OCENA TAČNOSTI KOORDINATA TAČKE U LANCU TROUGLOVA

Jovan STEVANOVIĆ — Bor

POLOŽAJNA GREŠKA U PRIMJENJENOJ GEODEZIJI — Problem ocene tačnosti koordinata tačka u trigonometrijskoj mreži, upravo problem ocene tačnosti dužine i direkcionog ugla između dveju uadljenih tačaka mreže, svakako zaslužuje da bude razmatran možda manje sa gledišta opštih teoretskih postavki, ali zato mnogo više sa gledišta praktičnog pristupa tom problemu, a naročito kada se radi o specifičnim problemima primjenjene geodezije i rudarskih merenja. Često se, za rešavanje problema ove vrste, razvija i izravnava slobodna trigonometriska mreža, unutar koje se, presecanjem, određuju tačke koje su za rešavanje dotičnih tehničkih problema neophodne.

Problem ocene tačnosti koordinata, bilo tačaka osnovne slobodne mreže, bilo naknadno presecanjem određenih tačaka, ili još preciznije, problem tačnosti određivanja položaja jedne, za odnosne praktične potrebe, važne tačke u odnosu na drugu isto tako važnu tačku ima, do izvesne mere, drugi smisao u odnosu na uobičajeni problem ocene tačnosti u triangulaciji. Ocena tačnosti u triangulaciji ima uglavnom komparativan karakter. Ovom ocenom tačnosti se dobijaju pokazatelji tačnosti određivanja jedne tačke ili niza tačaka preko kojih možemo da se upoređuje koja je tačka određena tačnije a koja manje tačno.

Za potrebe primenjene geodezije je, osim ovih komparativnih pokazatelja, izuzetno važno odrediti što realnije, na primer kod mostova, tačnost rastojanja, a kod tunela, tačnost direkcionog ugla između dveju tačaka, koje su, naročito kod tunela, obično na većem međusobnom rastojanju.

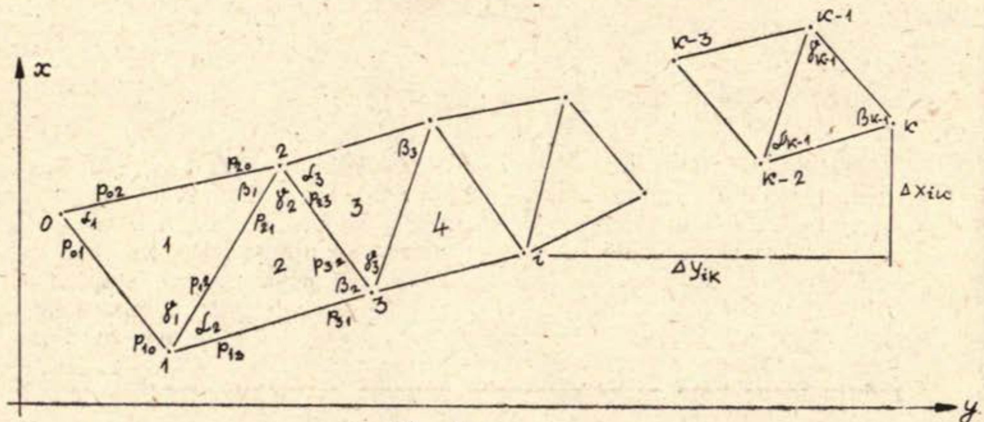
Ako sa teoretske tačke gledišta možda i nema problema za rešavanje ovog zadatka, sa praktične tačke gledišta problem se jako komplikuje, a moramo priznati da i izvesne teorijske interpretacije, date u glomaznom i teško pristupačnom obliku, doprinose da je i sa teoriske tačke gledišta ovaj problem teško shvatljiv.

Ako su date koordinate jedne tačke i početni direkcioni ugao, do koordinata druge tačke može se doći, kao što je poznato, preko niza trouglova, bilo sa izravnatim bilo sa neizravnatim uglovima, pri čemu su merenja u početku ne izravnata a kasnije bi se svakako koristili izravnati podaci. Ocena neke indirektno određene veličine, na osnovu neizravnatih podataka, je jednostavnija od ocene tačnosti na osnovu izravnatih podataka. Kada se radi o

Adresa autora: Prof. Dr Jovan Stevanović, Rudarsko-metalurški fakultet, Bor

uglovnim merenjima, u odnosnoj mreži mogu biti mereni uglovi ili pak opažani pavci. Obzirom da su izrazi za određivanje koordinata relativno komplikovane funkcije, neophodno je da se prvo obavi linearizovanje izraza za koordinate, a zatim da se obavi ocena tačnosti u zavisnosti od toga na osnovu kojih i kakvih podataka su određene koordinate.

FUNKCIJA I PARCIJALNI IZVODI ZA x_k i y_k NEKE TAČKE U LANCU TROUGLOVA



Sl. 1

Za najprostiji moguć slučaj određivanja koordinata trigonometrijskim putem, to jest za lanac trouglova koji je dat na slici 1, dužine između bilo kojih tačaka bi se dobile na osnovu merene dužine »s« i merenih uglova u trouglovima, a direkcioni uglovi, na osnovu početnog direkcionog ugla i uglova u trouglovima. Ak- se pri određivanju koordinata tačke »k« ide preko zajedničkih strana trougl a tada su strana i direkcioni ugao između tačke »i« i tačke »i+1« dati jednačin na:

$$s_{i \cdot i+1} = \frac{\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \ldots \sin\alpha_i}{\sin\beta_1 \cdot \sin\beta_2 \ldots \sin\beta_i} \quad \ldots 1$$

$$\nu_{i \cdot i+1} = \nu_p + \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4 + \ldots - (-1)^i \gamma_i \quad \ldots 2$$

Odavde se, se prethodno izraz sa $s_{i \cdot i+1}$ logaritmuje, i ako se smatra da su početne koordinate beznogrešne ...

Zamenom priraštaja za $ds_{i,i+1}$ i $d\upsilon_{i,i+1}$ iz 3 i 4 u ove jednačine, vodeći račun da je:

$$\Delta y_{i,i+1} = s_{i,i+1} \sin\upsilon_{i,i+1} \quad \ldots 9$$

$$\Delta x_{i,i+1} = s_{i,i+1} \cos\upsilon_{i,i+1} \quad \ldots 10$$

dobijamo:

$$dx_k = \frac{ds}{s} \Delta x_{12} + \frac{\Delta x_{12}}{\rho} (ctg\alpha_1 d\alpha_1 - ctg\beta_1 d\beta_1) + \frac{ds}{s} \Delta x_{23} + \frac{\Delta x_{23}}{\rho} ctg\alpha_1 d\alpha_1 - ctg\beta_1 d\beta_1 +$$
$$+ ctg\alpha_2 d\alpha_2 - ctg\beta_2 d\beta_2) + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{\rho}[- \Delta y_{12} d\gamma_1 - \Delta y_{23}(d\gamma_1 - d\gamma_2) - \Delta y_{34}(d\gamma_1 - d\gamma_2 + d\gamma_3) - \quad \ldots 11$$

$$dy_k = \frac{ds}{s} \Delta y_{12} + \frac{\Delta y_{12}}{\rho} (ctg\alpha_1 d\alpha_1 - ctg\beta_1 d\beta_1) + \frac{ds}{s} \Delta y_{23} + \frac{\Delta y_{23}}{\rho}(ctg\alpha_1 d\alpha_1 - ctg\beta_1 d\beta_1 +$$
$$+ ctg\alpha_2 d\alpha_2 - ctg\beta_2 d\beta_2) + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{\rho}[\Delta x_{12} d\gamma_1 + \Delta x_{23}(d\gamma_1 - d\gamma_2) + \Delta x_{34}(d\gamma_1 - d\gamma_2 + d\gamma_3) + \ldots \quad 12$$

Iz ovih jednačina, ako se izvrši odgovarajuća množenja i sumiranja i ako se ima u vidu da je:

$$\Delta x_{i \cdot i+1} + \Delta x_{i+1 \cdot i+2} + \ldots + \Delta x_{k-1 \cdot k} = \Delta x_{i \cdot k} \ldots \quad 13$$

$$\Delta y_{i \cdot i+1} + \Delta y_{i+1 \cdot i+2} + \ldots + \Delta y_{k-1 \cdot k} = \Delta y_{i \cdot k} \ldots \quad 14$$

proizilazi:

$$dx_k = \frac{ds}{s} \Delta x_{1 \cdot k} + \frac{1}{\rho} [\Delta x_{1k} ctg\alpha_1 d\alpha_1 + \Delta x_{2k} ctg\alpha_2 d\alpha_2 + \Delta x_{3k} ctg\alpha_3 d\alpha_4 + \ldots\ldots$$
$$- \Delta x_{1k} ctg\beta_1 d\beta_1 - \Delta x_{2k} ctg\beta_2 d\beta_2 - \Delta x_{3k} ctg\beta_3 d\beta_3 - \ldots\ldots$$
$$- \Delta y_{1k} d\gamma_1 + \Delta y_{2k} d\gamma_2 - \Delta y_{3k} d\gamma_3 + \ldots + (-1)^i \Delta y_{ik} d\gamma^i + \ldots] \quad 15$$

$$dy_k = \frac{ds}{s} \Delta y_{1k} + \frac{1}{\rho} [\Delta y_{1k} ctg\alpha_1 d\alpha_1 + \Delta y_{2k} ctg\alpha_2 d\alpha_2 + \Delta y_{3k} ctg\alpha_3 d\alpha_3 + \ldots\ldots$$
$$- \Delta y_{1k} ctg\beta_1 d\beta_1 - \Delta y_{2k} ctg\beta_2 d\beta_2 - \Delta y_{4k} ctg\beta_3 d\beta_3 - \ldots\ldots$$
$$+ \Delta x_{1k} d\gamma_1 - \Delta x_{2k} d\gamma_2 + \Delta x_{3k} d\gamma_3 - \ldots - (-1)^i \Delta x_{ik} d\gamma_i + \ldots] \quad 16$$

