽINA ZA IZJEDNAČENJA TRIGONOMETRIJSKE MREŽE SA IZMJERENIM STRANAMA I KUTOVIMA

Nihad KAPETANOVIĆ — Sarajevo

UVOD — U svrhu ispitivanja optimalnog odnosa težina pojedinih, linearnih i kutnih, elemenata razvijena je u gradu Sarajevu jedna manja, samostalna trigonometrijska mreža. Skice te mreže, način mjerenja linearnih i kutnih elemenata, kao i postignuti rezultati prikazani su u Geodetskom listu br. 4—6 1973., dok bi ovdje želio prikazati rezultate izjednačenja u različitim težinskim kombinacijama.

Posmatrana mreža izjednačena je u ravnini, pošto su svi izmjereni elementi reducirani na Gauss-Krügerovu ravninu projekcije. Izjednačenje je izvršeno postupkom posrednih mjerenja, pri čemu su za date veličine uzete obje koordinate tačke 1352 i x_{1347} u koordinatnom sistemu grada Sarajeva; nepoznanice su prema tome, y_{1347} i obje koordinate tačaka 1, 2 i 3 (ukupno sedam nepoznanica). Na taj način, mreža je izjednačena u državnom koordinatnom sistemu (grada). Pogreška orijentacije može biti prouzrokovana samo malim pogreškama datih veličina.

Izvršeno je izjednačenje kutnih (triangulacija, težinska kombinacija I), izjednačenje linearnih (trilateracija, težinske kombinacije II) i izjednačenje kombiniranih mjerenja (težinske kombinacije III). U slučaju triangulacije (I) ima 25 jednadžbi popravaka (24 za kutove i jedna jednadžba strane 1352—1347), u slučaju trilateracije (II) ima 10 jednadžbi popravaka (strana), a u slučaju izjednačenja kombiniranih mjerenja ima 34 jednadžbi popravaka (24 za kutove i 10 za strane). Prema tome, broj prekobrojnih opažanja u slučaju triangulacije iznosi 18, u slučaju trilateracije 3, a u slučaju izjednačenja kombiniranih mjerenja 27.

Treba naglasiti da i izjednačenje triangulacije predstavlja, strogo uzevši, izjednačenje kombiniranih mjerenja, pošto se pored kutnih mjerenja u izjednačenje mora uvesti i jedna mjerena strana sa svojom težinom. Uostalom, svako izjednačenje se može smatrati izjednačenjem kombiniranih mjerenja, pri čemu kod triangulacije smatramo da je preostalih devet strana izmjereno s težinom nula, a kod trilateracije da su svi kutovi izmjereni s težinom nula.

Izjednačenje triangulacije izvršeno je u jednoj, izjednačenje trilateracije u pet, a izjednačenje kombiniranih mjerenja prvobitno u devet i naknadno

---

Adresa autora: Mr. Nihad Kapetanović — Građevinski fakultet Sarajevo, Hasana Brkića 24

u još dvije težinske kombinacije. Izjednačenje većine težinskih kombinacija izvršeno je u Računskom centru Građevinskog fakulteta u Beogradu*, a dviju posljednjih kombinacija u Računskom centru ŽTP-a u Sarajevu**.

JEDNADŽBE POPRAVAKA — Jednadžbe popravaka za kutove (sl. 1) glase:

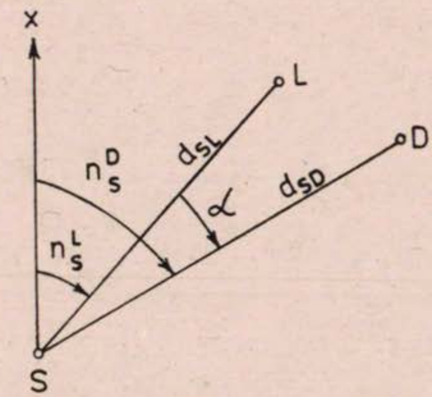
$$v_\alpha = b_{SD}\, dy_D + a_{SD}\, dx_D - b_{SL}\, dy_L - a_{SL}\, dx_L + + (b_{SL} - b_{SD})\, dy_S + (a_{SL} - a_{SD})\, dx_S + f_\alpha \tag{1}$$

gdje su koeficijenti

$$a_{SJ} = -\frac{\rho'' \sin n_S^J}{d_{SJ}} \qquad b_{SJ} = \frac{\rho'' \cos n_S^J}{b_{SJ}} \quad (J = L, D) \tag{2}$$

a slobodan član

$$f = \alpha_o - \alpha' \tag{3}$$



pri čemu α_o predstavlja približni kut dobijen iz razlike $n^D_S - n^L_S$ smjernjaka sračunatih iz približnih koordinata tačaka S, L i D, a α' izmjereni kut sveden na ravninu. Koeficijenti a_{SJ} sračunati su u dimenzijama "/cm.

