

UTJECAJ PROMJENE KUTA NAGIBA NA VELIČINU ODSJEČKA NA LETVI PRI MJERENJU DUŽINA DALJINOMJEROM S TRI NITI

Zvonimir KALAFADŽIĆ — Zagreb

I

Prema Pravilniku za državni premjer II dio čl. 48-1 mjerenje poligonih stranica s daljinomjerom s tri niti i vertikalnom letvom vrši se u oba položaja durbina, a čitaju se sve tri niti i vertikalni kut. Za svaku dužinu dobivaju se dakle dva, a ako se uzme u obzir i mjerenje u protupravcu, četiri mjerenja. Mjerenje pojedinog odsječka kontrolira se čitanjem srednje niti. Odsječci mjereni u dva položaja durbina uz isti vertikalni kut morali bi biti jednaki, odnosno smjeli bi se razlikovati za iznose, koji se daju rastumačiti tačnošću očitavanja na letvi. Ako se vertikalni kut mijenja, mijenjat će se i odsječci.

Kako i koliko se mijenja odsječak na letvi za konstantnu udaljenost letve promjenom vertikalnog kuta nastojat će se ovdje razmotriti. Poznavanje te ovisnosti moglo bi imati i praktičnu vrijednost. U geodeziji svaku operaciju nastojimo kontrolirati. Promjena odsječka na letvi uslijed mijenjanja vertikalnog kuta mogla bi se eventualno iskoristiti za kontrolu mjerenja poligonih stranica daljinomjerom s tri niti. Na temelju razlika odsječaka na letvi u prvom i drugom položaju durbina moglo bi se odmah na terenu zaključiti na ispravnost mjerenja ne čekajući obradu podataka u uredu. Ako se razlike u odsječcima ne bi mogle rastumačiti tačnošću mjerenja, odnosno promjenom vertikalnog kuta, opažanja bi se kao grubo pogrešna odmah ponovila.

Prilikom tahimetriranja na vježbama iz geodezije na Sumarskom fakultetu u Zagrebu studenti su veće razlike u odsječcima pripisivali promjeni vertikalnog kuta, a ne nedovoljnoj tačnosti svojih opažanja. Ako se zna kolike se promjene u odsječku na letvi uz određenu promjenu vertikalnog kuta mogu očekivati, ne može se dogoditi da se eventualna pogreška u opažanju pripiše djelovanju promjene kuta nagiba.

II

Iz osnovne formule daljinomjera sa tri niti može se izračunati odsječak na letvi, a odavde utjecaj $\Delta\alpha$ na Δl , ako se te veličine shvate kao diferencijalne:

$$l = \frac{D}{K \cos^2 \alpha} - \frac{k}{K \cos \alpha} \quad (1)$$

$$\Delta l = \frac{2 D \sin \alpha}{K \cos^3 \alpha} \Delta \alpha - \frac{k \operatorname{tg} \alpha}{K \cos \alpha} \Delta \alpha \quad (2)$$

Uz $D = 100 \text{ m}$, $K = 100$, $k = 0,5 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$, $\Delta \alpha = 30' = 0,01$ iznosi $\Delta l = (15,40 - 0,03) \text{ mm}$. Drugi član u izrazu (2) daje utjecaj adicione konstante k . Vidi se da je taj utjecaj malen, da se djelovanje k može slobodno zanemariti.

