ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. svibnja 2023. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 1/293.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 216.

A) Zadatci iz matematike

3903. Neka su a, b, c pozitivni brojevi takvi da je $a+b+c=1$. Dokaži
$$\frac{bc}{1+a}+\frac{ca}{1+b}+\frac{ab}{1+c}\leq\frac{1}{4}.$$

3904. Dokaži da je za svaki cijeli broj $n\geq 1$ broj
$$\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{3}n^3+\frac{7}{15}n$$
cijeli.

3905. Riješi sustav linearnih jednadžbi
$$\begin{aligned} x &+ y + z = a\\ x &+ \varepsilon y + \varepsilon^2 z = b\\ x &+ \varepsilon^2 y + \varepsilon z = c, \end{aligned}$$
gdje je $\varepsilon=\sqrt[3]{1}\neq 1$.

3906. Odredi sva rješenja jednadžbe
$$xy(x^2+y^2)=2z^4.$$

3907. Trokut ABC je jednakokračan s vršnim kutom $\sphericalangle CAB=120^\circ$. Ako točke D i E dijele bazu $\overline{BC}$ na tri jednaka dijela, dokaži da je trokut ADE jednakostraničan.

3908. Kut u vrhu C trokuta ABC je pravi. Točke D i E su na hipotenuzi tako da je $|BC|=|BD|$ i $|AC|=|AE|$. Dokaži
$$|DE|=|DF|+|EG|,$$
gdje su $\overline{DF}$ i $\overline{EG}$ redom visine trokuta CAD i BCE.

3909. Dan je paralelogram $ABCD$. Iz točaka A i C povučeni su paralelni pravci AE i CF koji sijeku $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ u E i F. Kroz točku E prolazi paralela s AC koja siječe stranicu $\overline{AB}$ u R. Dokaži $FR\parallel BD$.

3910. Unutar jednakostraničnog trokuta ABC postoji točka P takva da je $|AP|=5$, $|BP|=3$, $|CP|=4$. Odredi duljinu stranice trokuta.

3911. Kroz točku M unutar kružnice k povučena je tetiva $\overline{AB}$. Iz točke M povučene su okomice MP i MQ na tangente kroz točke A i B. Dokaži da $\dfrac{1}{|PM|}+\dfrac{1}{|QM|}$ ne ovisi o izboru tetive $\overline{AB}$.

3912. Za funkciju $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbf{R}$ vrijedi
$$f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x.$$
Nađi sva rješenja jednadžbe $f(x)=f(-x)$.

3913. Duljine tetiva $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ kružnice su redom a i b. Odredi polumjer kružnice ako je površina trokuta ABC jednaka P. **3914.** Odredi sumu
$$\frac{\operatorname{tg}1}{\cos 2}+\frac{\operatorname{tg}2}{\cos 2^2}+\ldots+\frac{\operatorname{tg}2^n}{\cos 2^{n+1}}.$$

3915. Ako su a, b, c pozitivni brojevi takvi da je $a+b+c=1$, dokaži
$$\frac{a^7+b^7}{a^5+b^5}+\frac{b^7+c^7}{b^5+c^5}+\frac{c^7+a^7}{c^5+a^5}\geq\frac{1}{3}.$$

3916. Dokaži da postoje cijeli brojevi a, b, c, od kojih je barem jedan različit od nule, a koji su svi manji od 10^6, takvi da vrijedi
$$|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}|<10^{-11}.$$

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 514. Ivan je za svoju malu sestru napravio klackalicu na kojoj se može sama ljuljati tako da on može učiti fiziku. Napravio ju je od daske dugačke 4 m, široke 25 cm i debele 4 cm. Oslonac je postavio na četvrtini duljine daske. Izračunao je da će se sestrica moći ljuljati sjedeći na kraju kraćeg kraja daske dok joj masa ne bude veća od 25 kg. Kolika je gustoća daske?

OŠ – 515. Učenik je želio odrediti specifični toplinski kapacitet metala od kojeg je napravljeno kuhinjsko posuđe. Zagrijavao je 3 litre vode u loncu mase 600 g dok nije zakuhala, a zatim je na istoj ploči električnog štednjaka zagrijao 500 g ulja u tavi mase pola kg do temperature $200\,^\circ\mathrm{C}$. Početne temperature vode, ulja, tave i lonca su iznosile $20\,^\circ\mathrm{C}$. Utvrdio je da je zagrijavanje vode trajalo 4.6 puta dulje nego zagrijavanje ulja. Tava i lonac su od istog materijala. Koliki je specifični toplinski kapacitet posuđa? Specifični toplinski kapacitet vode je $4200\ \mathrm{J/kgK}$, a ulja $2000\ \mathrm{J/kgK}$.

OŠ – 516. Vozač vozi automobil mase 1.5 t stalnom brzinom $54\ \mathrm{km/h}$. Kad vozač makne nogu s papučice gasa automobil za 10 s uspori na $36\ \mathrm{km/h}$. Koliko je iznosila sila motora dok je vozač pritiskao papučicu gasa?