Jednadžbe popravaka za dužine glase:

$$v_{dik} = -b_{ik}\, dy_i - a_{ik}\, dx_i + b_{ik}\, dy_k + a_{ik}\, dx_k + f_{ik} \tag{4}$$

gdje su koeficijenti

$$a_{ik} = \cos n_i^k \qquad b_{ik} = \sin n_i^k \tag{5}$$

* Program za računanje izradio je Pavle Zeremski, dipl. ing geodezije.

** Program za računanje izradio je Jože Korpič, dipl. ing. geodezije.

a slobodan član

$$f_{ik} = d_{oik} - d_{ik} \qquad (6)$$

pri čemu d_{oik} predstavlja stranu sračunatu iz približnih koordinata, a d'_{jk} izmjerenu stranu reduciranu na ravninu projekcije. Koeficijenti a_{ik} i b_{ik} očigledno su neimenovani brojevi.

Da bi se izbjegla homogenizacija jednadžbi popravaka, odnosno preračunavanje popravaka, dodijeljene su, kod izjednačenja kombiniranih mjerenja, težinama dimenzije. Naime, pošto je u opće mslučaju

$$p\alpha = \frac{c}{m^2\alpha} \qquad (7a)$$

$$p_d = \frac{c}{m^2_d} \qquad (7b)$$

gdje $p\alpha$ i p_d odnosno $m\alpha$ i m_d predstavljaju težine odnosno srednje pogreške izmjerenih kutova i strana, to ako konstantu c smatramo neimenovanim brojem, dobijamo $p\alpha$ u dimenzijama $1/('')^2$, a p_d u dimenzijama $1/cm^2$. Iz jednadžbi popravaka kutova i strana (jedn. (1) i (4)) dobićemo, obzirom na dimenzije koeficijenata a_{SJ} i b_{SJ}, odnosno a_{ik} i b_{ik}, popravke kutova u sekundama, a popravke strana u centimetrima, dok će [pvv], pa stoga i srednja pogreška jedinice težine m_o biti neimenovan broj. Srednje pogreške kutova biće izražene u sekundama, a srednje pogreške strana u centrimetrima.

IZBOR TEŽINA — Izjednačenje trilateracije izvršeo je u pet težinskih kombinacija i to:

kombinacija II/1 $\quad p_i = 1$ za sve strane $\qquad (8)$

kombinacija II/2 $$p_i = \frac{c_2}{d_i} \qquad (9)$$

kombinacija II/3 $$p_i = \frac{c_3}{d^2_i} \qquad (10)$$

kombinacija II/4 $$p_i = \frac{c_4}{(5\ mm + d_{mm}\ 10-6)^2} \qquad (11)$$

kombinacija II/5 $$p_i = \frac{c_5}{m^2_i} \qquad (12)$$

Konstante c_j ($j = \overline{2,5}$) odabrane su tako da strana 3 — 1352 dužine 1831 m koja je najbliža prosječnoj dužini strane u mreži (1889 m) iznosi 1 u svakoj težinskoj kombinaciji. Kombinacija II/1 pretpostavlja istu težinu svih strana, kod kombinacije II/2 odnosno II/3 težine su obrnuto proporcionalne dužinama odnosno kvadratima dužina strana.

U kombinacijama II/4 i II/5 težine su obrnuto proporcionalne kvadratima srednjih pogrešaka, s tim što su srednje pogreške m_i za kombinaciju II/4 računate na osnovu formule koju navodi proizvođač daljinomjera EOS (formula (3a) u publikaciji (7)), a za kombinaciju II/5 na osnovu odstupanja svih (obostranih) mjerenja i-te strane od aritmetičke sredine. Težine svih strana za pojedine težinske kombinacije trilateracije prikazane su u Tablici 1.

Tablica 1 Težine strana u trilateraciji

Težinska kombinacija			II/1	II/2	II/3	II/4	II/5
				$c_2 = 1831$	$c_3 = 3353600$	$c_4 = 75{,}03$	$c_5 = 94{,}8$
Br. jednadž popravaka	strana od — do	dužina strane m	$p_i = 1$	$p_i = \frac{c_2}{d_i}$	$p_i = \frac{c_3}{d_i^2}$	$p_i = \frac{c_4}{(5\,mm + 2d_i 10^{-6})^2}$	$p_i = \frac{c_5}{m_i^2}$
10	3 — 2	862	1	2,12	4,51	1,66	1,23
8	1347 — 3	1227	1	1,49	2,22	1,35	2,91
9	1347 — 2	1282	1	1,43	2,04	1,31	20,62
2	3 — 1	1612	1	1,14	1,29	1,11	3,76
7	1347 — 1352	1775	1	1,03	1,06	1,03	2,34
4	1 — 2	1800	1	1,02	1,03	1,01	1,77
5	3 — 1352	1831	1	1,00	1,00	1,00	1,00
6	2 — 1352	2560	1	0,72	0,51	0,73	15,80
3	1347 — 1	2802	1	0,65	0,43	0,66	0,94
1	1 — 1352	3135	1	0,58	0,34	0,59	3,73
	Prosječna dužina	1889					
	Prosječna težina		1	1,12	1,14	1,04	5,36
	Odnos najmanje prema najvećoj težini		1:1	1:3,66	1:13,28	1:2,82	1:21,95