Veličinu Δl možemo izračunati i na drugi način. Dužina iz dva mjerenja dobiva se po formuli:

$$D = Kl \cos^2 \alpha + k \cos \alpha = K(l + \Delta l) \cos^2(\alpha + \Delta \alpha) + k \cos(\alpha + \Delta \alpha) \quad (3)$$

Ako se uzme da je $k = 0$, što vrijedi za moderne analaktičke instrumente, iz formule (3) računamo:

$$\Delta l = l \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2(\alpha + \Delta \alpha)} - 1 \right) \quad (4)$$

Pitanje je kolike se promjene vertikalnog kuta pri praktičnom mjerenju mogu očekivati. Ako pretpostavimo da su poligone stranice duge oko 100 m , (to je maksimalna dužina vizure po Pravilniku II čl. 48-5), da je $K = 100$, tada za horizontalnu vizuru l iznosi oko $1,000 \text{ m}$. Ako nagnemo đurbin da se položaj niti na letvi promijeni za 1 m promjena kuta nagiba vizure bit će: $\operatorname{tg} \Delta \alpha = 0,01$, a za mali kut $\Delta \alpha = 0,01_0 = 0,01 \cdot 3438' = 34,38' = 30'$. Veće promjene će rijetko kada biti, tako da se je pretpostavilo da će se $\Delta \alpha$ kretati u intervalu od 0 do $\pm 30'$. (Veličina $\Delta \alpha = 0,01$ uzeta je i pri računanju s formulom (2).

Po formuli (4) izračunate su veličine Δl za promjene nagiba $\Delta \alpha = \pm 15'$ i $\Delta \alpha = \pm 30'$, za nagibe vizure od 0° do najviše $\pm 30^\circ$, uz konstantno $l = 1,000 \text{ m}$ i $K = 100$. Uzeta je apsolutna vrijednost kuta α , a predznak $\Delta \alpha$ znači povećanje ili smanjenje te apsolutne vrijednosti. Podaci su dani u tabeli 1A i u grafikonu 1.

Tabela 1

α°	1A				1B
	$\Delta \alpha$				$\Delta l = \pm 0,002 \text{ m}$
	+	-	+	-	
	0°15'		0°30'		
$\Delta l \text{ mm}$					$\pm \Delta \alpha'$
0	0,0	0,0	+ 0,1	+0,1	54
5	+0,8	-0,7	+ 1,6	-1,4	38
10	+1,6	-1,5	+ 3,1	-3,1	21
15	+2,4	-2,4	+ 4,7	-4,6	13
20	+3,2	-3,2	+ 6,4	-6,4	10
25	+4,2	-4,1	+ 8,2	-8,2	7
30	+5,1	-5,0	+10,2	-9,9	6

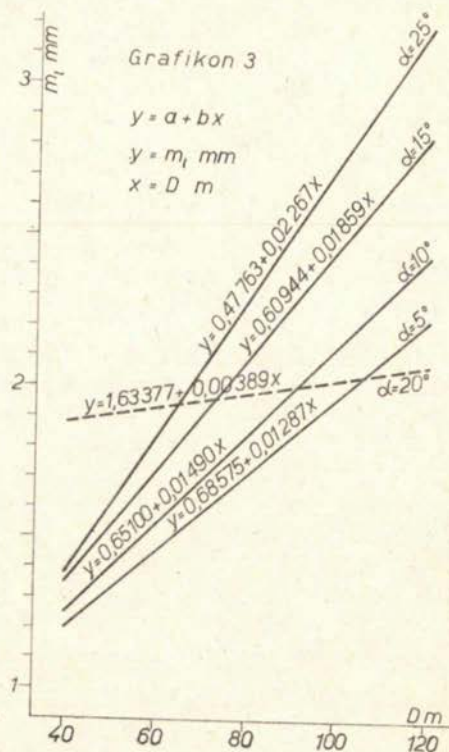
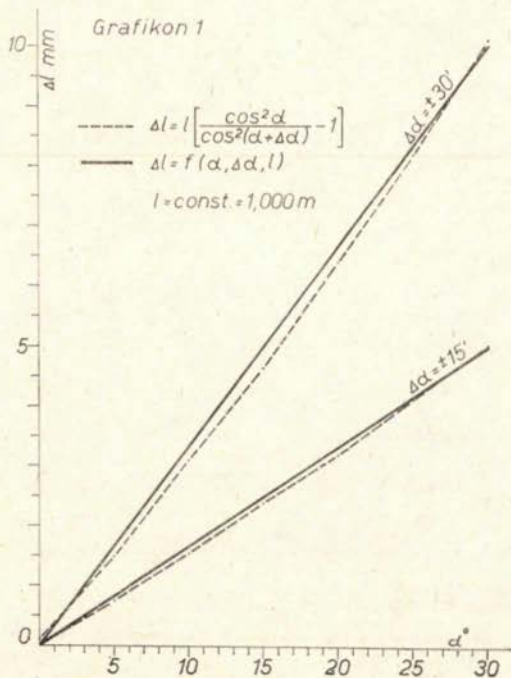
Povećanjem α povećava se l i obrnuto. Uz isti $\Delta\alpha$ veličina Δl raste povećanjem kuta nagiba. Promjena l uslijed promjene α gotovo je linearna, te se može aproksimirati pravcem (grafikon 1). Na temelju grafikona 1 sastavljena je tabela 2, koja daje razlike između dva mjerenja za pojedine kuteve nagiba α i $\Delta\alpha = \pm 15'$, te $\Delta\alpha = \pm 30'$.

