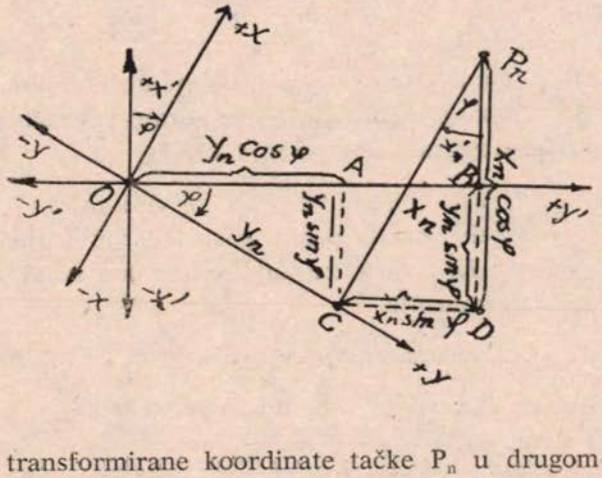
TRANSFORMACIJA KOORDINATA OSLANJAJUĆI SE NA KOORDINATE DVE TAČKE

Marko KAČANSKI — Novi Sad

Kada su koordinate poligonskih i detaljnih tačaka sračunate pomoću koordinata dve, P_a i P_b, tačke u jednom koordinatnom sistemu, transformisanje koordinata tačaka u drugi koordinatni sistem izvršićemo oslanjajući se na koordinate one dve tačke, čije su koordinate poznate u oba koordinatna sistema.

Iz priložene slike se vidi da je opšti obrazac za transformaciju koordinata y_n x_n tačke P_n iz jednog (yx) koordinatnog sistema u drugi (y'x') koordinatni sisstem:



gde su $y'_n x'_n$ transformirane koordinate tačke P_n u drugom koordinatnom sistemu.

φ je ugao koji zatvara +x' osa drugog koordinatnog sistema sa +x osom prvog koordinatnog sistema.

Ako u jednačine pod 1. stavimo:

$$\sin\varphi = a, \quad \cos\varphi = o$$

jednačina pod 1. glasiće:

$$y'_n = y_n o + x_n a$$
$$x'_n = x_n o - y_n a$$

Adresa autora: Marko Kačanski dipl. inž. — Novi Sad

U gornjim jednačinama a i o smatramo za koeficijente. Jednačine pod 2. napisane u obliku determinanta glase:

$$y'_n = \begin{vmatrix} y_n & x_n \\ -a & o \end{vmatrix} = oy_n + ax_n \qquad 3.$$

$$x'_n = \begin{vmatrix} o & a \\ y_n & x_n \end{vmatrix} = ox_n - ay_n \qquad 4.$$

Vrijednosti gornjih determinanta daju transformisane koordinate tačke P. Kako se y_n i x_n nalaze u obe gornje determinante, iz praktičnih razloga, možemo determinante prikazati u tabeli:

$$\begin{vmatrix} o & a \\ y_n & x_n \\ -a & o \end{vmatrix}$$

U gornjoj tabeli donje dve vrste predstavljaju determinantu, čija vrednost daje transformisanu ordinatu y'_n, a dve gornje vrste daju determinantu čija je vrednost transformisana apscisa x'_n tačke P_n.

Kad imamo da transformišemo koordinate više tačaka njihove koordinate ćemo uneti u tabelu između prve i poslednje vrste, tj. između vrsta u kojima su koeficijenti. Za transformisanje koordinata svake tačke imaćemo da rešimo po dve determinante.

Koeficijente a i o izračunaćemo iz koordinata P_a i P_b datih tačaka.

Koordinate takača P_a i P_b u I. koordinatnom sistemu: Y_aX_a i Y_bX_b; u II. koordinatnom sistemu su: $Y'_aX'_a$ i $Y'_bX'_b$.

Redukovane koordinate y_bx_b tačke P_b u I. koordinatnom sistemu su:

$y_b = Y_b - Y_a$, $\qquad x_b = X_b - X_a$.

Redukovane koordinate iste tačke u II. koordinatnom sistemu su:

$y'_b = Y'_b - Y'_a$, $\qquad x'_b = X'_b - X'_a$.