Izjednačenje kombiniranih mjerenja izvršeno je prvobitno u devet težinskih kombinacija (III/1 — III/5). Kod svih ovih kombinacija uzeta je za sve kutove ista težina sračunata po formuli (7a), pri čemu je za m_α uzeta srednja pogreška kuta izmjerenog u jednom girusu sračunata iz svih opažanja u mreži, tj. $m_\alpha = \pm 0'',88$, a za konstantu c odabrana vrijednost

$$c = m^2_\alpha = (\pm 0{,}88)^2 \tag{13}$$

tako da svi kutovi u svim težinskim kombinacijama imaju težinu 1, dok su pojedinim stranama u različitim težinskim kombinacijama dodjeljivane različite težine. Težine strana računate su po općoj formuli (7b), s tim što su pogreške m_d za različite težinske kombinacije računate po različitim formulama. Težine svih mjerenih strana za težinske kombinacije kombiniranih mjerenja prikazane su u Tablici 2.

Tablica 2 — Težine mjerenih elemenata za izjednačenje kombiniranih mjerenja

Broj jednadžbe popravaka	težinska kombinacija III/ — mjereni elemenat	1A	1B	1C	2A	2B	3A	3B	4	5	6	7
	svi kutovi											
	strana	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
34	3 — 2	1,50	0,50	4,50	9,08	0,36	26,39	1,05	1,73	1,02	18,0	90,2
32	1347 — 3	1,50	0,50	4,50	6,39	0,26	13,00	0,52	1,41	2,40	18,0	44,6
33	1347 — 2	1,50	0,50	4,50	6,10	0,24	11,92	0,48	1,36	17,01	18,0	40,7
26	3 — 1	1,50	0,50	4,50	4,86	0,19	7,55	0,30	1,16	3,11	18,0	25,8
31	1347 — 1352	1,50	0,50	4,50	4,41	0,18	6,22	0,25	1,07	1,94	18,0	21,2
28	1 — 2	1,50	0,50	4,50	4,35	0,17	6,15	0,24	1,06	1,46	18,0	20,7
29	3 — 1352	1,50	0,50	4,50	4,27	0,17	5,84	0,23	1,04	0,83	18,0	20,0
30	2 — 1352	1,50	0,50	4,50	3,06	0,12	2,99	0,12	0,76	13,05	18,0	10,2
27	1347 — 1	1,50	0,50	4,50	2,80	0,11	2,50	0,10	0,69	0,78	18,0	8,6
25	1 — 1352	1,50	0,50	4,50	2,50	0,10	2,00	0,08	0,62	3,08	18,0	6,8
Prosječna težina strane		1,50	0,50	4,50	4,78	0,19	8,46	0,34	1,09	4,47	18,0	28,9
Odnos najmanje prema najvećoj težini strane 1 :		1,00	1,00	1,00	3,6	3,6	13,2	13,2	2,8	21,8	1,00	13,2

Kod težinske kombinacije III/1A i svim stranama je dodijeljena ista težina, a za m_d je uzeta srednja pogreška jedne strane izmjerene u jednoj seriji, sračunata iz svih linearnih opažanja u mreži, tj. $m_d = \pm 0{,}72$ cm. Uvrštavanjem ove vrijednosti i vrijednosti c iz jednadžbe (13) u jednadžbu (7b) dobija se za težine svih strana vrijednost 1,50. Kod težinskih kombinacija III/1B odonsno III/1C zadržana je ista težina kutova, dok je stranama dodijeljena tri puta manja, odnosno tri puta veća težina u odnosu na kombinaciju III/1A.

Srednje pogreške pojedinih strana za kombinaciju III/2A računate su po formuli

$$m_d = \pm 10^{-3} \sqrt{d_{cm}} \qquad (14)$$

a za kombinaciju III/2B po formuli

$$m_d = \pm 0{,}5 \cdot 10^{-2} \sqrt{d_{cm}} \qquad (14a)$$

što znači da su u oba slúčaja dodijeljene težine obrnuto proporcionalne dužinama pojedinih strana.

Kod težinskih kombinacija III/3A odnosno III/B srednje pogreške pojedinih strana sračunate su po formuli

$$m_d = \pm 0{,}2 \cdot 10^{-5}\, d_{cm}$$

odnosno

$$m_d = \pm 10^{-5}\, d_{cm}$$

što znači da su pojedinim stranama dodijeljene težine obrnuto proporcionalne s kvadratima njihovih dužina.

Najzad, za težinske kombinacije III/4 i III/5 stranama su dodijeljene težine obrnuto proporcionalne kvadratima srednjih pogrešaka, koje su za kombinaciju III/4 sračunate na osnovu navoda proizvođača (formula (3a) u publikaciji (7)), a za kombinaciju III/5 na osnovu odstupanja svih (obostranih mjerenja odgovarajuće strane od aritmetičke sredine.

