MODIFIKACIJA KORELACIONE MATRICE PRAVACA DOBIVENIH NA OSNOVU UGLOVA DA BI POPRAVKA POČETNOG PRAVCA BILA RAZLIČITA OD NULE

Jovan STEVANOVIĆ — Bor

Ako su pravci dobiveni na osnovu uglova, oni su u korelaciji. Obzirom na način kako se na osnovu uglova dobijaju pravci, korelaciona matrica pravaca jedne stanice se najjednostavnije formira ako se, za jednu stanicu i pravce na njoj, pođe od logične pretpostavke da je početni pravac bezpogrešan, da je prvi pravac od početnog pravca pogrešan zbog pogrešnosti prvog ugla itd. Ovako tretiranje problema daje korelacionu matricu čiji su svi članovi sa indeksom jedan jednaki nuli. Zbog ovakve matrice, popravke početnih pravaca svake stanice nakon izravnavanja su jednake nuli, a popravke ostalih pravaca odnosne stanice su umanjene za popravku početnog pravca. Iz ove činjenice može da proiziđe utisak da izravnavanje sa ovakvom koleracionom matricom nije u stvarnom smislu izravnavanje po pravcima, već opet po uglovima, ali u ovom slučaju po uglovima između početnog i odgovarajućih pravaca.

Kako pri izravnavanju po pravcima koji nisu u korelaciji, početni pravci dobijaju popravke na isti način kao i ostali pravci, može se postaviti pitanje modifikacije korelacione matrice i njeno izražavanje u takvom obliku koji bi obezbjeđivao pri izravnavanju odgovarajuće popravke početnih pravaca. Da bi ovaj problem bio rešen, bit će korisno poći od konstatacije da sama priroda pravaca uslovljava takve popravke jedne stanice čiji je zbir jednak nuli.

Ako je zadana korelaciona matrica pravaca G^{ij} i uslovne jednačine sa koeficijentima $U\sigma_j$ na osnovu kojih se dobijaju korelate $K\sigma$, služeći se Ričijevim računom kako je to rađeno u (1), možemo dobiti popravke pravaca jedne stanice sa »s« pravaca u opštem obliku:

$$\bar{e}^{i} = G^{ij} U_j^{\sigma} K_{\sigma}$$

odnosno:

$$\bar{e}^{1} = G^{1j} U_j^{\sigma} K_{\sigma} = 0$$

$$\bar{e}^{2} = G^{2j} U_j^{\sigma} K_{\sigma}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\bar{e}^{s} = G^{sj} U_j^{\sigma} K_{\sigma}$$

Prof. Dr Jovan Stevanović - Bor - Rudarsko-metalurški fakultet — Bor, Ul. 29. novembar broj 37

(Ovde se u skladu sa Ajnštajnovom konvencijom, podrazumeva zbir po »j« pošto se indeks »j« javlja u izrazu i kao gornji i kao donji, a isto tako ovi izrazi podrazumevaju zbir i po »σ« jer se i indeks »σ« javlja kao gornji i kao donji).

Ovakve popravke koje su redukovane na početni pravac su obeležene sa $\bar{e}^{i}$. Neka su popravke koje nisu redukovane na početni pravac obeležene sa e^{i}.

Zbog prirode bilo jednih bilo drugih popravaka, odgovarajuće sume popravaka svake stanice su:

$$\Sigma \bar{e}^{i} = 0 \quad \ldots \quad 2$$

$$\Sigma e^{i} = 0 \quad \ldots \quad 3$$

Pošto su:

$$\bar{e}^{1} = e^{1} - e^{1}$$

$$\bar{e}^{2} = e^{2} - e^{1} \quad \ldots \quad 4$$

$$\ldots\ldots$$

$$\bar{e}^{s} = e^{s} - e^{1}$$

to je:

$$\Sigma \bar{e}^{i} = e^{i} - se^{1} - se^{1} \quad \ldots \quad 5$$

Odavde je:

$$e^{1} = -\frac{\Sigma \bar{e}^{i}}{s} \quad \ldots \quad 6$$

Ako je poznata popravka e^{1}, ostale popravke, na osnovu jednačine 4, su:

$$e^{1} = \bar{e}^{1} + e^{1} = 0 + e^{1} = e^{1}$$

$$e^{2} = \bar{e}^{2} + e^{1} \quad \ldots \quad 7$$

$$\ldots\ldots$$

$$e^{s} = \bar{e}^{s} + e^{1}$$

Na osnovu jednačina l i jednačina 7 dobijamo:

$$e^{1} = -\frac{\Sigma \bar{e}^{i}}{s} = -\frac{G^{1j}U_{j}^{\sigma}K_{\sigma} + \ldots + G^{sj}U_{j}^{\sigma}K_{\sigma}}{s} \quad \ldots \quad 8$$

odnosno:

$$e^{1} = -\frac{G^{1j} + G^{2j} + \ldots + G^{sj}}{s}U_{j}^{\sigma}K_{\sigma} = -\frac{\Sigma G^{kj}}{s}U_{j}^{\sigma}K_{\sigma} \quad \ldots \quad 9$$

Ostale popravke bi bile:

$$e^{2} = \bar{e}^{2} + e^{1} = G^{2j}U_{j}^{\sigma}K_{\sigma} - \frac{\Sigma G^{kj}}{s}U_{j}^{\sigma}K_{\sigma} = \left(G^{2j} - \frac{\Sigma G^{kj}}{s}\right)U_{j}^{\sigma}K_{\sigma} \quad \ldots \quad 10$$

$$e^{s} = \bar{e}^{s} + e^{1} = \left(G^{sj} - \frac{\Sigma G^{kj}}{s}\right)U_{j}^{\sigma}K_{\sigma} \quad \ldots \quad 11$$

ili uopšteno:

$$e^{i} = \left(G^{ij} - \frac{\Sigma G^{kj}}{s}\right)U_{j}^{\sigma}K_{\sigma} \quad \ldots \quad 12$$

Prema ovome, da bi se za jednu stanicu dobila korelaciona matrica pravaca takve prirode, kojom popravke početnih pravaca nakon izravnavanja ne bi bile jednake nuli, potrebno je modificirati polaznu matricu G^{ij} tako što bi članovi nove matrice bili jednaki razlici odgovarajućih članova polazne matrice i sume odgovarajuće vrste koja je podjeljena sa s, ili kratko, potrebno je obaviti horizontalnu redukciju početne matrice. Nakon ove horizontalne redukcije biće suma članova bilo koje vrste matrica jednaka nuli. Međutim, takva, novodobivena redukovana matrica neće biti simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu, ali bez obzira na to, sa ovako modifikovanom matricom kofaktora pravaca jedne stanice, dobiće se direktno popravke pravaca, tj. egzistiraće i popravke početnih pravaca svake stanice. Kako pak ovakva nesimetrična matrica nije mnogo logična kao matrica kofaktora, to je neophodna njena dalja modifikacija.

Ako su elementi prvobitne matrice obeleženi sa G^{ij}, a elementi novodobivene horizontalno redukovane matrice sa $\overline{G}^{i}_{y}$, tada je:

$$\overline{G}^{iy} = G^{ij} - \frac{\Sigma_k G^{kj}}{s} \qquad 13$$

Da bi se na osnovu horizontalno redukovane nesimetrične matrice $\overline{G}^{ij}$ dobila simetrična matrica ekvivalentna njoj a i prvobitnoj matrici, može se obaviti vertikalna redukcija horizontalno redukovane matrice. U tom cilju neophodno je naći zbir elemenata kolona matrice $\overline{G}^{ij}$:

$$\Sigma_l \overline{G}^{il} = \Sigma_l G^{il} - \frac{\Sigma_l \Sigma_k G^{kl}}{s} \quad \ldots \ 14$$