Bit će od koristi da ukupne priraštaje x i y rastavimo na komponente dx_{ks} i dx_{ku}, gdje je dx_{ks} priraštaj zbog promene početne strane, a dx_{ku} priraštaj zbog promene uglova, a analogno i po y-osovini. U tom slučaju bi bilo:

$$dx_k = dx_{ks} + dx_{ku} \quad 17$$

$$dy_k = dy_{ks} + dy_{ku} \quad 18$$

Pri čemu je:

$$dx_{ks} = \frac{ds}{s} \Delta x_{1k} \quad 19$$

$$dy_{ks} = \frac{ds}{s} \Delta y_{1k} \quad 20$$

$$dx_{ku} = \frac{1}{\rho} [\Delta x_{1k} ctg\alpha_1 d\alpha_1 + \Delta_{2k} ctg\alpha_2 \, d\alpha_2 + \ldots$$
$$- \Delta x_{1k} ctg\beta_1 d\beta_1 - \Delta x_{2k} ctg\beta_2 d\beta_2 - \ldots$$
$$- \Delta y_{1k} d\gamma_1 + \Delta y_{2k} d\gamma_i - \ldots + (-1)^i \Delta y_{ik} d\gamma_1 + \ldots] \qquad 21$$

$$dy_{ku} = \frac{1}{\rho} [\Delta x_{1k} ctg\alpha_1 e\alpha_1 + \Delta y_{2k} ctg\alpha_2 d\alpha_2 + \ldots$$
$$- \Delta y_{1k} ctg\beta_1 d\beta_1 - \Delta y_{2k} ctg\beta_2 d\beta_2 - \ldots$$
$$+ \Delta x_{1k} d\gamma_1 - \Delta x_{2k} d\gamma_2 + \ldots - (-1)^i \Delta x_{ik} d\gamma_1 + \ldots] \qquad 22$$

Ako deo srednje greške po x-osovini, koji je posljedica grešaka mjerenja strane, obilježimo sa m_{xks}, a dio, koji je posljedica grešaka mjerenja uglova sa m_{xku}, a analogno i po y-osovini, bit će:

$$m^2_{xk} = m^2_{xks} + m^2_{xku} \qquad 23$$

$$m^2_{yk} = m^2_{yks} + m^2_{yku} \qquad 24$$

Ovdje su:

$$m^2_{xks} = \frac{m^2_s}{s^2} \Delta x^2_{1k} \qquad 25$$

$$m^2_{yks} = \frac{m^2_s}{s^2} \Delta y^2_{1k} \qquad 26$$

a predmet daljih razmatranja bit će samo m_{xku} i m_{yku}, koje možemo dobiti preko jednačina 21 i 22. Za dalji postupak ocjene tačnosti treba znati kako su dobiveni uglovi α_i, β_i i γ_i, a samim tim i njihovi priraštaji $d\alpha_i$, $d\beta_i$ i $d\gamma_i$, pa u zavisnosti od toga izvršiti ocjenu tačnosti.

PRAKTIČNE MOGUĆNOSTI ODREĐIVANJA PARCIJALNIH IZVODA —

Pri predlaganju postupka za rešenje nekog problema nije bez važnosti pristupačnost tog predloga, odnosno praktične mogućnosti sprovođenja tog postupka. Navedenim jednačinama su izraženi priraštaji koordinata kao linearne funkcije priraštaja merenih veličina, čime je svakako obavljeno znatno uprošćavanje u celini, ali određivanja koordinatnih razlika Δx_{ik} Δy_{ik} i proizvoda ovih koordinatnih razlika sa kotangensima odgovarajućih uglova, jednom rečju nalaženje odgovarajućih parcijalnih izvoda funkcije, može da predstavlja dugotrajan i mukotrpan posao, zbog čega bi i sam postupak mogao biti izbegavan.

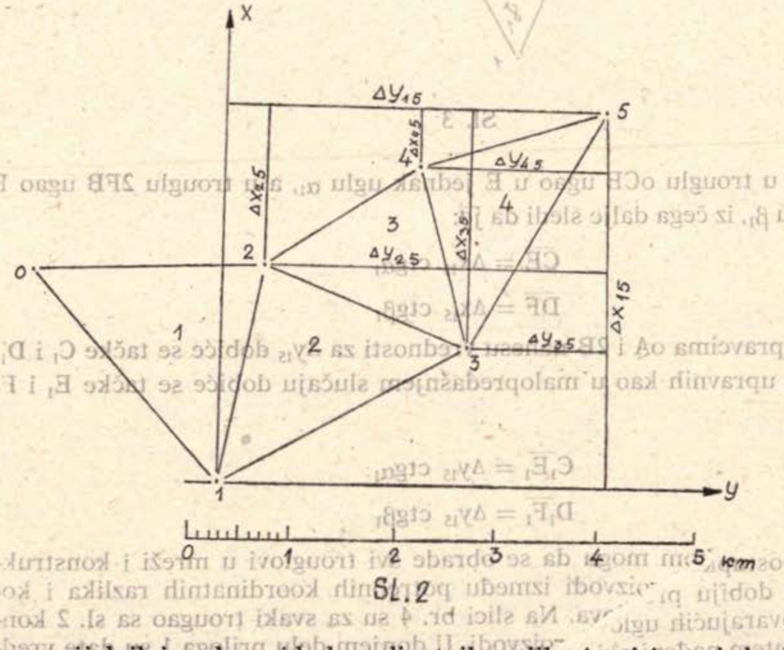
Pre prelaska na bilo kakve preporuke za određivanje ovih parcijalnih izvoda, važno je uočiti da nije potrebna velika tačnost sa kojom ih treba računati. Priraštaj koordinata odnosno srednje greške koordinata mogu biti veličinskog reda najviše nekoliko desimetara, a treba ih računati možda samo do na 3 decimale, zbog čega nije potrebno poznavati mnogo tačnije ni parcijalne izvode preko kojih možemo dobiti ove srednje greške.

Zbog svega ovoga će u sledećem biti razrađen grafički postupak određivanja ovih parcijalnih izvoda, čime bi bila isključena potreba korišćenja trigonometrijskih tablica kao i množenja odgovarajućih veličina.

Nezavisno od toga da li će se parcijalni izvodi određivati grafički ili preko tablica, treba uočiti da ukupna položajna greška ne zavisi od koordinatnog sistema već od sklopa trouglova u mreži. Ocenu tačnosti, koja polazi od napred navedenih formula, možemo dobiti za bilo koji sistem xy, pri čemu dobijamo srednje greške određivanja položaja tačke u pravcu tih osovina.

Ako se, razmatrajući ovu činjenicu, setimo da je u primenjenoj geodeziji vrlo često naročito važno poznavati, odnosno postići što veću tačnost u jednom pravcu, a srednja greška u drugom pravcu može biti i višestruko veća (npr. slučaj proboja kod tunela, pri čemu je naročito važno da greška u pravcu upravnom na osovinu tunela bude što manja, a greška u pravcu osovine može biti daleko veća), možemo zaključiti da ocena tačnosti u državnom koordinatnom sistemu ne mora u opštem slučaju imati neki naročiti značaj, ali, ako se radi o takvom odabranom koordinatnom sistemu, kod koga se jedna od osovina poklapa sa pravcem za koji je posebno važno poznavanje srednje greške, tada se pri oceni tačnosti postiže pun praktični efekat. Zbog ovoga je preporučljivo vršiti ocenu tačnosti u sistemu koji se najbolje prilagođava konkretnoj problematici.

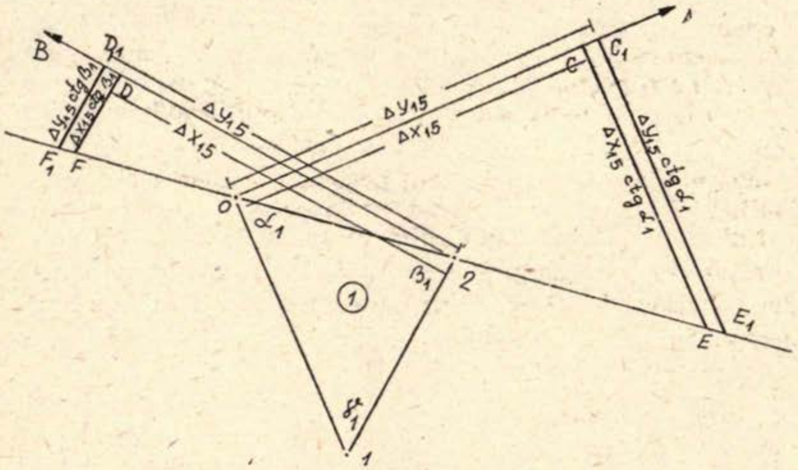
Ako je nacrtana mreža trouglova u nekoj pogodnoj razmeri i ako je odabran najpogodniji koordinatni sistem, mogu se lako, za svaku tačku mreže trouglova, konstruisati Δx_{ik} i Δy_{ik} i očitati njihove vrednosti razmernikom. Na slici 2 je data mreža od 4 trougla, pravac x i y osovine u odnosu na koje su ucrtane koordinatne razlike Δx_{i5} i Δy_{i5}. U prvom delu priloga 1 su date brojne vrednosti ovih koordinatnih razlika.