Kako će se iz u nastavku izloženih analiza vidjeti, odnos težina kutnih i linearnih mjerenja na osnovu apriorne tačnosti nije najbolje pogođen, pa su na osnovu ocjena tačnosti dobijenih iz izjednačenja, naknadno izjednačene još dvije težinske kombinacije (III/6 i III/7) sa znatno većim težinama linearnih u odnosu na kutna mjerenja.

Za težinsku kombinaciju III/6 težine su sračunate po formulama (7) pri čemu je za m_α uzeta srednja pogreška jedinice težine dobijena izjednačenjem triangulacije (težinska kombinacija I/1), tj. $m_\alpha = \pm$ 1,0403, a za m_d srednja relativna pogreška izjednačene prosječne strane dobijena izjednačenjem trilateracijske težinske kombinacije II/1, tj.

$$m_d = \frac{m_d}{\bar{d}} \bar{d} = \pm 1{,}30 \cdot 1889 = \pm 0{,}246 \text{ cm} \tag{16}$$

U tom slučaju za vrijednost konstante

$$c = 1{,}0403^2 \tag{17}$$

iznose $p_\alpha = 1$ i $p_d = 18{,}0$, što predstavlja četiri puta veću težinu strana (uz istu težinu kutova) u odnosu na težinsku kombinaciju III/1C koja je od svih kombinacija III/1 dala najpovoljniji rezultat.

Kod težinske kombinacije III/7 usvojeno je također $m_\alpha = \pm 1'',0403$, a srednje pogreške strana računate su po formuli

$$m_d = \pm 0{,}127 \cdot 10^{-5}\, d_{cm} \tag{18}$$

tj. uzeto je da su težine strana obrnuto proporcionalne kvadratu srednje relativne pogreške od $\pm$ 1,27 mm/km dobijenoj iz izjednačenja trilateracijske kombinacije II/3. Uz vrijednost konstante c date izrazom (17) iznosi $p_\alpha = 1$, a težine strana prikazane su, kao i za sve ostale težinske kombinacije izjednačenja kombiniranih opažanja, u Tablici 2. U odnosu na povoljniju od težinskih kombinacija III/3, tj. kombinaciju III/3A ova kombinacija ima 3,4 puta veće težine strana (uz istu težinu kutova).

Izjednačenje triangulacije izvršeno je u jednoj težinskoj kombinaciji (I/1), i to tako da su težine određene kao u kombinaciji III/1A ($p_\alpha = 1$, težina mjerne strane $p_d = 1{,}50$).

NAČIN RAČUNANJA I PRIKAZ ELEMENATA POTREBNIH ZA ANALIZU REZULTATA IZJEDNAČENJA — U svrhu analize rezultata izjednačenja sračunat je za svaku tačku čije se koordinate određuju i za svaku težinsku kombinaciju rezultanti pomak dp definitivnih u odnosu na približne koordinate na osnovu odgovarajućih nepoznanica, po formuli

$$d_p = \sqrt{dy^2 + dx^2} \tag{19}$$

Osim toga, uporedo sa računanjem nepoznanica, sračunati su i odgovarajući koeficijenti težina Q_{yy}, Q_{xx} i Q_{pp}, te srednje pogreške m_y i m_x traženih koordinata i srednja pogreška m_p položaja pojedinih točaka po formulama

$$\begin{aligned} m_y &= m_o \sqrt{Q_{yy}} \\ m_x &= m_o \sqrt{Q_{xx}} \\ m_p &= m_o \sqrt{Q_{pp}} = m_o \sqrt{Q_{yy} + Q_{xx}} \end{aligned} \tag{20}$$

pri čemu m_o predstavlja srednju pogrešku jedinice težine, tj.

$$m_o = \sqrt{\frac{[pvv]}{n - r}} \tag{21}$$

pri čemu n — r znači broj prekobrojnih opažanja.

Pored toga, sračunate su za sve težinske kombinacije srednje vrijednosti koeficijenata težina

$$\overline{Q_{pp}} = \frac{\Sigma Q_{pp}}{n_p} \tag{22}$$

gdje je n_p broj tačaka čije se koordinate određuju, tj. $n_p = 4$, i na osnovu njih srednja vrijednost m_p položajnih pogrešaka m_p

$$\overline{m_p} = m_o \sqrt{\overline{Q_{pp}}} \tag{23}$$

Za svaku stranu izjednačene mreže sračunata je, za sve težinske kombinacije, srednja pogreška izjednačene strane kao funkcije nepoznanica po formuli

$$m_d = m_o \sqrt{Q_{dd}} \tag{24}$$

gdje Q_{dd} predstavlja koeficijent težine određene strane. Opća formula za računanje koeficijenata težine za izjednačenu stranu s krajnjim tačkama A i B, kao što je poznato (vidi (1) str. 189), glasi:

$$\begin{aligned} Q_{dd} = F_2^1 Q_{xa\,xa} &+ 2F_1 F_2 Q_{xa\,ya} + 2F_1 F_3 Q_{xa\,xb} + 2F_1 F_4 Q_{xa\,yb} + \\ &+ F_2^2 Q_{ya\,ya} + 2F_2 F_3 Q_{ya\,xa} + 2F_2 F_4 Q_{ya\,yb} + \\ &+ F_3^2 Q_{xb\,xb} + 2F_2 F_4 \grave{O}_{xb\,yb} + \\ &+ F_4^2 Q_{yb\,yb} \end{aligned} \tag{25}$$

pri čemu F_i (i = 1,4) predstavljaju parcijalne derivacije izraza

$$d = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} \tag{26}$$

tj.
$$F_1 = \frac{\partial d}{\partial x_a} = \cos n_a^b \qquad F_2 = \frac{\partial d}{\partial y_a} = \sin n_a^b$$
$$F_3 = \frac{\partial d}{\partial x_b} = \cos n_a^b \qquad F_4 = \frac{\partial d}{\partial y_b} = \sin n_a^b \tag{27}$$