Kada u jednačine pod 2. stavimo redukovane koordinate dobijamo jednačine, koje napisane u implicitnom obliku, glase:

$$x_ba + y_bo - y'_b = 0, \qquad -y_ba + x_bo - x'_b = 0. \qquad 5.$$

Gornje jednačine daju koeficijente a i o kao kvocijente dve determinante:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} y_b & -y'_b \\ x_b & -x'_b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_b & y_b \\ -y_b & x_b \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} y'_b & x'_b \\ y_b & x_b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_b & y_b \\ -y_b & x_b \end{vmatrix}} = \frac{y'_b x_b - y_b x'_b}{y_b^2 + x_b^2} = \frac{A}{S^2} \qquad 6.$$

$$o = \frac{\begin{vmatrix} -y'_b & x_b \\ -x'_b & -y_b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_b & y_b \\ -y_b & x_b \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} y_b & x_b \\ -x'_b & y'_b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_b & y_b \\ -y_b & x_b \end{vmatrix}} = \frac{y_b y'_b + x_b x'_b}{y_b^2 + x_b^2} = \frac{O}{S^2} \qquad 7.$$

U determinantama brojilaca smo iz praktičnih razloga zamenili kolone sa vrstama, pošto se time vrednost determinanta ne menja.

Kada u obrasce pod 3 i 4 stavimo redukovane koordinate $y_b x_b$ tačke P_b iz I. koordinatnog sistema, vrednosti determinanta treba da su $y'_b x'_b$ redukovane koordinate tačke P_b II. koordinatnog sistema. Ovo je kontrola da su koeficijenti a i o dobro određeni.

Kada imamo da transformišemo koordinate više tačaka, da bismo računali sa malim brojevima, obrazovaćemo koordinatne razlike između uzastopnih tačaka u I. koordinatnom sistemu po obrascima:

$$\Delta y_{n-1} = Y_n - Y_{n-1}, \qquad \Delta x_{n-1} = X_n - X_{n-1} \qquad 8.$$

Zbir koordinatnih razlika mora biti ravan redukovanim koordinatama tačke P_b u I. koordinatnom sistemu, tj:

$$[\Delta y] = y_b, \qquad [\Delta x] = x_b.$$

Obrazac pod 2 važi i za koordinatne razlike:

$$\Delta y'_{n-1} = \Delta y_{n-1} o + \Delta x_{n-1} a$$

$$\Delta x'_{n-1} = \Delta x_{n-1} o - \Delta y_{n-1} a \qquad 9.$$

gde su $\Delta y'_{n-1}$ i $\Delta x'_{n-1}$ transformisane koordinatne razlike u II. koordinatnom

Jednačine pod 9 u obliku determinanta su:

$$\Delta y'_{n-1} = \begin{vmatrix} \Delta y_{n-1} & \Delta x_{n-1} \\ -a & o \end{vmatrix}, \quad \Delta x'_{n-1} = \begin{vmatrix} o & a \\ \Delta y_{n-1} & \Delta x_{n-1} \end{vmatrix} \qquad 10.$$

Vrednosti gornjih determinanta daju transformisane koordinatne razlike tačke.

Transformisane koordinate tačke daje zbir iz transformisanih koordinata prethodne tačke i sledeće transformisane koordinatne razlike po obrascu:

$$Y'_n = Y'_{n-1} + \Delta y'_{n-1},$$

$$X'_n = X'_{n-1} + \Delta x'_{n-1}. \qquad 11.$$

Na kraju zbrajanja koordinata prethodnih tačaka sa transformisanim koordinatnim razlikama dolazimo do poznatih koordinata date tačke P_b, što služi za kontrolu.

Zadatak.

Treba da transformišemo koordinate poligonskih tačaka 0151—0154 iz I. u II. koordinatni sistem, oslanjajući se na koordinate tačaka $\underset{\circ}{\triangle}52(P_a)$ i $\underset{\circ}{\triangle}66(P_b)$, čije su koordinate poznate u oba koordinatna sistema.

U kolonama 3. i 4. I. koordinatnog sistema unete su koordinate svih navedenih tačaka (v. Formular 24C).

Koordinatne razlike između uzastopnih tačaka unete su između odnosnih koordinata.

U kolonama 5. i 6. unete su koorginate tačaka $\underset{\bullet}{\triangle}52(P_a)$ i $\underset{\bullet}{\triangle}66(P_b)$ II. koordinatnog sistema.

Redukovane koordinate $y_b x_b$ tačke $\underset{\bullet}{\triangle}66(P_b)$ u I. koordinatnom sistemu su:

$$y_b = 431\,167{,}90 - 429\,355{,}60 = 1\,812{,}30 \text{ m},$$

$$x_b = 38\,491{,}04 - 38\,780{,}40 = -289{,}36 \text{ m}.$$

Zbir koordinatnih razlika ravan je redukovanim koordinatama tačke $\underset{\circ}{\triangle}66(P_b)$.