Tabela 2

$\pm \Delta\alpha'$	Vertikalni kut α										
	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
	$\pm \Delta l$ mm										
30'	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
15'	0		1		2		3		4		5

Iz formule (4) može se izračunati $\Delta\alpha$ za pojedine α uz pretpostavku da promjena odsječka na letvi iznosi najviše $\pm 0,002$ m. Podaci su navedeni u tabeli 1 B, iz kojih se vidi koliki $\Delta\alpha$ za pojedine α smije biti, a da Δl ne bude veći od 2 mm.

Izvjerna razlika u vrijednostima za Δl , koje se dobivaju po formulama (2) i (4) nastaju radi toga što je u prvom slučaju uzeto $D = 100$ m = const i $\Delta\alpha = 0,01 = \text{const}$, a u drugom $l = 1,000$ m = const i $\alpha\Delta = 30' = \text{const}$.



III

Tačnost mjerenja dužina daljinomjerom s tri niti prema Jordanu [1] iznosi za $K = 100$, centimetarsku letvu i D cca 100 m:

$$\frac{m(D)}{D} = \pm 0,2\% = (1 : 500) \quad (6)$$

Tolika tačnost se dobiva ako je za $D = 100$ m srednja pogreška $m_1 = \pm 0,002$ m.

Jordan [1] i Svečnikov [3] navode činioce koji utječu na tačnost mjerenja daljinomjerima s tri niti i istražuju njihovo djelovanje. Neki od tih činilaca (doba dana, čistoća i mirnoća zraka, promjene temperature) uvjetovani su astronomskim i meteorološkim vremenom. Obično se mjerenje dužina u oba položaja durbina obavlja neposredno jedno iza drugoga, tako da se ti vremenski utjecaji kod razmatranja obrađivanog problema mogu zanemariti.

Kako se radi o istom instrumentu i letvi, to bi trebali očekivati male razlike u veličini odsječka uz isti vertikalni kut za dvostruka mjerenja. Ako su razlike veće, a vertikalni kut se nije promijenio, mogli bi zaključiti na grubu pogrešku i opažanja ponoviti.

To potvrđuju i rezultati mjerenja dužine od oko 134 m, daljinomjerom sa $K = 100$, na raznim mjestima letve (od $1,1 - 2,3$ m), u kratkom vremenskom intervalu, na razne dane, a koja je proveo Jordan [1]. Razlike u pojedinim mjerenjima su bile minimalne, jedino su bile nešto veće prilikom mjerenja u donjim slojevima atmosfere, gdje su utjecaji refrakcije znatni.