Sl. 2

Osim parcijalnih izvoda u vidu koordinatnih razlika Δy_{ik} i Δ_{ik}, u jednačinama 21 i 22 figurišu još i proizvodi ovih koordinatnih razlika sa kotangensima odgovarajućih uglova. Nalaženje ovih proizvoda može isto tako da se relativno lako obavi grafičkim putem. Uočimo, na primer sa slike 2, trougao broj 1, koji je dat na slici 3.

Ako se u tački O podigne upravna na stranu $\overline{01}$ dobiće se zrak oA, a podizanjem upravne u tački 2 na stranu $\overline{21}$, dobiće se zrak 2B. Ako se sada sa sl. 2 skine vrednost Δx_{51} i nanese po zraku oA dobiće se tačka C, a nanošenjem iste vrednosti po zraku 2B dobiće se tačka D. Podizanjem upravne u tački C na pravac oA do preseka sa pravcem o2 dobiće se tačka E, a podizanjem upravne na pravac 2B do preseka sa pravcem 20 dobiće se tačka F. Nije teško za-



Sl. 3

ključiti da je u trouglu oCE ugao u E jednak uglu α_1, a u trouglu 2FB ugao F je jednak uglu β_1, iz čega dalje sledi da je:

$$\overline{CE} = \Delta x_{15}\ ctg\alpha_1$$

$$\overline{DF} = \Delta x_{15}\ ctg\beta_1$$

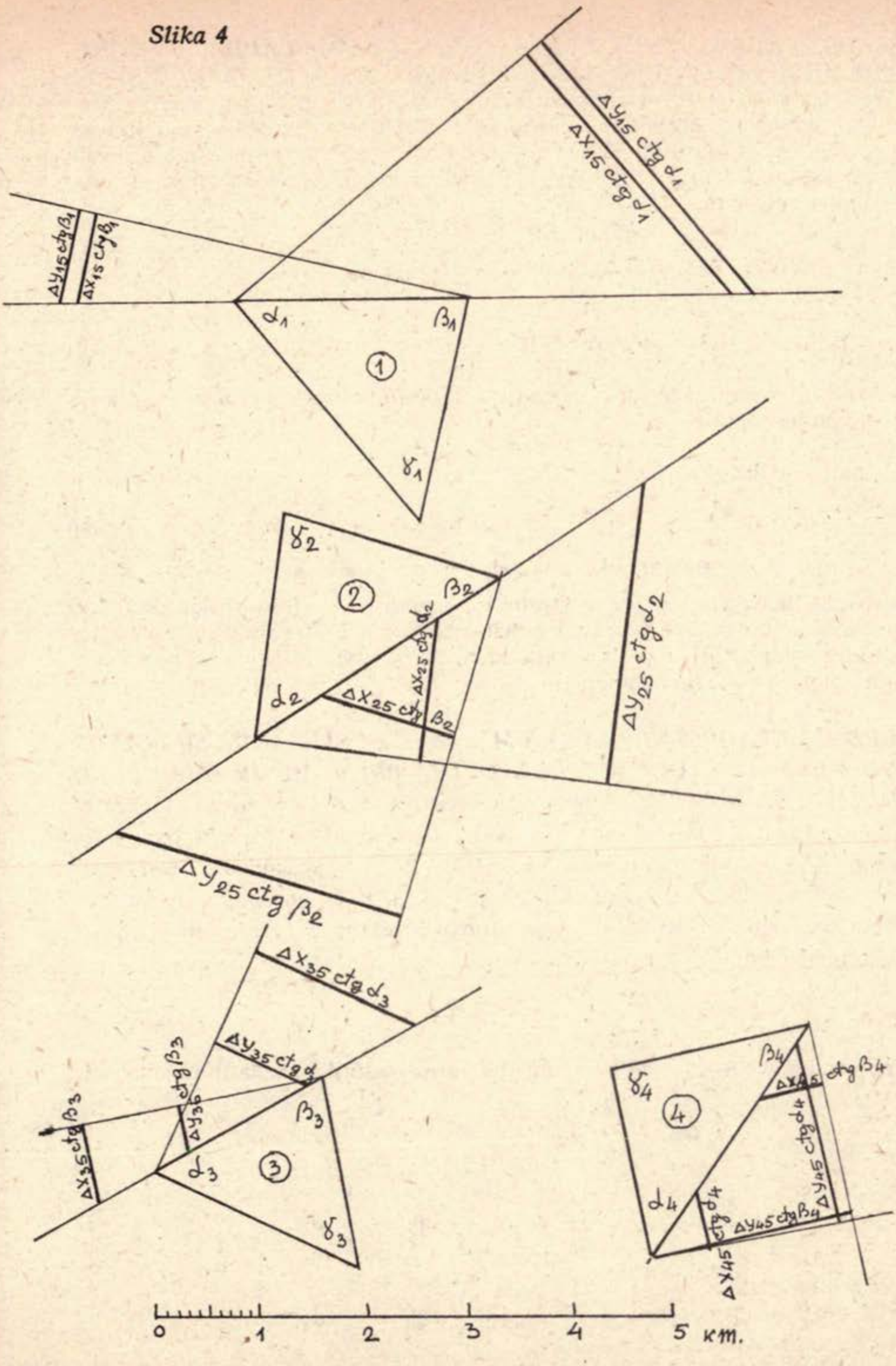
Ako se po pravcima oA i 2B nanesu vrednosti za Δy_{15} dobiće se tačke C_1 i D_1, a podizanjem upravnih kao u malopređašnjem slučaju dobiće se tačke E_1 i F_1 pri čemu je:

$$\overline{C_1E_1} = \Delta y_{15}\ ctg\alpha_1$$

$$\overline{D_1F_1} = \Delta y_{15}\ ctg\beta_1$$

Ovakvim postupkom mogu da se obrade svi trouglovi u mreži i konstruktivnim putem dobiju proizvodi između potrebnih koordinatnih razlika i kotangensa odgovarajućih uglova. Na slici br. 4 su za svaki trougao sa sl. 2 konstruktivnim putem nađeni ovi proizvodi. U donjem delu priloga 1 su date vrednosti ovih proizvoda.

Slika 4



Δy15 ctg α1
Δx15 ctg α1
Δy15 ctg β1
Δx15 ctg β1
α1
β1
1
γ1
γ2
2
β2
Δx25 ctg α2
α2
Δx25 ctg β2
Δy25 ctg α2
Δy25 ctg β2
Δx35 ctg α3
Δy35 ctg α3
ctg β3
Δy35
Δx35 ctg β3
β3
α3
3
γ3
β4
Δx45 ctg β4
γ4
4
Δy45 ctg α4
α4
Δy45 ctg β4
Δx45 ctg α4
0
1
2
3
4
5 km.

SREDNJE KVADRATNE GREŠKE M_{xku} I M_{yku} ZA SLUČAJ DA SU POJEDINAČNO MERENI UGLOVI U TROUGLOVIMA, A DA NIJE OBAVLJENO IZRAVNAVANJE UGLOVA — Ako su koordinate računate na osnovu direktno merenih, odnosno neizravnatih uglova, tada se, pošto su uglovi α_i, β_i i γ_i nezavisni međusobom, može direktno sa jednačina 21 i 22 preći na srednje kvadratne greške m_{xku} i m_{yku} u koliko su uglovi izmereni sa srednjim greškama: $m\alpha_i = m\beta_i = m\gamma_i = m_u$

$$m^2_{yku} = \frac{m_u^2}{\rho^2} [\Sigma \Delta x^2_{ik} ctg^2\alpha_i + \Sigma \Delta x^2_{ik} ctp^2\beta_i + \Sigma \Delta y^2_{ik}] \ldots\ldots \quad 27$$

$$m^2_{yku} = \frac{m_u^2}{\rho^2} [\Sigma \Delta y^2_{ik}\ ctg^2\ \alpha_i + \Sigma \Delta y^2_{ik} ctg^2\ \beta_i + \Delta x^2_{ik}] \ldots\ldots \quad 28$$

Biće od interesa da navedemo i izraz za ukupnu položajnu grešku m_{Pku}, koja se dobija po jednačini:

$$m^2_{Pku} = m^2_{xku} + m^2_{yku} \quad 29$$

iz koje dalje sledi:

$$m^2_{Pku} = \frac{m^2_u}{\rho^2} [\Sigma S^2_{ik} ctg^2\alpha_i + \Sigma S^2_{ik} ctg^2\beta_i + \Sigma S^2_{ik}] \quad 30$$

gde je S_{ik} rastojanje između neke tačke »i« u lancu i tačke k.

Iz ovh jednačina se sa jedne strane vidi kako položajna greška zavisi od oblika lanca trouglova, upravo na osnovu ovih jednačina se dubljim razmatranjem može steći detaljna slika o tome kako oblik lanca utiče na tačnost određivanja položaja neke tačke u lancu.