OŠ – 517. Posuda s vodom je postavljena na vagu koja pokazuje masu od 2.2 kg. Kad se u vodu uroni tijelo mase 1.8 kg obješeno na konac zanemarive mase vaga pokazuje 2.8 kg. Kolika je gustoća uronjenog tijela? Gustoća vode je $1000\ \mathrm{kg/m^3}$.

1805. Asteroid *Vesta* jednom obiđe Sunce za 3.629 godina. Odredi kojom se prosječnom brzinom giba oko Sunca.

1806. Kineska orbitalna stanica *Tiangong* kruži oko Zemlje na visini 386 km iznad površine. Inklinacija putanje (kut ravnine ekvatora i ravnine putanje) je 41.5°. Koliko se satelit najviše popne na nebu iznad Zagreba? Geografska širina Zagreba je 45.8°. Koliko je tada satelit udaljen od Zagreba? Uzmimo da je Zemlja kugla radijusa 6371 km.

1807. Homogeni štap duljine 50 cm učvršćen je tako da može slobodno njihati oko točke na štapu udaljene 10 cm od kraja štapa. Na suprotni kraj štapa učvršćena je kuglica malih dimenzija, mase jednake polovici mase štapa. Odredi period dobivenog fizičkog njihala.

1808. Tijelo mase 1 kg nalazi se na kosini nagiba 30°, koja se može slobodno gibati u horizontalnom smjeru. Koeficijent trenja tijela i kosine je 0.3. Kojom najmanjom i najvećom horizontalnom akceleracijom možemo ubrzavati kosinu, a da tijelo miruje u odnosu na nju?

1809. Paralelni snop svijetlosti dolazi slijeva nadesno na sustav dvije sabirne leće jednake jakosti, međusobno udaljene 30 cm. Snop konvergira 20 cm desno od druge leće. Kolika je žarišna daljina obiju leća? postoji li više rješenja? Nacrtaj.

1810. Odredi specifični toplinski kapacitet 40 %-tne volumne otopine alkohola u vodi. Specifični toplinski kapaciteti su $4190\ \mathrm{J/kgK}$ za vodu i $2500\ \mathrm{J/kgK}$ za alkohol. Gustoća vode je $1000\ \mathrm{kg/m^3}$, a alkohola $790\ \mathrm{kg/m^3}$.

1811. Drveni blok mase $M = 4$ kg leži na horizontalnoj podlozi, vezan oprugom konstante $k = 1000$ N/m za vertikalni zid. U centar bloka udara metak mase $m = 10$ g. Metak dolazi horizontalno, u smjeru opruge i zaustavlja se u drvetu. Odredi brzinu metka prije sudara, ako je maksimalno sabijanje opruge poslije sudara jednako $\Delta l = 30$ cm. Trenje zanemariti.

C) Rješenja iz matematike

3875. *Ako je* $0 \le a, b \le 1$ *i* $a + b = 1$, *dokaži*

$$\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} + \sqrt{\frac{1-b}{1+b}} \le \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Rješenje. Kako je

$$\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} + \sqrt{\frac{1-b}{1+b}}\right)^2 = \frac{1-a}{1+a} + \frac{1-b}{1+b} + 2\sqrt{\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}},$$

$$\frac{1-a}{1+a} + \frac{1-b}{1+b} = \frac{2(1-ab)}{1+a+b+ab} = \frac{2(1-ab)}{2+ab} \quad \text{i}$$

$$\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)} = \frac{1-(a+b)+ab}{1+a+b+ab} = \frac{ab}{2+ab}$$

imamo

$$\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} + \sqrt{\frac{1-b}{1+b}}\right)^2 = \frac{2}{2+ab}\left(1 - ab + \sqrt{ab(2+ab)}\right). \tag{1}$$

Na osnovu A-G nejednakosti je

$$\begin{aligned}\sqrt{ab(2+ab)} &= \frac{1}{3}\sqrt{9ab(2+ab)}\\ &\leqslant \frac{1}{6}(9ab+2+ab) \qquad (2)\\ &= \frac{1}{3}(1+5ab).\end{aligned}$$

Iz (1) i (2) slijedi

$$\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\sqrt{\frac{1-b}{1+b}}\right)^2$$

$$\leqslant \frac{2}{2+ab}\left(1-ab+\frac{1+5ab}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

odakle je

$$\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\sqrt{\frac{1-b}{1+b}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ur.

3876. *Odredi najveći prirodan broj N takav da su oba broja $N+496$ i $N+224$ potpuni kvadrati.*

Rješenje. Neka je $N+496=a^2$ i $N+224=b^2$ za neke pozitivne cijele brojeve a i b. Tada je

$$a^2-b^2=496-224=272=2^4\cdot 17.$$

Tada $17 \mid (a+b)(a-b)$. Ako $17 \mid (a-b)$, tada je $a-b \geqslant 17$ i $a+b \leqslant 16$, što nije moguće. Dakle, $17 \mid (a+b)$.

