Nešto više o Nesbittovoj nejednakosti

Šefket Arslanagić[1]

Dokazivanje nejednakosti je bio moj znanstveni interes još od mladih dana. Naravno, u početku je to bilo više spontano jer nisam imao ni odgovarajuće literature iz tog područja. Nešto kasnije je to postalo mnogo ozbiljnije i temeljitije. Rano sam se susreo s jednom algebarskom nejednakosti koja glasi

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}, \tag{1}$$

gdje su a, b, c pozitivni realni brojevi. Uspio sam je dokazati na jedan jednostavan način množeći je s $2(a+b)(b+c)(c+a)>0$ i tako dobio njoj ekvivalentnu nejednakost

$$(a-b)^2(a+b)+(a-c)^2(a+c)+(b-c)^2(b+c)\geqslant 0,$$

koja očito vrijedi, s jednakošću ako i samo ako je $a=b=c$.

Ne mireći se samo s tim jednim dokazom nastavio sam, takoreći sve do danas, tražiti neke nove, ljepše dokaze. U međuvremenu sam saznao da je ona poznata kao **Nesbittova nejednakost**, jer ju je davne 1903. godine postavio engleski matematičar A. M. Nesbitt kao Problem 15114 u časopisu *Educational Times* (2), 3 (1903.), 37–38.

U [1] je dano deset različitih dokaza ove nejednakosti, a u [2] još njih jedanaest. Nešto kasnije u [5] je dan još jedan dokaz te u [6] još tri njezina nova dokaza. U [2] je dano i jedno poboljšanje nejednakosti (1) koje glasi

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant 3-\frac{9}{2}(ab+bc+ca),$$

jer se dokazuje koristeći činjenicu da je nejednakost (1) homogena pa možemo uzeti $a+b+c=1$. Dobivamo

$$3-\frac{9}{2}(ab+bc+ca)\geqslant\frac{3}{2}.$$

U [3] su dana još dva poboljšanja nejednakosti (1) koja glase:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{a+b}{a+b+2c}+\frac{b+c}{b+c+2a}+\frac{c+a}{c+a+2b}\geqslant\frac{3}{2},$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant 2-\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2(a+b+c)}\geqslant\frac{3}{2}.$$

U međuvremenu je u [6] dano još jedno poboljšanje nejednakosti (1) koje glasi

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{13}{6}-\frac{2(ab+bc+ca)}{3(a^2+b^2+c^2)}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Treba uočiti da je nejednakost (1) ciklička, simetrična i homogena. Za spomenutih 25 dokaza ove nejednakosti korištene su poznate nejednakosti kao što su Cauchy-Buniakowsky-Schwarzova nejednakost, Jensenova nejednakost, Čebiševljeva nejednakost,

[1] Autor je izvanredni profesor u miru na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu;
e-pošta: `asefket@pmf.insa.sa`

Muirhedova nejednakost te teorem o preuređenju, metoda supstitucije i diferencijalni račun. Recimo i to da su u [4] dana i dva poopćenja nejednakosti (1) koje glase:

$$\frac{a}{kb+c}+\frac{b}{kc+a}+\frac{c}{ka+b}\geqslant\frac{3}{1+k},\quad a,\,b,\,c>0,$$
$$\frac{a}{kb+rc}+\frac{b}{kc+ra}+\frac{c}{ka+rb}\geqslant\frac{3}{k+r},\quad a,\,b,\,c>0.$$

Sada ćemo dati još jedno poopćenje nejednakosti (1)

$$\frac{a^m}{b+c}+\frac{b^m}{c+a}+\frac{c^m}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{m-1}, \tag{2}$$

gdje su $a,\,b,\,c>0$ i $m\in\mathbb{N}$.

Dokaz. Pošto je nejednakost (2) simetrična, ne smanjujući općenitost možemo pretpostaviti da je $a\geqslant b\geqslant c>0$. Odavde slijedi $a+b\geqslant c+a\geqslant b+c$, te $\frac{1}{b+c}\geqslant\frac{1}{c+a}\geqslant\frac{1}{a+b}$. Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine za tri pozitivna broja imamo

$$\frac{(b+c)+(c+a)+(a+b)}{3}\geqslant\frac{3}{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}}$$

odnosno

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geqslant\frac{9}{2(a+b+c)}. \tag{3}$$

Iz Čebiševljeve nejednakosti, zbog nejednakosti između aritmetičke sredine i sredine višeg reda za tri pozitivna broja i (3) imamo:

$$\begin{aligned}\frac{a^m}{b+c}+\frac{b^m}{c+a}+\frac{c^m}{a+b}&\geqslant\frac{1}{3}\left(a^m+b^m+c^m\right)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\\&\geqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^m\cdot\frac{9}{2(a+b+c)}=\frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{m-1}.\end{aligned}$$

Jednakost u (2) vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$. Za $m=1$ iz (2) slijedi (1).