Do srednje pogreške razlike dvaju odsječaka na letvi uz konstantan kut nagiba moglo bi se doći ovim razmatranjem: Ako je srednja pogreška procjene položaja jedne niti $a = \mp 1$ mm (Macarol [2] str. 317), tada je pogreška jednog odsječka $\mp a\sqrt{2} = \mp 1,4$ mm. Srednja pogreška razlike dvaju odsječaka bila bi

$$M = \pm \sqrt{2a^2 + 2a^2} = \mp 2a = \mp 2 \text{ mm.}$$

Uz $3M$ kao maksimalno dozvoljena razlika dobivamo $\Delta_{max} = \pm 0,006$ m.

Ako su pri mjerenju moguće tolike razlike radi slučajnih pogrešaka, djelovanje promjene kuta nagiba kod dvostrukih mjerenja daljinomjerom s tri niti došlo bi do izražaja tek za velike kuteve nagiba, razmjerno velike $\Delta\alpha$, te duge poligone stranice. To će biti tek za one vrijednosti α , $\Delta\alpha$ i l , kod kojih je Δl veće od 6 mm, a to prema tabeli 2 znači da za $l = 1,000$ m i $\Delta\alpha = \pm 15'$, tek za ekstremne kuteve nagiba, i za $\Delta\alpha = \pm 30'$ za α veći od oko 15° .

IV

Navedena teoretska razmatranja nastojalo se osvijetliti na konkretnom opažačkom materijalu. Uzeta su mjerenja, koja je obavilo osoblje Katedre za geodeziju Šumarskog fakulteta u Zagrebu prilikom radova na reambulaciji šumskih međa fakultetske Šumarije Zalesina u Gorskom Kotaru tokom 1958. — 1963. god. Dužine poligonih stranica mjerene su daljinomjerom s tri niti, prema odredbama Pravilnika II, instrumentom Zeiss Th 4 br. 66606.

Za svako dvostruko mjerenje poligonih stranica izračunate su razlike odsječaka $[\Delta l] = [l_1 - l_2]$ i tabelirane prema veličini kuta nagiba α (razredi po 5° , od $0^\circ - 30^\circ$), prema veličini promjene kuta nagiba $\Delta\alpha$ (razredi po $5'$,

od $0-60'$), te prema dužini poligonih stranica D (razredi po 20 m , od $30-130\text{ m}$). Povećanjem α , $\Delta\alpha$ i D očekivale su se veće vrijednosti Δl .

Ukupno je bilo 1159 dvostrukih mjerenja poligonih stranica daljinomjerom s tri niti. Međutim frekvencija opažanja bila je nepovoljna za razmatranje problema. Velika većina podataka, cca 70%, bila je sa $\Delta\alpha = \pm 5'$, a do $\Delta\alpha = \pm 15'$ bilo je čak cca 95% opažanja (tabela 3). Oko 65% svih mjerenja izvršeno je uz kut nagiba vizure α do $\pm 10^\circ$ (grafikon 2). Promjena odsjeka na letvi Δl za te vrijednosti α i $\Delta\alpha$ je minimalna, tako da se iz raspoloživog