SREDNJE KVADRATNE GREŠKE M_{xku} i M_{yku} ZA SLUČAJ DA SU POJEDINAČNO MERENI UGLOVI U TROUGLOVIMA PRI ČEMU JE OBAVLJENO IZRAVNAVANJE UGLOVA ZA USLOVE TROUGLOVA — U ovom slučaju bi se dobile strane u trouglovima i na kraju koordinate na osnovu izravnatih uglova α_i', β_i', i γ_i', odnosno u jednačinama 21 i 22 bi figurisali priraštaji izravnatih uglova $d\alpha_i'$, $d\beta_i'$ i $d\gamma_i'$. Međutim, uglovi α_i', β_i' i γ_i' kao izravnati nisu međusobom nezavisni, jer su dobiveni na osnovu direktno merenih uglova α_i, β_i i γ_i, preko jednačina:

$$d\alpha'_i = \alpha_i + v_{\alpha 1} = \alpha_i + \frac{180° - (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)}{3} = \frac{2}{3}\alpha_1 - \frac{1}{3}\beta_1 - \frac{1}{3}\gamma_1 + \frac{180}{3} \quad 31$$

a slično i za uglove β_i' i γ_i', pa bi u tom slučaju priraštaji izravnatih uglova bili:

$$\begin{aligned} d\alpha_i' &= \frac{2}{3} d\alpha_i - \frac{1}{3} d\beta_i - \frac{1}{3} d\gamma_i \\ d\beta_i' &= -\frac{1}{3} d\alpha_i + \frac{2}{3} d\beta_i - \frac{1}{3} d\gamma_i \\ d\gamma_i' &= -\frac{1}{3} d\alpha_i - \frac{1}{3} d\beta_i + \frac{2}{3} d\gamma_i \end{aligned} \quad 32$$

Ako se u jednačini 21, na mesto $d\alpha_i$, $d\beta_i$ i $d\gamma_i$ unesu vrednosti za priraštaje $d\alpha_i'$, $d\beta_i'$ i $d\gamma_i$ ona postaje:

$$dx_{ku} = \frac{1}{3\rho}[2\Delta_{1k}\,ctg\alpha_1 d\alpha_1 - \Delta x_{1k}\,ctg\alpha_1 d\beta_1 - \Delta x_{1k}\,ctg\alpha_1 d\gamma_1 + \Delta x_{1k}\,ctg\beta_1 d\alpha_1 -$$

$$-2\Delta x_{1k}\,ctg\beta_1 d\beta_1 + \Delta x_{1k}\,ctg\beta_1 d\gamma_1 + \Delta y_{1k} d\alpha_1 + \Delta_{1k} d\beta_1 - 2\Delta y_{1k} d\gamma_1 +$$

$$+2\Delta x_{2k}\,ctg\alpha_2 d\alpha_2 - \Delta x_{2k}\,ctg\alpha_2 d\beta_2 - \Delta x_{2k}\,ctg\alpha_2 d\gamma_2 + \Delta x_{2k}\,ctg\beta_2 d\alpha_2 -$$

$$-2\Delta x_{2k}\,ctg_2 d\beta_2 + \Delta x_{2k}\,ctd\beta_2 d\gamma_2 - \Delta y_{2k} d\alpha_2 - \Delta y_{2k} d\beta_2 + 2\Delta y_{2k} d\gamma_i +$$

$$+ \dots\dots\dots\dots \qquad 3$$

Iz ovog izraza se može uočiti zakoknitost u okviru pojedinih trouglova, pa ako se izvuku $d\alpha_i$, $d\beta_i$ i $d\gamma_i$ ispred zagrade, dobijamo:

$$dx_{ku} = \frac{1}{3\rho}\sum_{1}^{k-1}{}_i\Big\{\Big[2\Delta x_{ik}\,ctg\alpha_i + \Delta x_{ik}\,ctg\beta_i - (-1)^i \Delta y_{ik}\Big]d\alpha_i +$$

$$+\Big[-\Delta x_{ik}\,ctg\alpha_i - 2\Delta x_{ik}\,ctg\beta_i - (-1)^i \Delta y_{ik}\Big]d\beta_i +$$

$$+\Big[-\Delta x_{ik}\,ctg\alpha_i + \Delta x_{ik}\,ctg\beta_i + (-1)^i 2\Delta y_{ik}\Big]d\gamma_i\Big\} \qquad \dots 34$$

Ako se uoči da se jednačina 22 razlikuje od jednačine 21 samo u tome što na mesto Δy_{ik} stoji Δx_{ik} i obrnuto, kao i da su predznaci ispred $d\gamma_i$ suprotni, može se odmah napisati i jednačina za priraštaj ordinate:

$$dy_{ku} = \frac{1}{3\rho}\sum_{1}^{k-1}{}_i\Big\{\Big[2\Delta y_{ik}\,ctg\alpha_i + \Delta y_{ik}\,ctg\beta_i + (-1)^i \Delta x_{ik}\Big]d\alpha_i +$$

$$+\Big[-\Delta y_{ik}\,ctg\alpha_i - 2\Delta y_{ik}\,ctg\beta_i + (-1)^i \Delta x_{ik}\Big]d\beta_i +$$

$$+\Big[-\Delta y_{ik}\,ctg\alpha_i + \Delta y_{ik}\,ctg\beta_i - (-1)^i \Delta x_{ik}\Big]d\gamma_i\Big\} \qquad \dots 35$$

U ovim jednačinama su priraštaji koordinata izraženi u funkciji priraštaja direktno merenih uglova, pa je sada moguće preći sa priraštaja na srednje greške poznatim postupkom:

$$m_{xku} = \frac{1}{9\rho^2}\Sigma\Big\{\Big[4\Delta x^2_{ik}\,ctg^2\alpha_i + \Delta x^2_{ik}\,ctg^2\beta_i + \Delta y^2_{ik} + 4\Delta x^2_{ik}\,ctg\alpha_i\,ctg\beta_i -$$

$$-(-1)^i 4\Delta x_{ik}\Delta y_{ik}\,ctg\alpha_i - (-1)^i 2\Delta x_{ik}\Delta y_{ik}\,ctg\beta_i\Big]m_{\alpha i} +$$

$$+\left[\Delta x^2_{ik} ctg^2\alpha_i + 4\,\Delta x^2_{ik} ctg^2\beta_i + \Delta y^2_{ik} + 4\,\Delta x^2_{ik} ctg\alpha_i\, ctg\beta_i + \right.$$

$$\left. + (-1)^i\, 2\,\Delta x_{ik}\,\Delta y_{ik} ctg\alpha_i + (-1)^i\, 4\,\Delta x_{ik}\,\Delta y_{ik} ctg\beta_i\right] m_{\beta i} +$$

$$+\left[\Delta x^2_{ik} ctg\alpha_i + \Delta x^2 ctg^2\beta_i + 4\,\Delta y^2_{ik} - 2\,\Delta x^2_{ik} ctg\alpha_i\, ctg\beta_i - \right.$$

$$\left. - (-1)^i\, 4\,\Delta x_{ik}\,\Delta y_{ik} ctg\alpha_i + (-1)^i\, 4\,\Delta x_{ik}\,\Delta y_{ik} ctg\beta_i \right] m_{\gamma i} \quad \ldots \quad 36$$

Ako su po već navedenoj predpostavci:

$$m\alpha_i = m\beta_i = m\gamma_i = m_u \qquad 37$$

biće:

$$m^2_{xku} = + \frac{m^2_u}{9\rho^2} \Sigma \left[6\,\Delta x^2_{ik} ctg^2\alpha_i + 6\,\Delta x_{ik} ctg^2\beta_i + 6\,\Delta y^2_{ik} + 6\,\Delta x^2_{ik} ctg\alpha_i\, ctg\beta_i - \right.$$

$$\left. - (-1)^i\, 6\,\Delta x_{ik}\,\Delta y_{ik} ctg\alpha_i + (-1)^i\, 6\,\Delta x_{ik}\,\Delta y_{ik} ctg\beta_i \right] \quad \ldots \quad 38$$

Ova jednačina može biti napisana u obliku:

$$m^2_{xku} = \frac{2}{3}\,\frac{m^2_u}{\rho^2} \Sigma \left\{ \Delta x^2{}_i \left[ctg^2\alpha_i + ctg^2\beta_i + ctg\alpha_i\, ctg\beta_i \right] + \right.$$

$$\left. + \Delta y^2_{ik} + \Delta x_{ik}\,\Delta y_{ik} \left[-(-1)^i ctg\alpha_i + (-1)^i ctg\beta_i \right] \right\} \quad \ldots \quad 39$$

Istim postupkom se može, polazeći od jednačine 35 dobiti srednja greško ordinate:

$$m^2_{yku} = \frac{2}{3}\,\frac{m^2_u}{\rho^2} \Sigma \left\{ \Delta y^2_{ik} \left[ctg^2\alpha_i + ctg^2\beta_i + ctg\alpha_i\, ctg\beta_i \right] + \right.$$

$$\left. + x^2_{ik} + \Delta x_{ik}\,\Delta y_{ik} \left[(-1)^i ctg\alpha_i - (-1)^i ctg\beta_i \right] \right\} \quad \ldots \quad 40$$

Ukupna položajna greška, koja je posledica grešaka merenih uglova, bi bila:

$$m^2_{Pku} = \frac{2}{3}\,\frac{m^2_u}{\rho^2} \Sigma \left\{ S^2_{ik} \left[ctg^2\alpha_i + ctg^2\beta_i + ctg\alpha_i\, ctg\beta_i \right] + S^2_{ik} \right\} \quad \ldots \quad 41$$