Na osnovu vrijednosti Q_{dd} sračunate su srednje vrijednosti $\overline{Q}_{dd}$ koeficijenata težina

$$\overline{Q}_{dd} = \frac{\Sigma Q_{dd}}{n_d}$$

gdje je n_d broj mjerenih strana (u našem slučaju $n_d = 10$) i srednje relativne vrijednosti $\overline{m}_d/\overline{d}$ srednjih relativnih pogrešaka

$$\frac{\overline{m}_d}{\overline{d}} = m_o \frac{\sqrt{\overline{Q}_{dd}}}{\overline{d}} \tag{29}$$

gdje je $$\overline{d} = \frac{\Sigma d}{n_d} \tag{30}$$

(u slučaju posmatrane mreže $\overline{d}$ = 18886 m / 10 = 1889 m), za sve težinske kombinacije.

Vrijednosti m_o, $\overline{m}_p$ i $\overline{m}_d/\overline{d}$ za pojedine težinske kombinacije prikazane su u Tablici 3.

Tablica 3 — Srednje pogreške m_o jedinice težine, srednje vrijednosti m_p položajnih pogrešaka i srednje vrijednosti m_d/d relativnih pogrešaka

težinska kombinacija	m_o	m_p [mm]	m_d/d [mm/km]
I/1	±1,0403	±14,00	±6,18
II/1	±0,2945	± 4,40	±1,30
II/2	∓0,2950	∓ 4,63	∓1,29
II/3	±0,2775	± 4,63	±1,27
II/4	±0,2907	± 4,63	±1,30
II/5	±0,5501	± 4,80	±1,51
III/1A	±0,9453	± 5,37	±1,94
III/1B	±0,8931	± 6,86	±2,66
III/1C	±1,0226	± 4,30	±1,45
III/2A	±1,0303	± 4,48	±1,53
III/2B	±0,8682	±10,14	±4,20
III/3A	±1,0656	± 4,26	±1,39
III/3B	±0,8782	± 9,25	±3,76
III/4	±0,9284	± 6,00	±2,24
III/5	±1,0366	± 4,53	±1,66
III/6	±1,1561	± 3,16	±1,00
III/7	±1,1845	± 3,26	±0,96

ANALIZA REZULTATA IZJEDNAČENJA — Nakon izjednačenja i računanja elemenata potrebnih za analizu rezultata, izvršeno je međusobno upoređivanje rezultata izjednačenja pojedinih težinskih kombinacija, kao i pokazatelja njihovog kvaliteta.

Upoređenje na osnovu dobijenih rezultata za nepoznanice — Veličine svih nepoznanica dy i dx (popravke približnih koordinata), pa stoga i rezultanti pomaci dp za sve težinske kombinacije trilateracije, izuzev donekle kombinacije II/5, gotovo su identične. Razlike su potpuno beznačajne, najveće od njih jedva da prelaze veličinu od 1 mm. Nešto različite rezultate dala je jedino kombinacija II/5.

Vrijednosti za dy, dx i dp dobijene izjednačenjem triangulacije (težinska kombinacija I/1) relativno mnogo odstupaju od istih vrijednosti za težinske kombinacije trilateracije (II).

Vrijednosti za dy, dx i dp dobijene izjednačenjem kombinacija kombiniranih mjerenja (III) utoliko su bliže onima dobijenim trilateracijom ,ukoliko su veće težine dodijeljene stranama*, tako da trilateracijom dobijenim vrijednostima najviše liče vrijednosti dobijene težinskim kombinacijama III/6, III/7, III/3A, III/2A i III/1C. Pri tome je važno naglasiti da težinske kombinacije III/6 i III/7 daju praktički iste rezultate.

Upoređenje na osnovu pokazatelja kvaliteta rezultata dobijenih izjednačenjem — Ispitivanje kvaliteta rezultata dobijenih izjednačenjem pojedinih težinskih kombinacija može se izvršiti sa više aspekata. U konkretnom slučaju upoređenje je izvršeno na osnovu vrijednosti srednjih pogrešaka m_y i m_x nepoznanica, odnosno na osnovu položajnih pogrešaka m_p za pojedine tačke i njihovih srednjih vrijednosti m_p; na osnovu relativnih pogrešaka pojedinih strana m_d/d i njihovih srednjih vrijednosti m_d/d; te na osnovu popravaka strana v_d i kutova v_α dobijenih izjednačenjem.