Imamo pet mogućnosti za $(a+b, a-b)$: $(17,16)$, $(34,8)$, $(68,4)$, $(136,2)$, $(272,1)$. Cjelobrojna rješenja su

$$(a,b)=(21,13),\ (36,32),\ (69,67).$$

Dakle, najveći broj N je jednak

$$69^2-496=4265.$$

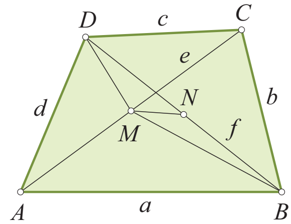
Vid Horvat (3),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3877. *Točke M i N su polovišta dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ četverokuta $ABCD$. Dokaži jednakost*

$$\begin{aligned}&|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2\\ &=|AC|^2+|BD|^2+4|MN|^2.\end{aligned}$$

Prvo rješenje. U principu potrebno je dokazati Eulerov teorem.

$$|AB|=a,\quad |BC|=b,\quad |CD|=c,$$
$$|DA|=d,\quad |AC|=e,\quad |BD|=f,$$
$$4|MN|^2=a^2+b^2+c^2+d^2-e^2-f^2.$$



Izrazimo duljine težišnica trokuta koristeći formulu $t_a=\dfrac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2}$.

$\triangle ACD$:

$$|DM|^2=\frac{|AD|^2+|DC|^2}{2}-\frac{|AC|^2}{4} \qquad (1)$$

$\triangle ABC$:

$$|BM|^2=\frac{|AB|^2+|BC|^2}{2}-\frac{|AC|^2}{4} \qquad (2)$$

$\triangle BMD$:

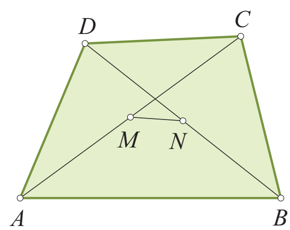
$$|MN|^2=\frac{|DM|^2+|MB|^2}{2}-\frac{|DB|^2}{4} \qquad (3)$$

Uvrstimo (1) i (2) u (3):

$$\begin{aligned}|MN|^2 &= \frac{|AD|^2+|DC|^2+|BC|^2-|AC|^2}{4}-\frac{|DB|^2}{4}\\ 4|MN|^2 &= |AD|^2+|DC|^2+|BC|^2-|AC|^2-|DB|^2\\ &= d^2+c^2+a^2+b^2-e^2-f^2.\end{aligned}$$

Vilim Ivanuš (4),
Prva gimnazija, Varaždin

Drugo rješenje.



$$|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2$$
$$=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{DA}^2$$
$$=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MN}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\right)^2$$
$$+\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{NM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)^2$$
$$+\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MN}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right)^2$$
$$+\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{NM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\right)^2$$
$$=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{MN}^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}^2+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MN}$$
$$+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{DB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}^2$$
$$+\overrightarrow{NM}^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{NM}$$
$$+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}^2$$
$$+\overrightarrow{MN}^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}^2+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{MN}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}$$
$$+\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}^2+\overrightarrow{NM}^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}^2$$
$$+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{NM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{CA}$$
$$=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2+4\cdot\overrightarrow{MN}^2+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MN}$$
$$+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{NM}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{NM}$$
$$+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$$
$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{BD}$$
$$-\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{BD}$$
$$=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2+4\cdot\overrightarrow{MN}^2$$
$$=|AC|^2+|BD|^2+4\cdot|MN|^2.$$

Marko Dodig (4),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3878. *Ako je* $\log_{10}2=a$ *i* $\log_{10}3=b$, *izračunaj* $\log_5 12$.

Rješenje. Iz $a=\log_{10}2$ i $b=\log_{10}3$ imamo:

$$\log_5 12=\frac{\log_{10}12}{\log_{10}5}=\frac{\log_{10}(2\cdot2\cdot3)}{\log_{10}\dfrac{10}{2}}$$
$$=\frac{\log_{10}2+\log_{10}2+\log_{10}3}{1-\log_{10}2}.$$

U ovaj izraz uvrstimo a i b pa je

$$\log_5 12=\frac{2a+b}{1-a}.$$

Vid Horvat (3), Zagreb

3879. *Nađi* 2×2 *matrice* B *i* C *s cjelobrojnim elementima tako da vrijedi*

$$\begin{bmatrix}-1&1\\0&-2\end{bmatrix}=B^3+C^3.$$

Rješenje. Stavimo $A=\begin{bmatrix}-1&1\\0&-2\end{bmatrix}$.

Tada je $A^2=\begin{bmatrix}1&-3\\0&4\end{bmatrix}$ i $A^2+3A+2I=0$.

Dakle,

$$(A+I)^3=A^3+3A^2+3A+I$$
$$=A(A^2+3A+2I)+A+I=A+I.$$

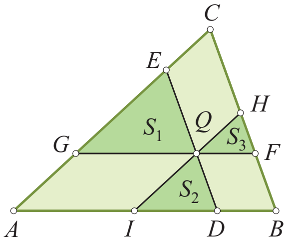
Možemo uzeti

$$B=A+I=\begin{bmatrix}0&1\\0&-1\end{bmatrix}$$
$$C=-I=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$
$$B^3=\begin{bmatrix}0&1\\0&-1\end{bmatrix},\quad C^3=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$
$$B^3+C^3=\begin{bmatrix}-1&1\\0&-2\end{bmatrix}.$$

Ur.