SREDNJA KVADRATNA GREŠKA M_{xku} I M_{yku} ZA SLUČAJ DA SU UGLOVNA MERENJA U MREŽI OBAVLJENA GIRUSNOM METODOM, A DA IZRAVNAVANJE PO PRAVCIMA NIJE OBAVLJENO — Ako su uglovna merenja u mreži obavljena girusnom metodom, tada su rezultati opažanja pravci. Uglovi koji figurišu u jednačinama 21 i 22 nisu u tom slučaju međusobno nezavisni. Neki uglovi zavise od zajedničkih pravaca. U tom slučaju ni priraštaji nisu međusobno nezavisni jer se dobijaju kao razlike priraštaja odgovarajućih pravaca. Ako pravce između tačaka »i« i »j« obeležimo sa p_{ij} tada, prema slici 1, možemo direktno pisati za priraštaje uglova:

$$
\begin{array}{lll}
d\alpha_1 = dp_{01} - dp_{02} & d\alpha_2 = dp_{13} - dp_{12} & d\alpha_3 = dp_{23} - dp_{24} \\
d\beta_1 = dp_{20} - dp_{21} & d\beta_2 = dp_{32} - dp_{31} & d\beta_3 = dp_{42} - dp_{43} \\
d\gamma_1 = dp_{12} - dp_{10} & d\gamma_2 = dp_{21} - dp_{23} & d\gamma_3 = dp_{34} - dp_{32} \\
d\alpha_4 = dp_{35} - dp_{34} & d\alpha_5 = dp_{45} - dp_{46} & \dots\dots\dots\dots \\
d\beta_4 = dp_{54} - dp_{53} & d\beta_5 = dp_{64} - dp_{65} & \dots\dots\dots\dots \\
d\gamma_4 = dp_{43} - dp_{45} & d\gamma_5 = dp_{56} - dp_{54} & \dots\dots\dots\dots
\end{array}
\qquad 42
$$

Zamenom ovih izraza za priraštaje uglova u jednačinu 21 dobijamo:

$$
\begin{aligned}
dx_{ku} = \frac{1}{\rho} \Big[& \Delta x_{1k} ctg\alpha_1\, dp_{01} - \Delta x_{1k} ctg\alpha_1\, dp_{02} - \Delta x_{1k} ctg\beta_1\, dp_{20} + \Delta x_{1k} ctg\beta_1\, dp_{21} - \\
& - \Delta y_{1k} dp_{21} + \Delta y_{1k} dp_{10} + \Delta x_{2k} ctg\alpha_2\, dp_{13} - \Delta x_{2k} ctg\alpha_2\, dp_{12} - \Delta x_{2k} ctg\beta_2\, dp_{32} + \\
& + \Delta x_{2k} ctg\beta_2\, dp_{31} + \Delta y_{2k} dp_{21} - \Delta y_{2k} dp_{10} + \Delta x_{3k} ctg\alpha_3\, dp_{23} - \Delta x_{3k} ctg\alpha_3\, dp_{24} - \\
& - \Delta x_{3k} ctg\beta_3\, dp_{42} - \Delta x_{3k} ctg\beta_3\, dp_{43} - \Delta y_{3k} dp_{34} + \Delta y_{3k} dp_{32} + \Delta x_{4k} ctg\alpha_4\, dp_{35} - \\
& - \Delta x_{4k} ctg\alpha_4\, dp_{34} - \Delta x_{4k} ctg\beta_4\, dp_{54} + \Delta x_{4k} ctg\beta_4\, dp_{53} + \Delta y_{4k} dp_{43} - \Delta y_{4k} dp_{45} + \\
& + \Delta x_{4k} ctg\alpha_5\, dp_{45} - \Delta x_{5k} ctg\alpha_5\, dp_{46} - \Delta x_{5k} ctg\beta_5\, dp_{64} + \Delta x_{5k} ctg\beta_5\, dp_{65} - \\
& - \Delta y_{5k} dp_{56} + \Delta y_{5k} dp_{54} + \dots\dots\dots\dots \Big] \dots \quad 43
\end{aligned}
$$

Ako se u ovoj jednači

Ako sa priraštaja pređemo na srednju kvadratnu grešku m_{xku} i predpostavimo da su svi pravci dobiveni sa jednom tačnošću odnosno sa srednjom kvadratnom greškom m_p, pri čemu m^2_p možemo izvući ispred zagrade, dobiajmo:

$$
\begin{aligned}
m^2_{xku} = \frac{m^2_p}{\rho^2} \Big[& \Delta x^2_{1k}ctg^2\alpha_1 + \Delta x^2_{1k}ctg^2\alpha_1 + \Delta x^2_{1k}ctg^2\beta_1 + \Delta y^2_{1k} + \Delta x^2_{1k}ctg^2\beta_1 + \\
& + 2\Delta x_{1k}\Delta y_{1k}ctg\beta_1 + \Delta y^2_{2k} + \Delta x^2_{2k}ctg^2\alpha_2 + 2\Delta x_{2k}\Delta y_{1k}ctg\alpha_2 + \Delta y^2_{1k} + \\
& + \Delta x^2_{2k}ctg^2\alpha_2 + \Delta x^2_{2k}ctg^2\beta_2 + \Delta x^2_{2k}ctg^2\beta_2 - 2\Delta x_{2k}\Delta y_{3k}ctg\beta_2 + \Delta y^2_{3k} + \\
& + \Delta x^2_{3k}ctg^2\alpha_3 - 2\Delta x_{3k}\Delta y_{2k}ctg\alpha_3 + \Delta y^2_{2k} + \Delta x^2_{3k}ctg^2\alpha_3 + \Delta x^2_{3k}ctg^2\beta_3 + \Delta x^2_{3k}ctg^2\beta_3 + \\
& + 2\Delta x_{3k}\Delta y_{4k}ctg\beta_3 + \Delta y^2_{4k} + \Delta x^2_{4k}ctg^2\alpha_4 + 2\Delta x_{4k}\Delta y_{3k}ctg\alpha_4 + \Delta y^2_{3k} + \\
& + \Delta x^2_{4k}ctg^2\alpha_4 + \Delta x^2_{4k}ctg^2\beta_4 + \Delta x^2_{4k}ctg^2\beta_4 - 2\Delta x_{4k}\Delta y_{5k}ctg\beta_4 + \Delta y^2_{5k} + \\
& + \Delta x^2_{5k}ctg^2\alpha_5 - 2\Delta x_{5k}\Delta y_{4k}ctg\alpha_5 + \Delta y^2_{4k} + \Delta x^2_{5k}ctg^2\alpha_5 + \Delta x^2_{5k}ctg^2\beta_5 + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots \Big] \qquad 45
\end{aligned}
$$

Ako se u ovoj jednačini obave moguća sabiranja i nakon toga kao zajednički faktor izvuče 2 ispred zagrade, biće:

$$
\begin{aligned}
m^2_{xku} = \frac{2m^2_p}{\rho^2} \Big[& \Delta x^2_{1k}ctg^2\alpha_1 + \Delta x^2_{1k}ctg^2\beta_1 + \Delta y^2_{1k} + \Delta x_{1k}\Delta y_{2k}ctg\beta_{1k} + \\
& + \Delta x_{2k}\Delta y_{1k}ctg\alpha_2 + \Delta x^2_{2k}ctg^2\alpha_2 + \Delta x^2_{2k}ctg^2\beta_2 + \Delta y^2_{2k} - \Delta x_{2k}\Delta y_{3k}ctg\beta_2 - \\
& - \Delta x_{3k}\Delta y_{2k}ctg\alpha_3 + \Delta x^2_{3k}ctg^2\alpha_3 + \Delta x^2_{3k}ctg^2\beta_3 + \Delta y^2_{2k} + \Delta x_{3k}\Delta y_{4k}ctg\beta_3 + \\
& + \Delta_{4k}\Delta y_{3k}ctg\alpha_4 + \Delta x^2_{4k}ctg^2\alpha_4 + \Delta x^2_{4k}ctg^2\beta_4 + \Delta y^2_{4k} - \Delta x_{4k}\Delta y_{5k}ctg\beta_4 - \\
& - \Delta x_{5k}\Delta y_{4k}ctg\alpha_5 + \ldots\ldots\ldots\ldots \Big] \quad ..\ 46
\end{aligned}
$$

U ovoj jednačini se može uočiti zakonitost pojave pojedinih sabiraka i uopšteno pisati:

$$
\begin{aligned}
m^2_{xku} = \frac{2m^2_p}{\rho^2} \sum_{1}^{k-1} \Big[& \Delta x^2_{ik}ctg^2\alpha_i + \Delta x^2_{ik}ctg^2\beta_i + \Delta y^2_{ik} - \\
& -(-1)^i \Big(\Delta x_{ik}\Delta y_{i+1\cdot k}ctg\beta_i + \Delta x_{i+1\cdot k}\Delta y_{i\cdot k}ctg\alpha_{i+1} \Big) \Big] \quad ..\ 47
\end{aligned}
$$

Zamenom priraštaja za uglove izraženih preko priraštaja pravaca u jednačinu 22 dobijemo:

$$\begin{aligned} dy_{ku} = \frac{1}{\rho} \Big[& \Delta y_{1k} ctg\alpha_1 \, dp_{01} - \Delta y_{1k} ctg\alpha_1 \, dp_{02} - \Delta y_{1k} ctg\beta_1 \, dp_{20} + \Delta y_{1k} ctg\beta_1 \, dp_{21} + \\ & + \Delta_{1k} dp_{12} - \Delta x_{1k} dp_{10} + \Delta y_{2k} ctg\alpha_2 \, dp_{13} - \Delta y_{2k} ctg\alpha_2 \, dp_{12} - \Delta y_{2k} ctg\beta_2 \, dp_{32} + \\ & + \Delta y_{2k} ctg\beta_2 \, dp_{31} - \Delta x_{2k} dp_{21} + \Delta x_{2k} dp_{23} + \Delta y_{3k} ctg\alpha_3 \, dp_{23} - \Delta y_{3k} ctg\alpha_3 \, dp_{24} - \\ & - \Delta y_{3k} ctg\beta_3 \, dp_{42} + \Delta y_{3k} ctg\beta_3 \, dp_{43} + \Delta x_{3k} dp_{34} - \Delta x_{3k} dp_{32} + \Delta y_{4k} ctg\alpha_4 \, dp_{35} - \\ & - \Delta y_{4k} ctg\alpha_4 \, dp_{34} - \Delta y_{4k} ctg\beta_4 \, dp_{54} + \Delta y_{4k} ctg\beta_4 \, dp_{53} - \Delta x_{4k} dp_{43} + \Delta x_{4k} dp_{45} + \\ & + \Delta y_{5k} ctg\alpha_5 \, dp_{45} - \Delta y_{5k} ctg\alpha_5 \, dp_{46} - \Delta y_{5k} ctg\beta_5 \, dp_{64} + \Delta y_{5k} ctg\beta_5 \, dp_{65} \\ & + \Delta x_{5k} dp_{56} - \Delta x_{5k} dp_{54} + \ldots \Big] \quad \ldots 48 \end{aligned}$$