Srednja pogreška jedinice težine m_o može predstavljati stanovito mjerilo tačnosti samo za izjednačenje trilateracijskih težinskih kombinacija, s izuzetkom težinske kombinacije II/5*, pošto su težine srednje strane svedene na istu mjeru; kod izjednačenja kombiniranih mjerenja vrijednosti za m_o su utoliko manje težine dodijeljene stranama, što postaje jasno kada se razmotri struktura formule (21). Tako su najmanje vrijednosti za m_o dobijene u kombinacijama III/2B, III/3B i III/1B, za koje su pojedini m_y, m_x, m_p i m_d, odnosno srednje vrijednosti za m_p i m_d/d najveći, dakle u pogledu kvaliteta najlošije kombinacije, što se može uočiti iz **Tablice 3.**

Za sve trilateracijske težinske kombinacije, izuzev donekle kombinacije II/5 dobijene su praktički istovjetne vrijednosti za m_y, m_x i m_p svih tačaka, odnosno m_d i v_d svih strana. Ovo postaje naročito uočljivo ako se uporede vrijednosti za m_p odnosno vrijednosti za m_d/d koje se kreću od $\pm 4{,}40$ do $\pm 4{,}65$ mm, odnosno od $\pm 1{,}27$ do $\pm 1{,}30$ mm/km (vidi Tablicu 3) i prosječne vrijednosti $[|v_d|]$ / 10 apsolutnih veličina popravaka koje se kreću od 1,18 do 1,30 gdje je n_d broj mjerenih strana (u našem slučaju $n_d = 10$), i srednje relativmm. Za kombinaciju II/5 dobijene su nešto veće vrijednosti pomenutih srednjih pogrešaka.

* Prosječne težine strana za težinske kombinacije kombiniranog izjednačenja navedene su u Tabeli 2

Kod izjednačenja kombiniranih mjerenja najbolje rezultate, tj. namanje vrijednosti srednjih pogrešaka m_y i m_x nepoznatih veličina, najmanje vrijednosti položajnih pogrešaka m_p i najmanje vrijednosti relativnih pogrešaka m_d/d izjednačenih strana dobijene su težinskim kombinacijama III/6 i III/7 za koje su stranama dodijeljene najveće težine (vidi Tablicu 2). Ovim dvjema kombinacijama dobijeni su ujedno najbolji rezultati od svih izvršenih izjednačenja, tj. m_p cca $\pm 3{,}2$ mm i m_d/d cca $\pm 1{,}0$ mm. Ovo vrlo vjerojatno predstavlja najpovoljniji rezultat koji se može dobiti izjednačenjem posmatrane mreže. Daljjim povećavanjem težina teško da bi dobili povoljnije rezultate*.

Iz ostalih težinskih kombinacija kombiniranog izjednačenja dobijeni su lošiji rezultati. Tako su iz težinskih kombinacija III/3A, III/2A i III/1C sa prosječnim težinama strana od 8,46, 4,78 i 4,50 dobijeni rezultati i srednje pogreške približno isti kao i oni dobijeni izjednačenjem trilateracije. Najlošiji rezultati dobijeni su iz kombinacija s najmanjim težinama strana, tj. iz kombinacija III/2B i III/3B, kod kojih prosječne težine strana iznose 0,19 i 0,34. Ovim kombinacijama dobijena tačnost je, doduše, veća od one postignute izjednačenjem triangulacije, ali je manja od one postignute izjednačenjem trilateracije.

Ove kombinacije predstavljaju očit primjer kako se izjednačenjem s neadekvatno određenim težinama mjerenih elemenata rezultati mjerenja mogu pokvariti. Naime, dodavanjem linearnim mjerenjem kutnih čija je tačnost precijenjena, tj. kojim je dodijeljena suviše velika težina u odnosu na linearna, dobijeni su lošiji rezultati nego kada ta kutna mjerenja nisu uzeta u obzir. Ovo je potencirano naročito time što je broj kutnih mjerenja znatno veći (24 kutna prema 10 linearnih mjerenja).

ZAKLJUČIVANJA — Navedene analize dopuštaju izvođenje zaključaka u pogledu odnosa linearnih i kutnih mjerenja, i u vezi s tim, u pogledu izbora težina kako čisto linearnih, tako i kombiniranih (linearnih i kutnih) mjerenja.