3880. *Kroz točku* Q *unutar trokuta* ABC *prolaze tri pravca, paralelna njegovim stranicama. Oni dijele trokut na šest dijelova, od kojih su tri trokuta s površinama* S_1, S_2, S_3. *Dokaži da je površina trokuta* ABC *jednaka* $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$.

Rješenje. Kroz točku Q povučemo pravce DE, FG i HI redom paralelne stranicama trokuta BC, AB i AC.



Kako su trokuti GQE, IDQ i QFH slični trokutu ABC, vrijedi:

$$\frac{S_1}{S}=\frac{|GQ|^2}{|AB|^2},\quad \frac{S_2}{S}=\frac{|ID|^2}{|AB|^2},\quad \frac{S_3}{S}=\frac{|QF|^2}{|AB|^2},$$

gdje je S površina trokuta ABC.

Odavde imamo:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{S_1}{S}}+\sqrt{\frac{S_2}{S}}+\sqrt{\frac{S_3}{S}}&=\frac{|GQ|}{|AB|}+\frac{|ID|}{|AB|}+\frac{|QF|}{|AB|}\\&=\frac{|AI|+|ID|+|DB|}{|AB|}\\&=1\end{aligned}$$

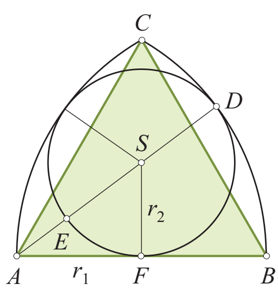
$$\Longrightarrow S=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$$

što smo i trebali dokazati.

Marko Dodig (4), Zagreb

3881. *Kružni lukovi $\overset{\frown}{AC}$ i $\overset{\frown}{BC}$ imaju središta u točkama B i A, a kružnica dodiruje te lukove i dužinu $\overline{AB}$. Ako je duljina svakog luka jednaka l, odredi opseg kružnice.*

Rješenje. Budući su $|AB|$, $|BC|$ i $|AC|$ polumjeri jednakih kružnica, $\triangle ABC$ je jednakostraničan. Nacrtajmo kružnicu sa središtem u točki A čiji je $r_1=|AB|$. Neka je D točka u kojoj se dodiruju dvije kružnice, E točka presjeka manje kružnice i pravca AD, te F točka dodira manje kružnice i pravca AB.



Uočimo da su točke A, E i D kolinearne i neka je $r_2=\dfrac{|DE|}{2}$ polumjer manje kružnice. Prema potenciji točke A obzirom na manju kružnicu je:

$$\begin{aligned}&|AF|^2=|AE|\cdot|AD|\\&\Longrightarrow\left(\frac{r_1}{2}\right)^2=(|AD|-2r_2)\cdot|AD|\\&\Longrightarrow\frac{r_1^2}{4}=r_1\cdot(r_1-2r_2)\Longrightarrow r_2=\frac{3}{8}r_1.\end{aligned}$$

Kako je trokut ABC jednakostraničan i $\sphericalangle BAC=60^\circ$ slijedi:

$$\begin{aligned}l=\overset{\frown}{BC}&=\frac{60^\circ}{360^\circ}\cdot 2\pi r_1\\&\Longrightarrow r_1=\frac{3l}{\pi}\Longrightarrow r_2=\frac{9l}{8\pi}.\end{aligned}$$

Na koncu je opseg manjeg kruga jednak:

$$O=2r_2\pi=\frac{9}{4}l.$$

Marko Dodig (4), Zagreb

3882. *Ako su h_a, h_b, h_c duljine visina, t_a, t_b, t_c duljine težišnica, a R i r duljine opisane i upisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC, dokaži nejednakost*

$$\frac{t_a}{h_a}+\frac{t_b}{h_b}+\frac{t_c}{h_c}\le 1+\frac{R}{r}.$$

Rješenje. Neka je O središte opisane kružnice $\triangle ABC$. Koristeći nejednakost trokuta imamo:

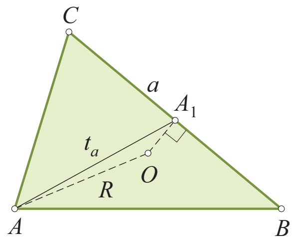
$$\begin{aligned}t_a&=|AA_1|\leqslant|AO|+|OA_1|=R+|OA_1|\\t_b&=|BB_1|\leqslant|BO|+|OB_1|=R+|OB_1|\\t_c&=|CC_1|\leqslant|CO|+|OC_1|=R+|OC_1|,\end{aligned}$$

$$\frac{t_a}{h_a}+\frac{t_b}{h_b}+\frac{t_c}{h_c}\leqslant R\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)+\frac{|OA_1|}{h_a}+\frac{|OB_1|}{h_b}+\frac{|OC_1|}{h_c}.\tag{$*$}$$

Sada je

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}&=\frac{a}{2P}+\frac{b}{2P}+\frac{c}{2P}\\&=\frac{a+b+c}{2P}=\frac{2s}{2rs}=\frac{1}{r}\end{aligned}\tag{1}$$

gdje je s poluopseg, a P površina danog šiljastokutnog trokuta.