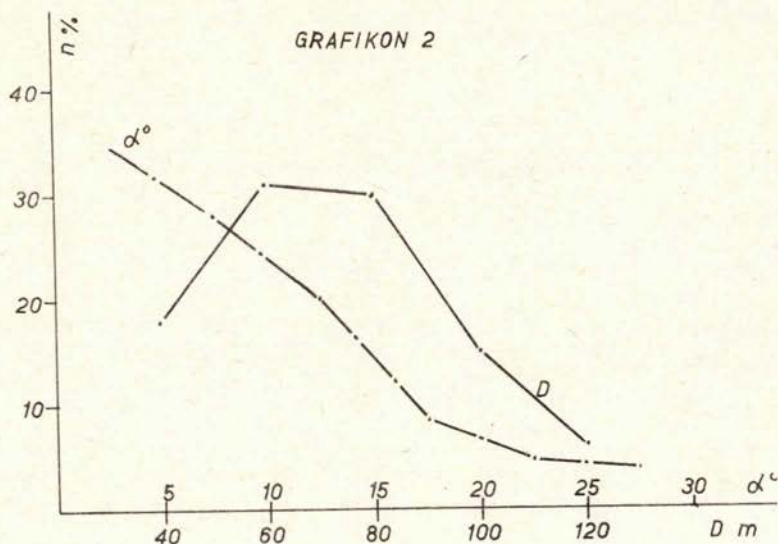


Tabela 3

$\Delta\alpha'$	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	Σ
n	820	214	52	26	18	8	11	4	—	3	—	3		1159
%	70,7	18,5	4,5	2,2	1,6	0,7	0,9	0,3	—	0,3	—	0,3		100

materijala nije moglo konstatirati povećanje Δl povećanjem promjene kuta nagiba $\Delta\alpha$, kako se to teoretski očekivalo. Uz djelovanje $\Delta\alpha$, na veličinu Δl utječu i svi ostali činioci o kojima ovisi tačnost mjerenja daljinomjerom s tri niti. Za daljnja istraživanja bilo bi potrebno mnogo više, po svim veličinama α , $\Delta\alpha$ i D pravilno raspoređenih opažanja.

No ipak iz obrađenih podataka mogu se izvesti neki korisni zaključci. Prilikom mjerenja bit će uglavnom vjerojatnije manje razlike u kutu nagiba u prvom i drugom položaju durbina. Kako je već navedeno do $\Delta\alpha = \pm 15'$ bilo je čak cca 95% opažanja. U grafikonu 2 prikazane su frekvencije opažanja po dužinama poligonih stranica i veličini kuta nagiba. Slične frekvencije mogu se očekivati prilikom tahimetriranja u teškim šumovitim terenima kakav je Gorski Kotar, ako se ne vrši prekomjerno prosijecanje. Najviše je

bilo poligonih stranica dugih od 60 — 80 m (60% opažanja). Kutevi nagiba vizure bili su uglavnom blagi, do $\pm 10^\circ$ (60% opažanja).

Djelovanje promjene kuta nagiba do $\pm 5'$, na veličinu Δl je minimalno (uz $l = 1,000 \text{ m}$ i $\alpha = 30^\circ$ iznosi $\Delta l \pm 1,5 \text{ mm}$). Konstatirane razlike dvaju izmjerenih odsječaka mogle bi se smatrati slučajnim pogreškama dvostrukih mjerenja. U tim razlikama ima sigurno i sistematskih utjecaja, ali ih je teško razlučiti. Izračunate su srednje pogreške jednog opažanja (jednog odsjeka na letvi) po formuli za dvostruka mjerenja:

$$m_l = \pm \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}$$

gdje d znači jednu razliku između dvostrukih mjerenja, a n broj dvostrukih mjerenja. Iz srednjih pogrešaka može se zaključiti na tačnost određivanja odsječaka na letvi, a time i na tačnost mjerenja dužina daljinomjerima sa tri niti, uz razne dužine i kuteve nagiba. Izračunate srednje pogreške dane su u tabeli 4, zajedno sa brojem opažanja n iz kojih su dobivene.

Povećanjem dužina poligonih stranica i veličine kuta nagiba evidentan je trend povećanja srednjih pogrešaka. To je u skladu sa istraživanjima ostalih autora. Iz podataka tabele 4 izračunati su regresijski pravci $y = a + b x$, za odnos srednje pogreške jednog mjerenja ($y = m_l \text{ mm}$) i dužine ($x = D \text{ m}$), te prikazani u grafikonu 3. Prethodno pretpostavljena srednja pogreška je-