Ako se ovde priraštaji zajedničkih pravaca izvuku ispred zagrade, dobijamo:

$$\begin{aligned} dy_{ku} = \frac{1}{\rho} \Big[& \Delta y_{1k} ctg\alpha_1 \, dp_{01} - \Delta y_{1k} ctg\alpha_1 \, dp_{02} - \Delta y_{1k} ctg\beta_1 \, dp_{20} - \Delta x_{1k} dp_{10} + \\ & + (\Delta y_{1k} ctg\beta_1 - \Delta x_{2k}) dp_{21} - (\Delta y_{2k} ctg\alpha_2 - \Delta x_{1k}) dp_{12} + \Delta y_{2k} ctg\alpha_2 \, dp_{13} + \\ & + \Delta y_{2k} ctg\beta_2 \, dp_{31} - (\Delta y_{2k} ctg\beta_2 + \Delta x_{3k}) dp_{32} + (\Delta y_{3k} ctg\alpha_3 + \Delta x_{2k}) dp_{23} - \\ & - \Delta y_{3k} ctg\alpha_3 \, dp_{24} - \Delta y_{3k} ctg\beta_3 \, dp_{42} + (\Delta y_{3k} ctg\beta_3 - \Delta x_{4k}) dp_{43} - (\Delta y_{4k} ctg\alpha_4 - \\ & - \Delta x_{3k}) dg_{34} + \Delta y_{4k} ctg\alpha_4 \, dp_{35} + \Delta y_{4k} ctg\beta_4 \, dp_{53} - (\Delta y_{4k} ctg\beta_4 + \Delta x_{5k}) dp_{54} + \\ & + (\Delta y_{5k} ctg\alpha_5 + \Delta x_{4k}) dp_{45} - \Delta y_{5k} ctg\alpha_5 \, dp_{46} - \Delta y_{5k} ctg\beta_5 \, dp_{64} + \ldots \Big] \quad \ldots 49 \end{aligned}$$

Sa ovog izraza se može, analognim putem kao kod apscise x, preći na srednju kvadratnu grešku ordinate y:

$$\begin{aligned} m^2_{yku} = \frac{2m^2_p}{\rho^2} \sum_1^{k-1} {}_i \Big[& \Delta y^2_{ik} ctg^2\alpha_i + \Delta y^2_{ik} ctg^2\beta_i + \Delta x^2_{ik} + \\ & + (-1)^i \left(\Delta y_{ik} \Delta x_{i+1 \cdot k} ctg\beta_i + \Delta x_{ik} \Delta y_{i+1 \cdot k} ctg\alpha_{i+1} \right) \Big] \quad . . 50 \end{aligned}$$

U jednačinama 47 i 50, izrazi u malim zagradama predstavljaju razliku u tačnosti koordinata ako su one dobivene na osnovu opažanih pravaca u poređenju sa slučajem ako su koordinate dobivene na osnovu merenih uglova, čija tačnost je izražena jednačinama 27 i 28.

SREDNJE KVADRATNE GREŠKE M_{xku} i M_{yku} ZA SLUČAJ DA SU UGLOVNA MERENJA OBAVLJENA GIRUSNOM METODOM I DA JE OBAVLJENO IZRAVNAVANJE PO PRAVCIMA — Napred razmatrani slučajevi su bili uglavnom takve prirode da je bilo moguće za lanac trouglova dati izraze, preko kojih je moguće izvršiti ocenu tačnosti koordinata krajnje tačke u lancu sa proizvoljnim brojem trouglova.

Izravnavanje po pravcima, a posebno ako se radi o izravnatoj mreži u okviru koje se koristi jedan lanac, je delikatniji problem koga je teško definisati nekom opštom jednačinom. Za ocenu tačnosti ovog slučaja treba koristiti postupke koji su sa teorijske strane u literaturi prilično razjašnjeni, ali sa praktične tačke gledišta, kako je već ranije navedeno, ne arspolažemo nekim pristupačnim rešenjem.

Postupak ocene tačnosti bilo koje funkcije izravnatih veličina, koji je u najvećoj meri zastupljen u literaturi, podrazumeva sagledane potrebe ocene tačnosti pre izravnavanja, pri čemu se, pri rešavanju normalnih jednačina Gausovim postupkom eliminacije, u šemu rešavanja normalnih jednačina, uključuje još jedan ili više stubaca za ocenu tačnosti jedne ili više funkcija. Ovaj postupak je slabije praktikovan iz sledećih razloga:

— Nije uvek moguće još pre izravnavanja sagledati sve izvedene veličine čiju tačnost treba poznavati.

— Rešavanje normalnih jednačina računskim mašinama je težak i obiman posao, pa je uvek nerado proširivan i ovim problemom.

Principijelno, moguće je obaviti ocenu tačnosti koristeći već obavljen proces rešavanja normalnih jednačina, ali i to ima svoje specifične teškoće.

U novije vreme se izravnavanje većih mreža obavlja elektronskikm računarima. Nuzprodukt rešavanja normalnih jednačina je

Ako je funkcija čiju tačnost treba oceniti:

$$F = F(P^1, P^2, \ldots P^i, \ldots P^n) \quad 51$$

neophodno je naći parcijalne izvode:

$$F_i = \frac{\partial F}{\partial P^i} \quad 52$$

Za slučaj koga razmatramo, funkcije su x i y. Parcijalni izvodi apscisa x, po pojedinim pravcima biće obeleženi sa F_{xi}, a ordinata y sa F_{yi}. Ovi parcijalni izvodi su izrazi koji množe odgovarajuće priraštaje pravaca u jednačinama 44 i 48.

Malo je prostora u ovom radu za bilo kakva teorijska objašnjenja načina ocene tačnosti koji će u sledećem biti definisan, ali treba napomenuti da se ta objašnjenja u literaturi mogu naći.

Pre definicije postupka, ponovo treba naglasiti da se svakako predpostavlja da raspolažemo inverznom matricom normalnih jednačina, kao i da imamo na raspolaganju uslovne jednačine izravnavanja, koje su definisane koeficijentima, koji su u ovom slučaju obeleženi sa $u_{j\sigma}$. Ovde je σ indeks koji ima napred navedeno značenje, a »j« i ranije korišćen indeks »i« imaju domen varijacije od 1 do n, gde je n broj pravaca. Za koeficijent $u_{j\sigma}$, σ objašnjava kojoj uslovnoj jednačini taj koeficijenat pripada, a »j« kojem pravcu on odgovara.

Koristeći uslovne jednačine i parcijalne izvode, definišimo prve pomoćne veličine T^σ

$$T^\sigma = \sum_1^b u_j^\sigma F_j \quad 53$$

Na osnovu ovih pomoćnih veličina T^σ i inverzne matrice $H_{\rho\sigma}$, definišimo druge pomoćne veličine T_ρ

$$T_\rho = \sum_1^b T^\sigma H_{\rho\sigma} \quad 54$$

Srednja kvadratna greška funkcije F biće:

$$m_F m_F = mm\,[F_1F_1 + F_2F_2 \ldots\ldots + F_nF_n - (T_1T^1 + T_2T^2 + \ldots\ldots + T_bT^b)] \ldots \quad 55$$

Ovde je m srednja greška merene veličine, odnosno opažanog pravca.

Ovako definisan postupak može na što očigledniji način biti predstavljen sledećom šemom:

Broj merene veličine	Uslovne jednačine — Broj jednačine 1	2		σ		b	Parcijalni izvodi F_j	F_jF_j
1	u^1_1	u^2_1	....	u^σ_1	....	u^b_1	F_1	F_1F_1
2	u^1_2	u^2_2	....	u^σ_2	....	u^b_2	F_2	F_2F_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...
j	u^1_j	u^2_j	....	u^σ_j	....	u^b_j	F_j	F_jF_j
...	...	...	...	...	...	...	...	...
n	u^1_n	u^2_n	....	u^σ_n	....	u^b_n	F_n	F_nF_n
Prve pomoćne veličine	$T^1= \Sigma u^1_jF_j$	$T^2= \Sigma u^2_jF_j$		$T\sigma= \Sigma u^\sigma_jF_j$		$T^b= \Sigma u^b_jF_j$		$+\Sigma F_jF_j$ $-\Sigma T^\sigma T_\varrho$

	Inverzna matrica 1	2		σ		b	Druge pomoćne veličine
1	H_{11}	H_{21}	....	$H_{1\sigma}$	....	H_{1b}	$T_1=\Sigma T^\sigma H_{1\sigma}$
2	H_{21}	H_{22}	....	$H_{2\sigma}$	....	H_{2b}	$T_2=\Sigma T^\sigma H_{2\sigma}$
...	...	...	...	...	...	...	...
ϱ	H_1	H_2	....	$H_{\varrho\sigma}$	....	H_b	$T_\varrho=\Sigma T^\sigma H_{\varrho\sigma}$
...	...	...	...	...	...	...	...
b	H_{b1}	H_{b2}	....	$H_{b\sigma}$	....	H_{bb}	$T_b=\Sigma T^\sigma H_{b\sigma}$
	T^1T_1	T^2T_2	...	$\Gamma\sigma T_\varrho$	...	T^bT_b	

Ako se radi o oceni tačnosti apscise x biće parcijalni izvodi označeni sa F_{xj}, a za ordinatu y sa F_{yj}. Kada treba obaviti ocenu tačnosti više funkcija, mogu se pored matrice uslovnih jednačina u navedenoj šemi dopisati dve ili više kolona parcijalnih izvoda odgovarajućih funkcija, pa će sa ovim u vezi biti neophodno isto toliko vrsta T^σ ,a zatim isto toliko kolona za T_ϱ.