TRANSFORMACIJA KOORDINATA

Formule:

$\Delta y_{n-1} = Y_n - Y_{n-1}$, $y'_b = Y'_b - Y'_a$,
$\Delta x_{n-1} = X_n - X_{n-1}$, $x'_b = X'_b - X'_a$,
$y_b = Y_b - Y_a$, $S^2 = y_b^2 + x_a^2$,
$x_b = X_b - X_a$, $a = A : S^2$,
$[\Delta y] = y_b$, $[\Delta x] = x_b$, $o = O : S^2$,

$$O = \begin{vmatrix} y_b & x_b \\ -x'_b & y'_b \end{vmatrix}, \quad Y'_n = Y'_{n-1} + \begin{vmatrix} \Delta y_{n-1} & \Delta x_{n-1} \\ -a & o \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} y'_b & x'_b \\ y_b & x_b \end{vmatrix}, \quad X'_n = X'_{n-1} + \begin{vmatrix} o & a \\ \Delta y_{n-1} & \Delta x_{n-1} \end{vmatrix}$$

I. KOORDINATNI SISTEM								II. KOORDINATNI SISTEM								
Broj tačke	Koordinate uzete iz	±	y_{n-1} Y_n	Dev. ostat.	±	x_{n-1} X_n	Dev. ostat.	±	Y'_n	Dev. ostat.	±	X_n	Dev. ostat.	Koordinate uzete iz	±	O A S^2
1	2		3			4			5			6		7		
			o=			a=										
		—	0,527 381		+	0,012 814			—			—			—	1 776 303,0
△52(P$_a$ ∘		+	429 355,60	7	+	38 780,40	3	—	43 008,42	3	+	116 781,48	0		+	43 159,8
		+	309,54	3	—	1,31	5									
∘ 151		+	429 665,14	1	+	38 779,09	7	—	43 171,68	3	+	116 778,21	6		+	3 368 160,5
		+	361,90	1	+	117,91	1									
∘ 152		+	430 027,04	2	+	38 897,00	8	—	43 361,03	2	+	116 711,38	1			
		+	456,88	4	—	164,45	2									
∘ 153		+	430 483,92	6	+	38 732,55	6	—	43 604,09	8	+	116 792,26	7			
		+	413,53	7	—	183,27	3									
∘ 154		+	430 897,45	4	+	38 549,28	3	—	43 824,52	1	+	116 883,61	7			
		+	270,45	0	—	58,24	1									
△66(P$_b$ ∘		+	431 167,90	4	+	38 491,04	2	—	43 967,90	2	+	116 910,86	5			
			y_b=			x_b=			y'_b=			x_b'=				
		+	1 812,30	6	—	289,36	1	—	959,48	8	+	129,38	5			
			x_b'=			y'_b=			y_b=			x_b=				
		—	129,38	5	—	959,48	8	+	1 812,30	6	—	289,36	1			
			—a=			o=										
		—	0,012 814		—	0,527 381										
		—														

Redukovane koordinate $y'_b x'_b$ tačke △66 (P_b) u II. koord. sistemu su:

$y'_b = Y'_b - Y'_a = -43\,967{,}90 + 43\,008{,}42 = -959{,}48$ hvati,
$x'_b = X'_b - X'_a = 116\,910{,}86 - 116\,781{,}48 = 129{,}38$ hvati.

(Napomena: Koordinate u II. koordinatnom sistemu se odnose na stari budimpeštanski koordinatni sistem, gde je dužinska jedinica hvat).

Redukovane koordinate su unete u red ispod koordinata tačke △66(P_b).

Kada ispod redukovanih koordinata $y'_b x'_b$ iz I. koordinatnog sistema potpišemo redukovane koordinate $y'_b x'_b$ iz II. koordinatnog sistema i to tako, što prvo unesemo x'_b sa promenjenim znakom, a potom y'_b. Time smo dobili determinantu čija je vrednost faktor O iz obrasca pod 7.:

$$O = \begin{vmatrix} 1\,812{,}30 & -289{,}36 \\ 129{,}38 & -959{,}48 \end{vmatrix} = -1\,776\,303{,}0\,,$$

što je uneto u 1. red kolone 8. Formulara 24C.

Kada redukovane koordinate $y_b x_b$ I. koordinatnog sistema potpišemo ispod redukovanih koordinata $y'_b x'_b$ tačke △66(P_b) II. koordinatnog sistema dobijamo determinantu, čija je vrednost faktor A iz obr. 6:

$$A = \begin{vmatrix} -959{,}48 & 129{,}38 \\ 1\,812{,}30 & -289{,}36 \end{vmatrix} = 43\,159{,}8\,,$$

što je uneto u 2. kol. 8.

Kvadrat redukovanih koordinata I. koordinatnog sistema daje kvadrat faktora S:

$S^2 = y_b^2 + x_b^2 = 1\,812{,}30_2 + 289{,}36_2 = 3\,368\,160{,}5$,

što je uneto u 3. red kol. 8.