Deobom sa s dobija se:

$$\frac{\Sigma_l \overline{G}^{il}}{s} = \frac{\Sigma_l G^{il}}{s} - \frac{\Sigma_l \Sigma_k G^{kl}}{s^2} \quad \ldots \ 15$$

Ako se elementi matrice nakon vertikalne redukcije obeleže sa $\overline{\overline{G}}^{ij}$, to će izraz za njih *biti*:

$$\overline{\overline{G}}^{ij} = \overline{G}^{ij} - \frac{\Sigma_{l} \overline{G}^{il}}{s} \quad \ldots \ 16$$

odnosno obzirom na 13 i 15:

$$\overline{\overline{G}}^{ij} = G^{ij} - \frac{\Sigma_k G^{kj}}{s} - \frac{\Sigma_l G^{il}}{s} + \frac{\Sigma_l \Sigma_k G^{kl}}{s^2} \quad \ldots \ 17$$

Razmatrajući zadnji izraz lako se može dokazati:

a) Novodobivena matrica $\overline{\overline{G}}^{ij}$ je simetrična.

b) Zbirovi vrsta odnosno kolona novodivene matrice $\overline{\overline{G}}^{ij}$ su jednaki nuli.

Iz jednakosti horizontalnih zbirova sa nulom proizilazi i jednakost suma popravaka sa nulom, a to znači i egzistiranje popravaka početnih pravaca koje u opštem slučaju nisu jednake nuli.

Modifikacija korelacionih matrica koje odgovaraju pojedinim načinima prelaska sa uglova na pravce

Ako se radi o direktno merenim uglovima, koji nisu pretrpeli nikakvo stanično izravnavanje, a na osnovu kojih se formiraju pravci, tada su pojedini članovi matrice kofaktora pravaca, ako stanica ima s pravaca, u opštem obliku dati izrazima:

$$G^{ij} = j - 1 \quad \text{za} \quad i \geqq j$$
$$G^{ij} = i - 1 \quad \text{za} \quad i \leqq j$$

U razvijenom obliku matrica bi bila:

Matrica 1

	1	2	3	4	5	6	7	s-1	s
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	1	2	2	2	2	2	2	2
4	0	1	2	3	3	3	3	3	3
5	0	1	2	3	4	4	4	4	4
6	0	1	2	3	4	5	5	5	5
7	0	1	2	3	4	5	6	6	6
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
s-1	0	1	2	3	4	5	6	s-1	s-1
s	0	1	2	3	4	5	6	s-1	s

Pri redukovanju ove matrice, obzirom na jednačinu 17, potrebno je naći odgovarajuće sabirke koji su dati sledećim izrazima:

$$\frac{\Sigma_i G^{ij}}{s} = (j - 1)\left(1 - \frac{j}{2s}\right) \tag{19}$$

$$\frac{\Sigma_j G^{ij}}{s} = (i - 1)\left(1 - \frac{i}{2s}\right) \tag{20}$$

$$\frac{\Sigma_i \Sigma_j G^{ij}}{s^2} = \frac{1}{12s}(4s^2 - 6s + 2) \tag{21}$$

Zamenom izraza 18, 19, 20 i 21 u jednačinu 17, dobija se sledeći izraz za pojedine članove modifikovane matrice razmatranog slučaja:

$$\bar{G}^{ij} = (i - 1)\frac{i}{2s}(j - 1)\left(1 - \frac{j}{2s}\right) + \frac{1}{12s}(4s^2 - 6s + 2) \quad \text{za } i \leq j$$

22

$$\bar{G}^{ij}\,(j - 1)\frac{j}{2s} - (i - 1)\left(1 - \frac{i}{2s}\right) + \frac{1}{12s}(4s^2 - 6s + 2) \quad \text{za } i \geq j$$