Sa slike vidimo:

$$2P_{\triangle OBC} = a|OA_1|\ ,$$
$$2P_{\triangle OAC} = b|OB_1|\ ,$$
$$2P_{\triangle OAB} = c|OC_1|$$

i još

$$2P = ah_a = bh_b = ch_c.$$

Slijedi

$$\frac{P_{\triangle OBC}}{P} = \frac{|OA_1|}{h_a},$$
$$\frac{P_{\triangle OAC}}{P} = \frac{|OB_1|}{h_b},$$
$$\frac{P_{\triangle OAB}}{P} = \frac{|OC_1|}{h_c}$$

$$\begin{aligned}\frac{|OA_1|}{h_a} + \frac{|OB_1|}{h_b} + \frac{|OC_1|}{h_c} &= \frac{P_{\triangle OBC}}{P} + \frac{P_{\triangle OAC}}{P} + \frac{P_{\triangle OAB}}{P} \\ &= \frac{P_{\triangle OBC} + P_{\triangle OAC} + P_{\triangle OAB}}{P} \\ &= \frac{P}{P} = 1\end{aligned} \tag{2}$$

Sada jednakosti (1) i (2) iskoristimo u $(*)$ pa odmah dobivamo traženu nejednakost

$$\frac{t_a}{h_a} + \frac{t_b}{h_b} + \frac{t_c}{h_c} \leqslant 1 + \frac{R}{r}.$$

Jednakost se postiže ako i samo ako je $a = b = c$, odnosno ako je trokut jednakostraničan.

Marko Dodig (4), Zagreb

3883. *Nađi cjelobrojna rješenja jednadžbe*

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\left(3x - \sqrt{9x^2 - 16x - 80}\right)\right) = 1.$$

Rješenje. Iz uvjeta $9x^2 - 16x - 80 \geqslant 0 \implies x \geqslant 4$ ili $x \leqslant -\dfrac{20}{9}$. Sada iz same jednadžbe slijedi:

$$\frac{\pi}{4}\left(3x - \sqrt{9x^2 - 16x - 80}\right) = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$3x - \sqrt{9x^2 - 16x - 80} = 8k$$
$$\sqrt{9x^2 - 16x - 80} = 3x - 8k \quad /\,^2$$

uz uvjet $3x - 8k \geqslant 0 \implies 3x \geqslant 8k$

$$x = \frac{64k^2 + 80}{48k - 16} = \frac{4k^2 + 5}{3k - 1}$$
$$9x = \frac{36k^2 + 45}{3k - 1} = \frac{4(9k^2 - 1) + 49}{3k - 1}$$
$$= 4(3k + 1) + \frac{49}{3k - 1}.$$

Kako je $x \in \mathbb{Z}$ mora biti i $9x \in \mathbb{Z}$ pa je $3k - 1 \in \{\pm 1, \pm 7, \pm 49\}$. Odavde dobivamo cijele brojeve $k \in \{-16, -2, 0\}$. Na koncu imamo samo dva cjelobrojna rješenja dane jednadžbe, koja ujedno zadovoljavaju gore navedeni uvjet:

$$x \in \{-21, -3\}.$$

Marko Dodig (4), Zagreb

3884. *Neka su α, β, γ kutovi trokuta. Dokaži da je*

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} < 2$$

ako i samo ako je

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} < 2$$

Rješenje. Kako je $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, imamo

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta + \gamma}{2}\right)$$
$$= \operatorname{ctg}\frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}},$$

tj.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1.$$

Radi toga je

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} < 2$$

ekvivalentno s

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^2 < 4$$

što možemo pisati kao

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}<2$$

jer je lijeva strana posljednje nejednakosti uvijek pozitivna.

Ur.

3885. *Bez korištenja računala odredi*

$$\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}$$
$$\cdot\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}.$$

Rješenje. Najprije ćemo, matematičkom indukcijom, dokazati da vrijedi općenito

$$\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\ldots\cdot\cos 2^{n-1}x=\frac{\sin 2^n x}{2^n\cdot\sin x},$$

za svaki prirodan broj n.

Baza: Za $n=1$ vrijedi

$$\cos x=\frac{\sin 2x}{2\cdot\sin x}=\frac{2\cdot\sin x\cos x}{2\cdot\sin x}=\cos x.$$

Pretpostavka: Neka vrijedi

$$\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\ldots\cdot\cos 2^{k-1}x=\frac{\sin 2^k x}{2^k\cdot\sin x}$$

za sve prirodne brojeve $k\leqslant n$.