Upoređenje linearnih i kutnih mjerenja — Pada u oči visoka tačnost trilateracije. Iz samo deset mjerenja dobijena je srednja pogreška $\overline{m}_p$ položaja tačaka od cca $\pm 4{,}5$ mm i srednja relativna pogreška $\overline{m}_d/d$ izjednačene strane od $\pm 1{,}3$ mm/km. Izjednačenjem triangulacije, uz 24 izmjerena kuta ,dobijene su znatno veće vrijednosti, tj. $\overline{m}_p = \pm 14{,}0$ mm i $\overline{m}_d/d = \pm 6{,}2$ mm/km. Gledano s ovog aspekta, prednost je svakako na strani linearnih mjerenja. No, pri tome treba također imati na umu nepouzdanost navedenih pokazatelja (srednjih pogrešaka) u slučaju težinskih kombinacija trilateracije. Naime srednje pogreške jedinice težine m_o pomoću kojih su sračunate vrijednosti za $\overline{m}_p$ i $\overline{m}_d/d$ u slučaju težinskih kombinacija trilateracija određena iz samo tri

* Iako je prosječnoj strani 3 — 1352 dužine 1831 m i u kombinaciji II/5 dodijeljena težina 1, zahvaljujući okolnosti što je ta strana slučajno imala relativno veliku srednju pogrešku, što znači malu težinu, ostalim stranama pripale su relativno velike težine, tako da je prosječna težina ove težinske kombinacije znatno veća od prosječnih težina ostalih kombinacija (vidi Tablicu 1), pa i to predstavlja razlog što je srednja pogreška jedinice težine m_o dobila znatno veću vrijednost.

prekobrojna mjerenja, opterećena je osjetnom vlastitom srednjom pogreškom, te se tačnije može izraziti formulom

$$m_o = m'_o \ (1 \pm 0{,}67 + 0{,}37) \tag{31a}$$

koju navodi prof. Čubranić (publikacija (2) str. 54), gdje m'_o predstavlja vrijednost srednje pogreške dobijenu po formuli (21). Naprotiv, kod izjednačenja triangulacije srednja pogreška jedinice težine određena je iz 18 prekobrojnih mjerenja, pa je znatno pouzdanija, pošto ima znatno manju vlastitu srednju pogrešku. Za slučaj triangulacije je, naime,

$$m_o = m'_o \ (1 \pm 0{,}18 + 0{,}04)$$

što znači da su i dobijene vrijednosti za $\overline{m}_p$ i $\overline{m_d/d}$ znatno realnije.

Uprkos navedenoj ogradi, dilema da li izvršiti samo kutna ili samo linearna mjerenja u trigonometrijskoj mreži kao da se i ne postavlja, trebalo bi se odlučiti za linearna. Prednost linearnih u odnosu na kutna mjerenja dolazi do izražaja još više ako se ukaže na činjenicu da su linearna mjerenja u konkretnom slučaju obavljena u tri puta kraćem intervalu vremena, pošto vremenske prilike za mjerenje dužina ne moraju biti ni izdaleka tako povoljne kao za mjerenje kutova. Od velike je važnosti što se mjerenje dužina, bez teškoća, može obavljati pri sunčanom vremenu, što nije slučaj kod mjerenja kutova. Na taj način, pošto se obavlja u većem intervalu vremena, anulira se značaj nešto ekonomičnijeg mjerenja kutova.

No pri tome ne smijemo ispustiti iz vida jednu činjenicu: broj prekobrojnih linearnih opažanja u mrežama redovito je vrlo mali, ukoliko uopće postoji. U specijalno za ovu svrhu odabranoj mreži on iznosi svega tri, u centralnom sistemu u kojem se ne mogu izmjeriti diagonale (što je često slučaj) postoji samo jedno linearno prekobrojno mjerenje, u geodetskom četverokutu s izmjerenim diagonalama također samo jedno itd, dok je broj kutova, odnosno pravaca koji se u mreži mogu izmjeriti obično znatno veći. (Kada se po jedna ili dvije tačke određuju presijecanjem, broj linearnih elemenata koji se mogu izmjeriti jednak je broj tzv. linija, tj. broju obostrano opažanih pravaca).

Prema izloženom, linearna mjerenja u mreži trebaće redovito nadopuniti stanovitim brojem kutnih; koliki taj broj treba da bude i koje bi kutove trebalo mjeriti da bi istovremeno bili zadovoljeni zahtjevi tačnosti i ekonomičnosti, moglo bi biti interesantnim predmetom daljnjeg proučavanja.

IZBOR težina kod izjednačenja linearnih mjerenja — Iako su dužine strana u mreži različite (odnos najmanje prema najvećoj je 1 : 3,7), variranjem težina pojedinih strana nije dobijeno gotovo ništa: svim težinskim kombinacijama trilateracije, izuzev donekle kombinacije II/5, dobijeni su praktički isti rezultati.

Kombinacijom II/5 kod koje su težine pojedinih strana određene na osnovu srednjih pogrešaka sračunatih iz odstupanja pojedinih mjerenja od aritmetičke sredine, tj. po formuli (12) dobijeni su nešto lošiji rezultati. Ovo je trebalo očekivati pošto su odgovarajuće srednje pogreške dobijene iz relativno malog broja mjerenja, pa ne mogu predstavljati dovoljno realne vrijednosti. Broj od šest mjerenja i nije toliko mali; ne treba, međutim, smetnuti s uma da se, u suštini, radi o zapravo samo dva nezavisna mjerenja, pošto su tri serije u jednom i suprotnom smjeru izmjerene neposredno jedna za drugom u kratkom vremenskom intervalu, dakle pri praktički istim vanjskim uvjetima.