Kod metode zatvaranja horizonta, kod koje se prvo merenjem dobiveni uglovi izravnaju za uslov horizonta pa se zatim, na osnovu tako izravnatih uglova formiraju pravci, pojedini članovi korelacione matrice pravaca, pod pretpostavkom da su svi uglovi mereni sa istom tačnošću, su dati izrazima:

$$G^{ij} = (i-1)\left(1-\frac{j-1}{s}\right) \quad \text{za } i \leq j$$

$$G^{ij} = (j-1)\left(1-\frac{i-1}{s}\right) \quad \text{za } i \geq j \qquad 23$$

Da bi se dobila horizontalno i vertikalno redukovana matrica, isto kao i u predhodnom slučaju, polazeći od gornjih izraza, treba naći odgovarajuće sabirke, koji su dati sledećim izrazima:

$$\Sigma_i G^{ij} = \frac{j-1}{2}(s-j+1) \qquad 24$$

$$\Sigma_j G^{ij} = \frac{i-1}{2}(s-i+1) \qquad 25$$

$$\Sigma_j \Sigma_i G^{ij} = \frac{1}{12} s(s^2-15) \qquad 26$$

Zamenom izraza 23, 24, 25 i 26 u jednačinu 17 dobijamo:

$$\overline{G}^{ij} = (i-1)\frac{s+1-2j+i}{2s} + (j-1)\frac{j-(s+1)}{2s} + \frac{s^2-1}{12s} \quad \text{za } i \leq J \qquad 27$$

$$\overline{G}^{ij} = (j-1)\frac{s+1-2i+j}{2s} + (i-1)\frac{i-(s+1)}{2s} + \frac{s^2-1}{12s} \quad \text{za } i \geq J \qquad 28$$

Zadnjim dvema jednačinama su dati redukovani kofaktori za stanicu sa proizvoljnim brojem pravaca. Interesantno je uočiti da će članovi glavne dijagonale matrice kofaktora, za stanicu sa s pravaca, biti međusobno jednaka, odnosno jednaki izrazu:

$$\overline{G}^{ii} = \frac{s^2-1}{12s}$$

REZIME

Ako su pravci dobiveni na osnovu uglova, tada su oni u korelaciji koja je izražena korelacionom matricom pravca. Obzirom na način kako se na osnovu uglova dobijaju pravci, svi članovi korelacione matrice pravaca sa indeksom jedan su jednaki nuli, a posledica ove činjenice je da su, nakon izravnavanja po pravcima, popravke početnih pravaca svake stanice jednaki nuli. Zbog ovoga se stiče utisak da se izravnavanje po pravcima uz vođenje računa o korelaciji nije izravnavanje po pravcima već po uglovima između početnog i ostalih pravaca svake stanice. U radu je izložena mogućnost modifikacione matrice, čime se dobija nakon horizontalne i vertikalne redukcije početne matrice, nova matrica koja je ekvivalentna početnoj, ali kod koje članovi sa indeksom jedan nisu jednaki nuli. Sa novom korelacionom matricom, generalno uzevši, popravke početnih pravaca nisu jednaki nuli.

Dati su, u opštem obliku, izrazi za članove redukovane matrice za slučaj prostog prelaza sa uglova na pravce i za slučaj ako su pravci dobiveni na osnovu uglova merenih metodom zatvaranja horizonta.

LITERATURA

1 — Stevanović J.: »Problem korelacije pri izravnavanju trigonometrijskih mreža po pravcima ako su mereni uglovi« — Zbornik radova Rudarsko-geološko-metalurškog fakulteta i Instituta za bakar—br. XII, posebno izdanje — Bor, 1971.

2 — Tienstra J. M.: »An extesion the tecnique of the methods of least squares to correlated observation« — Buletin geodesique N° 6,1947.

3 — Hristov V.: »Rasširenije uravnivanija po spasobu najmenših kvadratov« — Sofija, 1966.