PRIMERI OCENE TAČNOSTI ODREĐIVANJA KOORDINATA — Već je naveden lanac trouglova na slici 2 sa koje su grafičkim putem određeni neki od potrebnih parcijalnih izvoda, a na slici 3 su, isto grafički, određeni ostali potrebni parcijalni izvodi. Svi ovi parcijalni izvodi su navedeni u prilogu 1, koji je tako napravljen da se njegovom obradom dobijaju potrebni elementi za ocenu tačnosti koordinata za neizravnate uglove preko jednačina 27 i 28, kao i za izravnate uglove preko jednačina 39 i 40. Zbirovi A_1 i B_1 su polazna osnova za ocenu tačnosti za slučaj neizravnatih uglova, a u ovom prilogu su formirane i veličine $\frac{2}{3}A'$ i $\frac{2}{3}B'$, koje su polazna osnova za ocenu tačnosti koordinata dobivenih preko izravnatih uglova.

U prilogu 2 su obavljena potrebna računanja da bi se, u sklopu odgovarajućih elemenata dobivenih u prilogu 1, a u skladu sa jednačinama 47 i 50, mogla da obavi ocena tačnosti koordinata dobivenih na osnovu neizravnatih pravaca. U ovom prilogu su prvo dobiveni zbirovi A_4 i B_4. Koristeći ove zbirove i zbirove A_1 i B_1 iz priloga 1, u prilogu 2 su formirani izrazi A" i B" koji su iskorišćeni za dalju ocenu tačnosti ovog slučaja.

Za slučaj ocene tačnosti izravnatih veličina, u cilju ilustracije postupka pri radu po navedenoj šemi na što jednostavnijem primeru, obrađena je ocena tačnosti u prilogu 3 za slučaj izravnatih uglova. Ovaj slučaj je obrađen u prilogu 1. Vrednosti dobivene u prilogu 3 se slažu sa odgovarajućim vrednostima

$\frac{2}{3}A'$ i $\frac{2}{3}B'$.

U prilogu 4 su sračunati elementi za ocenu tačnosti koordinata istog lanca koji je kao prost lanac izravnat po pravcima. Ovaj prilog je obrađen u svemu prema navedenoj šemi. Uslovne jednačine navedene u ovom prilogu ne zahtevaju nikakvo objašnjenje: Parcijalni izvodi po apscisi x i po ordinati y su formirani prema jednačinama 44 i 49, koje se odnose na ocenu tačnosti koordinata dobivenih na osnovu pravaca. Ovi parcijalni izvodi su dobiveni na osnovu parcijalnih izvoda po uglovima koji su dati u prilogu 1. Za slučaj ovakvog prostog lanca, inverzna matrica normalnih jednačina, koja je u optšem slučaju glavni problem, je uzeta iz (3), gde su na stranicama od 307 do 316 navedene inverzne matrice normalnih jednačina pri izravnavanju prostog lanca od 1 do 12 trouglova. U ovom prilogu su formirani izrazi A''' i B''', koji su dalje u tabeli str. 23 iskorišćeni za računanje odgovarajućih srednjih grešaka.

U tabeli 1 su iz priloga 1 unete prvo vrednosti za A_1 i B_1 a zatim $\frac{2}{3}A'$ i $\frac{2}{3}B'$.

Iz priloga 2 su u ovu tabelu unete vrednosti za A" i B". Da bi se u ovoj tabeli za sve slučajeve koristila srednja greška merenog ugla, iz priloga 4 su unete vrednosti $\frac{A'''}{2}$ i $\frac{B'''}{2}$. Sve ove unete vrednosti su prvo pomnožene sa:

$$\frac{m^2}{\varrho^2} = 3{,}761 \cdot 10^{-10}$$

da bi se dobili kvadrati odgovarajućih srednjih grešaka. U ovoj tabeli je sračunata i položajna greška na uobičajen način.

Analizirajući ovu tabelu zaključujemo:

— Pravci obezbeđuju veću tačnost u određivanju položaja tačke nego uglovi i to:

za neizravnate podatke za oko 3%

za izravnate podatke za oko 9%

— Izravnavanjem se poboljšava tačnost koordinata i to:

— sa izravnatim uglovima oko 11%

— sa izravnatim pravcima za oko 16%.

Rezime — Postojeći načini ocene tačnosti koordinata trigonometrijskih tačaka samo delimično zadovoljavaju, kada se radi o primenjenoj geodeziji i rudarskim merenjima Problem što realnije ocene tačnosti dužine i direkcionog ugla između dveju udaljenih točaka je teško rešiv zbog relativno malih mogućnosti ocene tačnosti koordinata tih udaljenih tačaka na zadovoljavajući način. U ovom radu je razmatran problem ocene tačnosti koordinata udaljenih tačaka, bazirajući se na prost lanac, preko koga su, polazeći od jedne, određene koordinate druge od tih dveju tačaka koje su u pitanju. Razmatran je samo uticaj uglovnih merenja na tačnost koordinata.

U radu su izvedene jednačine za srednje greške m_x i m_y za lanac sa proizvoljnim brojem proizvoljnih oblika trouglova u lancu i to:

— za slučaj ako su mereni pojedinačno uglovi u trouglovima a da izravnavanje nije obavljeno.

— Za slučaj ako su mereni pojedinačni uglovi u trouglovima koji su izravnati za uslove trougla.

— Za slučaj da su uglovna merenja obavljena girusnom metodom, a da izravnavanje po pravcima nije obavljeno.

Za najopštiji slučaj, ako se koordinate računaju na osnovu izravnatih podataka bilo pravaca bilo uglova, naveden je postupak ocene tačnosti koordinata, ako se ima na raspolaganju inverzna matrica normalnih jednačina.

Prethodno je dat način grafičkog određivanja parcijalnih izvoda koordinata po uglovima.

Naveden je primer ocene tačnosti za sve navedene slučajeve.

LITERATURA

1 — Čubranić N.: »Teorija pogrešaka s računom izjednačenja« — Zagreb, 1966.

2 — Hristov V.: »Rasširenije uravnivanija po spasobu najmenših kvadratov« — Sofija, 1966.

2 — Hristov V.: »Rasširenije uravnivanija po spasobu najmenših kvadratov« —

4 — Čebotarev S. A.: »Sposob najmenših kvadratov s osnovami teorii verojatnostej« — Moskva, 1959.

5 — Reissman G.: »Die Ausgleichungs-rechnung« — Berlin, 1962.

6 — Gajdaev P. A. - Boljšakov V. D.: »Teorija matematičeskoj obrabotki geodezičeskih izmereniji« — Moskva, 1969.

Prilog br. 1

Broj trougla	F_{xi}	F^2_{xi}	F_{yi}	F^2_{iy}
1	Δy_{i5}		Δx_{i5}	
1	+3760	$14{,}14 \cdot 10^6$	+3700	$13{,}69 \cdot 10^6$
2	+3360	11,29	+1580	2,50
3	+1380	1,90	+2300	5,29
4	+1860	3,45	+ 580	0,34
	$\Delta x_{i5} ctg\alpha_i$		$\Delta y_{i5} ctg\alpha_i$	
1	+3000	9,00	+3160	9,98
2	+1350	1,82	+2940	8,64
3	+1660	2,75	+1000	1,00
4	+ 540	0,29	+1740	3,03
	$\Delta x_{i5} ctg\beta_i$		$\Delta y_{i5} ctg\beta_i$	
1	+ 900	0,81	+ 940	0,88
2	+1300	1,60	+2890	7,95
3	+ 750	0,56	+ 480	0,23
4	+ 600	0,36	+1960	3,84
		$A_1 = 47{,}97 \cdot 10^6$		$B_1 = 57{,}37 \cdot 10^6$
		$\Delta y_{i5} ctg\alpha_i \Delta y_{i5} ctg\beta_i$		$\Delta x_{i5} ctg\alpha_i \Delta x_{i5} ctg\beta_i$
1		$+2{,}70 \cdot 10^6$		$+2{,}97 \cdot 10^6$
2		+1,75		+8,29
3		+1,24		+0,48
4		+0,32		+3,41
		$A_2 = +6{,}01$		$B_2 = +15{,}15$