Korak: Dokažimo da tada vrijedi i

$$\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\ldots\cdot\cos 2^{k}x=\frac{\sin 2^{k+1} x}{2^{k+1}\cdot\sin x}.$$

$$\begin{aligned}&\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\ldots\cdot\cos 2^{k-1}x\cdot\cos 2^k x\\&=\frac{\sin 2^k x}{2^k\cdot\sin x}\cdot\cos 2^k x=\frac{2\cdot\sin 2^k x\cos 2^k x}{2^{k+1}\cdot\sin x}\\&=\frac{\sin 2^{k+1}x}{2^{k+1}\cdot\sin x},\end{aligned}$$

čime je tvrdnja dokazana.

Koristeći dokazani identitet određujemo dani trigonometrijski izraz:

$$\begin{aligned}&\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\\&\quad\cdot\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}\\&=\left(\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}\right)\\&\quad\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\right)\cdot\cos\frac{5\pi}{15}\\&=-\left(\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\right)\\&\quad\cdot\left(\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{3}\\&=-\frac{\sin\frac{16\pi}{15}}{16\sin\frac{\pi}{15}}\cdot\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}\cdot\frac{1}{2}\\&=-\frac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{15}\right)}{16\sin\frac{\pi}{15}}\cdot\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)}{4\sin\frac{\pi}{5}}\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{\sin\frac{\pi}{15}}{16\sin\frac{\pi}{15}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{128}.\end{aligned}$$

Marko Dodig (4), Zagreb

3886. *Na koliko se načina može razmjestiti m jedinica i n nula tako da nikoje dvije jedinice ne budu susjedne?*

Rješenje. Razmjestimo najprije n nula. Za jedinice nam se tada pojavljuje $n+1$ slobodno mjesto (1 ispred nula, $n-1$ između njih i 1 poslije nula). Na svako od tih $n+1$ mjesta možemo staviti točno jednu od m jedinica. To možemo napraviti na $\binom{n+1}{m}$ načina, pri čemu mora biti $m\leqslant n+1$.

Marko Dodig (4), Zagreb

3887. *Odredi sumu*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2+3k+1}{(k+2)!}.$$

Rješenje. Računamo najprije n-tu parcijalnu sumu

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2+3k+1}{(k+2)!}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+2)!}\right)\\&=\frac{1}{0!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{1!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}+\cdots\\&\quad+\frac{1}{(n-2)!}-\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}\\&\quad-\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+2)!}\end{aligned}$$

$$= 1 + 1 - \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}$$
$$= 2 - \frac{n+3}{(n+2)!}$$

Tražena je suma jednaka

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 2.$$

Marko Dodig (4), Zagreb

3888. *Dana je kvadratna jednadžba*

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad b^2 - 4ac \geq 0,$$

čija su rješenja x_1 *i* x_2.

a) Izrazi umnožak $(x_1 - kx_2)(x_2 - kx_1)$ *kao funkciju koeficijenata* a, b, c. *Izvedi uvjet na koeficijente tako da omjer rješenja bude jednak* k.

b) Pokaži da se uz taj uvjet rješenja zadane jednadžbe mogu izraziti kao racionalne funkcije od a, b, k, *osim za* $b = 0$.

Rješenje. a) Iz Vièteovih formula pišemo:

$$(x_1 - kx_2)(x_2 - kx_1)$$
$$= x_1x_2 - kx_1^2 - kx_2^2 + k^2x_1x_2$$
$$= (k^2+1)x_1x_2 - k(x_1^2 + x_2^2)$$
$$= (k^2+1)x_1x_2 - k[(x_1 + x_2^2 - 2x_1x_2]$$
$$= (k^2+1)x_1x_2 + 2kx_1x_2 - k(x_1+x_2)^2$$
$$= (k+1)^2x_1x_2 - \ k(x_1+x_2)^2$$
$$= (k+1)^2 \cdot \frac{c}{a} - k \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2, \quad a \neq 0.$$

Uzmimo $k = \frac{x_1}{x_2}$. Ako su oba rješenja dane jednadžbe jednaka nuli, broj k nije definiran. Ako je jedno rješenje jednadžbe jednako nuli (uzmimo da je to x_1), a drugo različito od 0, tada je $k = 0$ i zadani umnožak iznosi također 0. Neka je dalje $x_1x_2 \neq 0$.

$$(x_1 - kx_2)(x_2 - kx_1)$$
$$= (k+1)^2 \cdot \frac{c}{a} - k \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 \Big/ : x_1x_2$$
$$\underbrace{\left(1 - k \cdot \frac{x_2}{x_1}\right)}_{=0} \cdot \left(1 - k \cdot \frac{x_1}{x_2}\right)$$
$$= (k+1)^2 \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{x_1x_2} - k \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{x_1x_2}$$
$$(k+1)^2 = k \cdot \frac{b^2}{ac}$$
$$k + \frac{1}{k} = \frac{b^2}{ac} - 2; \quad a \neq 0, \ c \neq 0.$$

b) Uvjet koji smo dobili možemo zapisati u obliku

$$ac(k+1)^2 - b^2k = 0 \implies c = \frac{kb^2}{a(k+1)^2}.$$

Kvadratna jednadžba sada glasi

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{kb^2}{a^2(k+1)^2} = 0$$
$$\implies a^2(k+1)^2x^2 + ab(k+1)^2x + kb^2 = 0,$$

čija su rješenja

$$x_1 = \frac{-b}{a(k+1)}$$
$$x_2 = \frac{-bk}{a(k+1)}, \quad k \neq -1.$$

Za $k = 1$ imali bi slučaj $b = 0$ koji je isključen uvjetom zadatka.