Koeficijente o i a dobijamo po obr. 7 i 6:

$$o = \frac{-1\,776\,303{,}0}{3\,368\,160{,}5} = -0{,}527\,381 \qquad a = \frac{43\,159{,}8}{3\,368\,160{,}5} = 0{,}012\,814$$

Koeficijente o i a upisujemo **iznad** koordinata tačaka I. koordinatnog sistema. **Ispod** redukovanih koordinata prvo upisujemo koeficijent a sa promenjenim znakom, a potom koeficijent o. Na taj način su naznačene sve determinante, čiji su elementi koeficijenti i koordinatne razlike. Rešavanjem ovih determinanta dobijamo transformisane koordinatne razlike.

Da smo koeficijente dobro izračunali u determinante obrazaca pod 3 i 4 unećemo redukovane koordinate tačke △66(P_b) I. koordinatnog sistema. Vrednosti ovih determinanta treba da su ravne redukovanim koordinatama iste tačke u II. koordinatnom sistemu. U našem zadatku biće:

$$y'_n = \begin{vmatrix} -0{,}012\,814 & -0{,}527\,381 \\ 1\,812{,}30 & -289{,}36 \end{vmatrix} = -959{,}480\,,$$

$$x'_b = \begin{vmatrix} -0{,}527\,381 & 0{,}012\,814 \\ 1\,812{,}30 & -289{,}36 \end{vmatrix} = 129{,}380\,,$$

što je dokaz da su koeficijenti dobro izračunati.

Zbrajanjem transformisanih koordinata prethodne tačke sa transformisanom koordinatnom razlikom po obr. 11 dobijamo transformisane koordinate svih tačaka.

Broj decimalnih mesta koordinata početne tačke treba da je uvećan sa onoliko decimala, koliko decimalnih mesta ima koeficijent.

U našem zadatku, ako prvo tražimo tranfsormisane ordinate, u rezultat mašine ćemo ubaciti ordinatu tačke $52(P_a)$ i to sa 8 decimalnih mesta. Ovoj ordinati dodaćemo transformisanu koordinatnu razliku izračunatu po obr. 10. Prema tome transformisana orbinata Y'_{151} tačke 0151 biće:

$$Y'_{151} = -43\,008{,}420\,000\,00 + \begin{vmatrix} 309{,}54 & -1{,}31 \\ -0{,}012\,814 & -0{,}527\,381 \end{vmatrix} = -43\,171{,}682\,301\,08\,,$$

pa je transformisana ordinata tačke 0151:

$Y'_{151} = -43\,171{,}68$ hvati.

Ne poništavajući u mašini ordinatu tačke 0151, ovoj ordinati ćemo dodati vrednost determinante, čiji su elementi koordinatne razlike sledeće tačke, pa će transformisana ordinata tačke 0152 biti:

$$Y'_{152} = -43\,171{,}682\,301\,08 + \begin{vmatrix} 361{,}90 & 117{,}91 \\ -0{,}012\,814 & -0{,}527\,381 \end{vmatrix} =$$

$= -43\,171{,}682\,301\,08 - 0{,}527\,381 \times 361{,}90 + 0{,}012\,814 \times 117{,}91 =$

$= -43\,361{,}030\,568\,24$, odnosno sa dva decimalna mesta:

$Y'_{152} = -43\,361{,}03$ hvata.

Istim postupkom transformisaćemo ordinate i ostalih tačaka. Na završetku transformisana ordinata Y'_b tačke $\underset{\circ}{\triangle}66(P_b)$ treba da se slaže sa zazatom ordinatom, što služi za kontrolu.

Kod transformisanja apscisa prvo ćemo u rezultat mašine ubaciti apscisu početne tačke $\underset{\circ}{\triangle}52(P_a)$ i njoj ćemo dodati vrednost determinante po obr. 10.

Transformisana apscisa X'_{151} tačke 0151 je:

$$X'_{151} = 116\,781{,}480\,000\,00 + \begin{vmatrix} -0{,}527\,381 & 0{,}012\,814 \\ 309{,}54 & -1{,}31 \end{vmatrix} =$$

$= 116\,781{,}480\,000\,00 + 0{,}527\,381 \times 1{,}31 - 0{,}012\,814 \times 309{,}54 =$

$= 116\,778{,}205\,823\,55$, odnosno sa dva decimalna mesta:

$X'_{151} = 116\,778{,}21$ hvat.

Dalji postupak transformisanja apscisa je kao kod transformisanja apscise tačke 0151.

Kod ovog načina transformisanja koordinata nema odstupanja, odnosno popravki.