$+\Delta x_{15} ctg\alpha_1 \cdot \Delta y_{15}$	+11,28	$-\Delta x_{15} ctg\alpha_1 \cdot \Delta x_{15}$	−11,69
$-\Delta x_{25} ctg\alpha_2 \ \Delta y_{25}$	− 4,58	$+\Delta y_{25} ctg\alpha_2 \ \Delta x_{25}$	+ 4,65
$+\Delta x_{35} ctg\alpha_3 \ \Delta y_{35}$	+ 2,29	$-\Delta y_{35} ctg\alpha_3 \ \Delta x_{35}$	− 4,65
$-\Delta x_{45} ctg\alpha_4 \ \Delta y_{45}$	− 1,00	$+\Delta y_{45} ctg\alpha_4 \ \Delta x_{45}$	+ 1,01
$-\Delta x_{15} ctg\beta_1 \ \Delta y_{15}$	− 3,38	$+\Delta y_{15} ctg\beta_1 \ \Delta x_{15}$	+ 3,48
$+\Delta x_{25} ctg\beta_2 \ \Delta y_{25}$	+ 4,37	$-\Delta y_{25} ctg\beta_2 \ \Delta x_{25}$	− 4,45
$-\Delta x_{35} ctg\beta_3 \ \Delta y_{35}$	− 1,04	$+\Delta y_{35} ctg\beta_3 \ \Delta x_{35}$	+ 1,10
$+\Delta x_{45} ctg\beta_4 \ \Delta y_{45}$	+ 1,12	$-\Delta y_{45} ctg\beta_4 \ \Delta x_{45}$	− 1,14
$A_3 =$	$+ 9{,}10 \cdot 10^6$	$B_3 =$	$- 9{,}34 \cdot 10^6$

$A' = A_1 + A_2 + A_3 = +63{,}08 \cdot 10^6$ $B' = B_1 + B_2 + B_3 = +63{,}18 \cdot 10^6$

$\frac{2}{3} A' = 42{,}05 \ 10^6$ $\frac{2}{3} B' = 42{,}12 \ 10^6$

Prilog br. 2

Broj trougla	$-(-1)^i \Delta x_{i5} \operatorname{ctg}\beta_i$	Δy_i	1· Proizvod	$(-1)^i \Delta y_{i5} \operatorname{ctg}\beta_i$	Δx_i	1· Proizvod
1	+ 900	3360	+3,02	— 940	1580	— 1,49
2	—1300	1380	—1,79	+2890	2300	+ 6,49
3	+ 750	1860	+1,39	— 480	580	— 0,28
4	— 600	0	0	+1960	0	0
	$-(-1)^i \Delta x_{i+1,5} \cdot \operatorname{ctg}\alpha_i$	Δy_{i5}		$(-1)^i \Delta y_{i+1,5} \cdot \operatorname{ctg}\alpha_i$	Δx_{i5}	
1	+1350	3760	+5,07	—2940	3700	—10,87
2	—1660	3360	—5,58	+1000	1580	+ 1,58
3	+ 540	1380	+0,75	—1740	230	— 4,00
4	0	1860	0	0	580	0
		A_4 =	+2,86		B_4 =	— 8,75
		$A'' = A_1 + A_4$ =	+50,83		$B'' = B_1 + B_4$ =	+48,80

Prilog br. 3

Uglovi	Uslovne jednačine 1	2	3	4	Parcijalni izvodi prema jednačinama br. 21 i 22 Fx_j	Fy_j
1	+1				+3000	+3160
1	+1				— 900	— 940
1	+1				—3760	+3700
2		+1			+1350	+2940
2		+1			—1300	—2820
2		+1			+3360	—1580
3			+1		+1660	+1000
3			+1		— 750	— 480
3			+1		—1380	+2300
4				+1	+ 540	+1740
4				+1	— 600	—1960
4				+1	+1860	— 580
$T_x\sigma$	—1660	+3410	— 470	+1800		
$T_y\sigma$	+5920	—1460	+2820	— 800		

	Inverzna matrica 1	2	3	4		
1	$+\frac{1}{3}$				$T_{x1} = -553$	$T_{y1} = +1973$
2		$+\frac{1}{3}$			$T_{x2} = +1137$	$T_{y2} = -487$
3			$+\frac{1}{3}$		$T_{x3} = -157$	$T_{y3} = +940$
4				$+\frac{1}{3}$	$T_{x4} = +600$	$T_{y4} = -267$

$$\Sigma F_{xj} F_{xj} = A_1 = +47{,}97\ 10^6 \qquad \Sigma F_{yj} F_{yj} = B_1 = +57{,}37 \cdot 10^6$$
$$-\ 5{,}95 \cdot 10^6 \qquad\qquad = \quad -15{,}25 \cdot 10^6$$

$$\frac{2}{3} A' = +42{,}02 \cdot 10^6 \qquad \frac{2}{3} B' = +42{,}12 \cdot 10^6$$

Tabela br. 1

		m^2_{x5u}	m_{x5u}		m^2_{y5u}	m_{y5u}	m^2_{P5u}	m_{P5u}
Neizravnati uglovi	$A_1 = 47{,}97 \cdot 10^6$	0,0180	0,134	$B_1 = 57{,}37 \cdot 10^6$	0,0216	0,147	0,0396	0,199
Izravnati uglovi	$\frac{2}{3} A' = 42{,}05 \cdot 10^6$	0,0158	0,126	$\frac{2}{3} B' = 42{,}12 \cdot 10^6$	0,0158	0,126	0,0316	0,177
Neizravnati pravci	$A'' = 50{,}83 \cdot 10^6$	0,0190	0,138	$B'' = 48{,}80 \cdot 10^6$	0,0184	0,136	0,0374	0,193
Izravnati pravci	$\frac{A}{2} = 36{,}13 \cdot 10^6$	0,0136	0,117	$\frac{B}{2} = 32{,}54 \cdot 10^6$	0,0122	0,110	0,0258	0,161

PRILOG 4.

	Matrica uslovnih jednačina U_j^{σ}				Parcijalni izvodi			
					x		y	
					F_{xj}		F_{yj}	
	1	2	3	4				
p_{02}	−1				$-\Delta x_{1K}\,ctg\,\alpha_1$	−3000	$-\Delta y_{15}\,ctg\,\alpha_1$	−3160
p_{01}	+1				$\Delta x_{15}\,ctg\,\alpha_1$	+3000	$+\Delta y_{15}\,ctg\,\alpha_1$	+3160
p_{10}	−1				$+\Delta y_{15}$	+3760	$-\Delta x_{15}$	−3700
p_{12}	+1	−1			$-(\Delta y_{25}\,ctg\,\alpha_2+\Delta y_{15})$	−5110	$-(\Delta y_{25}\,ctg\,\alpha_2-\Delta x_{15})$	+760
p_{13}		+1			$\Delta x_{25}\,ctg\,\alpha_2$	+1350	$\Delta y_{25}\,ctg\,\alpha_2$	+2940
p_{24}			−1		$-\Delta x_{35}\,ctg\,\alpha_3$	−1660	$-\Delta y_{35}\,ctg\,\alpha_3$	−1000
p_{23}		−1	+1		$\Delta x_{35}\,ctg\,\alpha_3-\Delta y_{25}$	−1700	$+\Delta y_{35}\,ctg\,\alpha_3+\Delta x_{25}$	+2580
p_{21}	−1	+1			$\Delta x_{15}\,ctg\,\beta_1+\Delta y_{25}$	+4260	$\Delta y_{15}\,ctg\,\beta_1-\Delta x_{25}$	−640
p_{20}	+1				$-\Delta x_{15}\,ctg\,\beta_1$	−900	$-\Delta y_{15}\,ctg\,\beta_1$	−940
p_{31}		−1			$\Delta x_{25}\,ctg\,\beta_2$	+1300	$+\Delta y_{25}\,ctg\,\beta_2$	+2820
p_{32}		+1	−1		$-\Delta x_{25}\,ctg\,\beta_2+\Delta y_{35}$	+80	$-(\Delta y_{25}\,ctg\,\beta_2+\Delta x_{35})$	−5120
p_{34}			+1	−1	$-(\Delta x_{45}\,ctg\,\alpha_4+\Delta y_{35})$	−1920	$-(\Delta y_{45}\,ctg\,\alpha_4-\Delta x_{35})$	−560
p_{35}				+1	$\Delta x_{45}\,ctg\,\alpha_4$	+540	$\Delta y_{45}\,ctg\,\alpha_4$	+1740
p_{45}				−1	$\Delta x_{55}\,ctg\,\alpha_5-\Delta y_{45}$	−1860	$\Delta y_{55}\,ctg\,\alpha_5+\Delta x_{45}$	+580
p_{43}			−1	+1	$\Delta x_{35}\,ctg\,\beta_3+\Delta y_{45}$	+2610	$\Delta y_{35}\,ctg\,\beta_3-\Delta x_{45}$	−100
P_{42}			+1		$-\Delta x_{35}\,ctg\,\beta_3$	−750	$-\Delta y_{35}\,ctg\,\beta_3$	−480
p_{53}				−1	$\Delta x_{45}\,ctg\,\beta_4$	+600	$+\Delta y_{45}\,ctg\,\beta_4$	+1960
p_{54}				+1	$-\Delta x_{45}\,ctg\,\beta_4-\Delta y_{55}$	−600	$-(\Delta y_{45}\,ctg\,\beta_4+\Delta x_{55})$	−1960

T_x^{σ}	−8030	+11200	−5400	+5730
T_y^{σ}	+10480	−8980	+8880	−3420

$$\Sigma F_{xj} F_{xj} = 2A'' = 101.90 \cdot 10^6 \qquad \Sigma F_{yj} F_{yj} = 2B'' = 97.60 \cdot 10^6$$

$$-\Sigma T_x^{\rho} T_{x\sigma} = -29.63 \cdot 10^6 \qquad -\Sigma T_y^{\rho} T_{y\sigma} = -32.52 \cdot 10^6$$

$$A''' = 72.70 \cdot 10^6 \qquad B''' = 66.08 \cdot 10^6$$

INVERZNA MATRICA

					$T_{x\rho}$	$T_{y\rho}$
1	0.191	0.073	0.023	0.009	−789	+1519
2	0.073	0.218	0.082	0.027	+1574	−563
3	0.027	0.082	0.218	0.073	−64	+1240
4	0.009	0.027	0.073	0.191	+929	−157