Napomena 1. Za $m=2$ iz (2) slijedi

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b+c}{2},$$

koja se često pojavljuje u zbirkama zadataka s nejednakostima.

Nešto kasnije sam uspio dokazati sljedeće nejednakosti:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geqslant 2,\quad a,\,b,\,c,\,d>0,$$
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+a}+\frac{e}{a+b}\geqslant\frac{5}{2},\quad a,\,b,\,c,\,d,\,e>0,$$
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+f}+\frac{e}{f+a}+\frac{f}{a+b}\geqslant 3,\quad a,\,b,\,c,\,d,\,e,\,f>0.$$

Dokazi ovih nejednakosti se mogu naći u [5].

Na početku sam pomislio da sam na pragu velikog otkrića, tj. da vrijedi poopćena nejednakost

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geqslant\frac{n}{2}, \tag{4}$$

gdje je $a_i \geqslant 0$, $a_i + a_{i+1} > 0$ $(a_{n+1} = a_1,\ i = 1, 2, \ldots, n)$.

No, u moje ruke je došla knjiga [8], čiji je autor poznati matematičar Dragoslav S. Mitrinović. U glavi 2 ove knjige je i članak 2.21., 128–134, koji je posvećen nejednakosti (4). Ona je izazvala veliki interes među matematičarima čak i nekima veoma poznatim. Tamo je dokazano da nejednakost (4) općenito ne vrijedi. Na primjer za $n = 14$, $n = 27$ i da je ostalo još neispitanih slučajeva. Pošto je pokazano da (4) ne vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$ mnogi matematičari su pokušali utvrditi za koje $\lambda \in \mathbb{R}^+$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geqslant\lambda n, \tag{5}$$

gdje je $a_i \geqslant 0$, $a_i + a_{i+1} > 0$ $(a_{n+1} = a_1,\ i = 1, 2, \ldots, n)$.

Britanski matematičar P. H. Diananda je u svoja dva članka, 1962/ 63, dokazao da (5) vrijedi ako je $0.461238 < \lambda < 0.499197$.

Napomena 2. V. G. Drinfeljd[1] je kao srednjoškolac na pripremama za IMO u Bukureštu 1969. godine (kao član ekipe SSSR-a osvojio zlatnu medalju s osvojenih 40 bodova od mogućih 42) dao metodu pomoću koje se može izračunati λ s proizvoljnom preciznošću. Dokazano je da je $\lambda = \dfrac{g(0)}{2}$, gdje je $y = g(x)$ jednadžba zajedničke tangente povučene na krivulje čije su jednadžbe $y = e^{-x}$ i $y = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$. Dobio je $\lambda = 0.494\ldots$ Ovo je objavljeno 1971. godine u [7].

Neki povijesni podaci vezani za nejednakost (5) mogu se naći u [4] i [5].

Nadam se da će ovaj kratak i sadržajan prilog biti interesantan učenicima koji pokazuju veći interes za matematiku i sudjeluju na raznim matematičkim natjecanjima, kao i nastavnicima matematike koji rade s nadarenim učenicima na dodatnoj nastavi.

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.

[2] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka 1*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2009.

[3] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka 8*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 20016.

[4] Š. Arslanagić, F. Zejnulahi, *Matematička čitanka 3*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2011.

[5] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka 5*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2013.

[6] Š. Arslanagić, D. Zubović, *Nesbittova nejednakost*, Osiječki matematički list, Vol. 22 (2022), 1, 33–37.

[7] V. G. Drinfeld, *A cyclic inequality* (Russian), Matematičeski zametki, 9 (1971), 113–118.

[8] D. S. Mitrinović (suradnik P. M. Vasić), *Analitičke nejednakosti*, Građevinska knjiga, Beograd, 1970.

[1] Volodimir Geršonovič Drinfeljd (1954., Harkiv, Ukrajina). Diplomirao je na studiju matematike na Državnom sveučilištu u Moskvi. Nekoliko godina kasnije je doktorirao na Matematičkom institutu Steklov u tadašnjem SSSR-u. Godine 1998. odlazi u SAD gdje radi na Sveučilištu u Čikagu. U japanskom gradu Kjotu na 21. Međunarodnom matematičkom kongresu 1990. godine dobio je najveće matematičko priznanje za mlade matematičare, Fieldsovu medalju za svoje radove iz algebarske geometrije i teorije kvantnih grupa.