Marko Dodig (4), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 506. *Vozačica je na putnom računalu pratila potrošnju svojeg automobila vozeći po različitim cestama. Nakon 150 km vožnje po županijskim cestama prosječna je potrošnja bila 4 l (litre) na 100 km. Nakon toga je, bez resetiranja putnog računala, vozila 50 km po autocesti pri čemu je prosječna potrošnja porasla na 4.6 l na 100 km. Koliko je njen automobil bio lakši nakon te vožnje? Gustoća benzina je 770 kg/m*^{3}.

Rješenje.

$s_1 = 150$ km

prva potrošnja $= 4 \ \frac{\text{l}}{100 \text{ km}}$

$s_2 = 50$ km

ukupna potrošnja $= 4.6 \ \frac{\text{l}}{100 \text{ km}}$

$\underline{\rho = 770 \text{ kg/m}^3}$

$\Delta G = ?$

$$s = s_1 + s_2$$
$$= 150 \text{ km} + 50 \text{ km} = 200 \text{ km}$$

$$V = 4.6\ \frac{l}{100\ \text{km}} \cdot 200\ \text{km}$$
$$= 9.2\text{l} = 0.0092\text{m}^3$$
$$m = V \cdot \rho$$
$$= 0.0092\text{m}^3 \cdot 770\ \text{kg/m}^3 = 7.084\ \text{kg}$$
$$\Delta G = m \cdot g = 7.084\ \text{kg} \cdot 10\ \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 70.84\text{N}.$$

Ivona Kučiš (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 507. *Bakrena je zavojnica napravljena od žice promjera 1 mm. Električni je otpor te zavojnice* $12\ \Omega$. *Kolika joj je masa? Električna je otpornost bakra* $1.72 \cdot 10^{-8}\ \Omega m$, *a gustoća* $8900\ kg/m^3$.

Rješenje.

$$d = 1\ \text{mm}$$
$$R = 12\ \Omega$$
$$\rho_e = 1.72 \cdot 10^{-8}\ \Omega\text{m}$$
$$\underline{\rho = 8900\ \text{kg/m}^3}$$
$$m = ?$$
$$S = r^2\pi$$
$$= (0.0005\text{m})^2 \cdot \pi = 7.85 \cdot 10^{-7}\text{m}^2$$
$$R = l \cdot \frac{S}{\rho} \implies l = R \cdot \frac{S}{\rho}$$
$$V = S \cdot l = R \cdot \frac{S^2}{\rho}$$
$$= 12\ \Omega \cdot \frac{(7.85 \cdot 10^{-7}\text{m}^2)^2}{1.72 \cdot 10^{-8}\ \Omega\text{m}} = 4.3 \cdot 10^{-4}\text{m}^3$$
$$m = \rho \cdot V$$
$$= 8900\ \text{kg/m}^3 \cdot 4.3 \cdot 10^{-4}\text{m}^3 = 3.827\ \text{kg}.$$

Franka Horvat (8),
OŠ Bogumila Tonija, Samobor

OŠ – 508. *Učenik je vodičima spojio 4 jednaka otpornika tako da ih je po jednog postavio na stranice kvadrata, a peti je otpornik postavio na dijagonalu tog kvadrata. Poznato je da peti otpornik ima otpor* $32\ \Omega$. *Kad je taj kvadrat spojio na izvor napona 4 V struja u glavnom vodu je iznosila 500 mA. Koliki je otpornik svakog od jednakih otpornika?*

Rješenje.

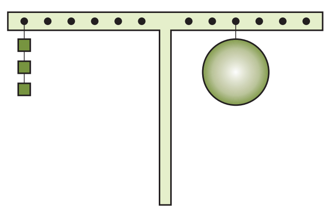
$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$$
$$R_5 = 32\ \Omega$$
$$U = 4\text{V}$$
$$\underline{I = 500\text{mA}}$$
$$R = ?$$

Tako spojeni otpornici čine paralelan spoj otpornika kojima je u jednoj grani otpor od $32\ \Omega$, a u druge dvije grane su otpori od $2R$.

$$R_{\text{ukupni}} = R_{\text{paralele}} = \frac{U}{I}$$
$$R_{\text{paralele}} = \frac{4\text{V}}{0.5\text{A}} = 8\ \Omega$$
$$\frac{1}{R_{\text{paralele}}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{32\ \Omega}$$
$$\frac{1}{8\ \Omega} = \frac{1}{R} + \frac{1}{32\ \Omega}$$
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{8\ \Omega} - \frac{1}{32\ \Omega} = \frac{3}{32\ \Omega}$$
$$R = \frac{32}{3}\ \Omega.$$