Tabela 4

α	$D \text{ m}$	40	60	80	100	120
5°	n	38	80	97	53	25
	m_l	1,15	1,69	1,48	1,93	2,57
10°	n	30	60	80	34	21
	m_l	1,00	1,54	2,03	2,14	2,08
15°	n	34	49	51	25	3
	m_l	1,41	1,57	2,28	2,32	—
20°	n	11	21	15	16	7
	m_l	1,63	2,07	1,39	2,70	1,38
25°	n	12	10	9	4	—
	m_l	1,50	1,49	2,60	2,57	—
30°	n	6	15	8	2	2
	m_l	1,96	2,46	1,58	—	—

$m_l \text{ mm}$

dnog odsječka od oko $\pm 1,4$ mm, odnosno jedne procjene položaja niti od oko ± 1 mm, za ova konkretna opažanja, je za dužine poligonih stranica od cca 40 — 60 m. Za veće dužine te su pogreške veće. Iz tih vrijednosti izgleda da su sistematski utjecaji u opažanjima jači nego što sam pretpostavljaao.

Povećanjem kuta nagiba vizure povećava se srednja pogreška jednog mjerenja. Tok regresijskih pravaca je logičan za razne kuteve nagiba, osim za $\alpha = 20^\circ$, čiji pravac regresije se siječe sa ostalim pravcima, iako je i ovdje konstatiran porast srednje pogreške povećanjem dužine.

V

Poligone stranice mjerene daljinomjerom sa tri niti, po Pravilniku za državni premjer II dio mjere se u dva položaja durbina. Ako u prvom i drugom položaju durbina nije posve isti kut nagiba vizure bit će različiti i odsječci na letvi. Veličina promjene odsječka na letvi Δ_l ovisit će o veličini promjene kuta nagiba $\Delta\alpha$, o samom kutu nagiba i udaljenosti letve. Što su veći α , $\Delta\alpha$ i D , to će biti i veći Δ_l .

U praksi treba očekivati opažanja s malom promjenom kuta nagiba, $\Delta\alpha$ do $\pm 15'$. Uz te uvjete razlike između odsječaka mjerenih u dva položaja durbina trebale bi biti minimalne. Prema teoretskim izvodima ta razlika bi smjela biti maksimalno ± 6 mm. Veće razlike ukazuju na grubu pogrešku.

Ako imamo velike kuteve nagiba, duge poligone stranice (oko 100 m), tada je utjecaj promjene kuta nagiba znatan. Pomoću tabele 2 u takvim slučajevima mogli bi konstatirati da li je razlika između dva mjerenja opravdana ili opažanja treba odmah ponoviti.

Povećanjem kuta nagiba vizure i dužine, tačnost mjerenja dužina daljinomjerima s tri niti opada. To je u skladu s istraživanjima ostalih autora. Posredno, iz srednje pogreške jednog odsječka na letvi, mogli bi izračunati tačnost procjene položaja jedne niti. Teoretski pretpostavljena tačnost od ± 1 mm postignuta je za dužine od oko 50 m, za veće dužine (cca 100 m), ovisno o kutu nagiba, ona se kreće od $\pm 1,3$ — $1,9$ mm. Te vrijednosti su nešto previsoke, izgleda da su bili podcijenjeni sistematski utjecaji.

Pri tahimetriranju u šumovitim planinskim terenima bez velikih prosijecanja, dužine poligonih stranica kreću se najviše oko 70 m. Kutevi nagiba su blagi, do 10° .

Izloženi problem osim teoretskog značenja, imat će možda interesa i za praksu, naročito za mlađe stručnjake, koji su u prilici da ocjenjuju ispravnost svojih opažanja. Na koncu se zahvaljujem prof. dr inž. N. Neidhardt, koji me je potakao na gornje razmatranje.

LITERATURA:

- 1 — Jordan — Eggert (1933): Handbuch der Vermessungskunde II/2, Stuttgart.
- 2 — Macarol S. (1967): Praktična geodezija, Tehnička knjiga Zagreb.
- 3 — Svečnikov N. (1946): O uticaju nekih činilaca na tačnost određivanja otstojanja običnih tahimetrom, Geodetski glasnik Beograd.