Zaključak se sam nameće: kod izjednačenja trilateracije svrsishodno je svim stranama dodijeliti iste težine $p = 1$. Pri tome se pretpostavlja da su sve strane izmjerene u jednakom broju ponavljanja (mjernih serija). Izuzetak nastaje ako se strane mjere u *velikom* broju ponavljanja pri *različitim* vremenskim prilikama. U tom slučaju opravdano je pojedinim stranama dodijeliti različite težine sračunate po formuli (12).

Izbor težina kod izjednačenja kombiniranih mjerenja — Kod izjednačenja kombiniranih mjerenja najvažnije je uspostaviti pravilan odnos težina kutnih i linearnih mjerenja. Na taj način se osigurava da *grupe* (sistemi) jednadžbi imaju pravilne težine. Variranje težina pojedinih strana pri tome ne donosi gotovo ništa.

Značaj pravilnog izbora težina ilustriratćemo upoređivanjem težinskih kombinacija III/3A i III/7. Kod ovih kombinacija za težine su uzete vrijednosti obrnuto proporcionalne kvadratima srednjih pogrešaka m_d odgovarajućih strana, pri čemu je u prvom slučaju m_d računato na osnovu pretpostavljene relativne pogreške m_d/d od 2 mm/km, a u drugom na osnovu relativne pogreške od 1,27 mm/km. Iako među pretpostavljenim pogreškama na prvi pogled ne postoji velika razlika, izjednačenjem težinske kombinacije III/7 dobijen je znatno bolji rezultat (srednje položajne pogreške tačaka stoje u odnosu 3,26 : 4,26, a srednje pogreške izjednačenje strane u odnosu 0,96 : 1,39). Gotovo isti rezultat kao težinskom kombinacijom III/7 dobijen i kombinacijom III/6, kod koje je također pretpostavljena relativna pogreška od 1,3 mm/km, pa sračunata težina za prosječnu dužinu strane u mreži dodijeljena svim izmjerenim stranama.

Na temelju izloženog proizlazi da kod kombiniranih mjerenja pri izjednačenju mreže treba svim dužinama, izmjerenim elektrooptičkim daljinomjerom obostrano u po tri mjerne serije, dodijeliti iste težine sračunate prema jednadžbi (7b), gdje se m_d računa po formuli

$$m_d = \frac{\overline{m_d}}{d}\,\overline{d} = \overline{1{,}3\ d} \tag{32}$$

u kojoj d predstavlja dužinu prosječne strane u mreži, tj. $\overline{d} = \Sigma\, d/n_d$.

U slučaju ispunjenja stanovitih zahtjeva (da centriranje reflektora vrši iskusno osoblje, da se posjeduje veći broj jednorodnih termo- i barometara, da se baždarenje daljinomjera vrši neposredno prije i nakon izvršenih mjerenja u mreži i drugih), veličina faktora $\overline{m_d}/d$ u jednadžbi (32) vjerojatno bi se mogla smanjiti na veličinu 1,0 mm/km. S ovom vrijednosti dobijeni su najbolji rezultati i pri izjednačenju kombiniranih mjerenja test-mreže Graca u više težinskih kombinacija (djelo /5/ str. 684). Razumljivo, ovo važi uz uvjet da se svim izmjerenim kutovima dodijeli težina sračunata po formuli (7a).

Vrijednost m_α, razumije se, zavisi od načina izvođenja i tačnosti kutnih mjerenja, pa je treba odrediti apriori, ili, još bolje, iz izjednačenja triangulacije same za sebe. Isto tako, najbolje je i faktor $\overline{m_d/d}$ odrediti iz izjednačenja trilateracije same za sebe, pod uvjetom da je broj prekobrojnih mjerenja dovoljno velik.

LITERATURA

1. *Čubranić N.:* Teorija pogrešaka s računom izjednačenja, Zagreb 1967.
2. *Čubranić N.:* Težine mjerenja, Zagreb 1965.
3. *Dvornjakov S. M.:* Uravnovešivanie analitičeskoj seti s izmerenim storonami i uglami. Geodezija i aerofotosjomka 2/1967.
4. *Gerasimov I. M.:* Uravnivanie linejnoj triangulacii po sposobu uslovnih izmerenij. Geodezija i kartografija 1/1960.
5. *Jordan (Eggert) Kneissl:* Handbuch der Vermessungskunde, Band VI, Stutgart 1966.
6. *Jovanović M.:* Izravnanje trigonometrijske mreže s merenim dužinama strana. Geodetska služba 1/1971.
7. *Kapetanović N.:* Trigonometrijska mreža sa izmjerenim stranama i kutovima. Geodetski list 4-6/1973.
8. *Laping K. A.:* K voprosu ob uravnivanij setej s izmerenim uglami i storonami. Geodezija i kartografija 3/1958.
9. *Muminagić A.:* Izravnanje mreže trouglova sa izmerenim stranama (trilateracija). Geodetski list 10-12/1961.
10. *Nikiforov B. I.:* Ceseloobraznij priem pri uravnivanii trilateracii. Geodezija i kartografija 4/1973.