Marija Miloš (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 509. *Poluga na slici je u ravnoteži. Koliko je puta masa okruglog tijela veća od mase pravokutnog tijela? Kad bismo okruglo tijelo premjestili jednu rupicu dalje od oslonca, koliko bi pravokutnih tijela trebalo dodati na lijevu stranu poluge da ona ostane u ravnoteži?*



Rješenje. Krak sile okruglog tijela je dva puta manji od kraka sile pravokutnih tijela pa kad bismo umjesto okruglog stavili pravokutna tijela trebalo bi ih biti dvostruko više, dakle masa okruglog tijela je 6 puta veća od mase jednog pravokutnog tijela.

$$m_{\text{okruglog}} = 6m_{\text{pravokutnog}}$$

Nakon premještanja:

$$k_1 = 6$$

$$k_2 = 4$$

$$\underline{F_2 = 6G_{\text{pravokutnih}}}$$

$$n_{\text{dodanih}} = ?$$

$$F_1 \cdot k_1 = F_2 \cdot k_2$$

$$n \cdot G_{\text{pravokutnih}} \cdot 6 = 6 \cdot G_{\text{pravokutnih}} \cdot 4$$

$$n = 4, \qquad n_{\text{dodanih}} = 1.$$

Trebalo bi dodati jedno pravokutno tijelo.

Gregor Klarić (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

1791. *Pri jednoliko ubrzanom gibanju tijelo u drugoj sekundi napravi 5 % veći put nego u prvoj. Odredi akceleraciju i početnu brzinu ako je put nakon 10 sekundi jednak 98 m.*

Rješenje. Koristimo izraz za prijeđeni put jednoliko ubrzanog gibanja:

$$s(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t$$

$$s(1) = \frac{a}{2} + v_0, \quad s(2) = 2a + 2v_0.$$

Put u drugoj sekundi je $s(2) - s(1)$, što zajedno s drugim uvjetom daje dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\frac{3}{2}a + v_0 = 1.05 \cdot \left(\frac{a}{2} + v_0\right)$$

$$50a + 10v_0 = 98.$$

Iz druge jednadžbe v_0 uvrstimo u prvu i dobijemo $a = 0.4 \text{ m/s}^2$, $v_0 = 7.8 \text{ m/s}$.

Marko Dodig (4),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

1792. *Biljarska kugla rotira na stolu. Masa kugle je 100 g, a radijus 2.5 cm. Ako je početna kutna brzina rotacije* 5π *rad/s, a moment sile* $3.5 \cdot 10^{-5}$ *Nm, koliko će okreta kugla napraviti do zaustavljanja?*

Rješenje. Po analogiji s jednoliko ubrzanim pravocrtnim gibanjem, za jednoliko ubrzano rotacijsko gibanje vrijedi: $\omega_n^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\varphi_n$, gdje je ω_n kutna brzina nakon n okretaja, uz kut $\varphi_n = 2\pi \cdot n$. Kugla se zaustavi nakon n okretaja, a to znači da je $\omega_n = 0$. Slijedi

$$0 = 25\pi^2 + 4\pi\alpha \cdot n.$$

Kutno ubrzanje α izračunamo iz

$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{-3.5 \cdot 10^{-5}}{2/5 \cdot 0.1 \cdot 0.025^2} = -1.4 \text{ rad/s}^2,$$

gdje je $I = 2/5mr^2$ moment tromosti homogene kugle. Kutno ubrzanje je negativno jer kugla jednoliko usporava. Uvrštavanjem i sređivanjem dobijemo:

$$5.6n = 78.5375, \quad n = 14.02.$$

Dakle, kugla napravi 14 punih okretaja do zaustavljanja.

Marko Dodig (4), Zagreb

1793. *Kojom minimalnom brzinom treba izbaciti objekt iz svemirske postaje koja kruži na visini 415 km iznad površine Zemlje, da objekt izgori u Zemljinoj atmosferi? Uzmimo da će objekt izgoriti ako se spusti do 80 km visine nad površinom. Uzmimo da je Zemlja kugla radijusa 6371 km, mase* $6 \cdot 10^{24}$ *kg.*

Rješenje. Svemirska postaja kruži brzinom v uz radijus kruženja r,

$$r = R_Z + h = 6\,786\,000 \text{ m},$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{4.0044 \cdot 10^{14}}{6\,786\,000}} = 7681.78 \text{ m/s}.$$

Ako objekt izbacimo u smjeru suprotnom od trenutnog smjera kruženja brzinom Δv, uvjet izgaranja je da su perigej, apogej i velika poluos nove putanje

$$r_{\min} = 6\,451\,000 \text{ m}, \quad r_{\max} = 6\,786\,000 \text{ m},$$

$$a = 6\,618\,500 \text{ m}.$$

Za tu je putanju prosječna brzina

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{GM}{a}} = 7778.38 \text{ m/s}.$$

Pri izbacivanju, u apogeju, brzina u odnosu na Zemlju je

$$v_{\min} = \langle v \rangle \sqrt{\frac{r_{\min}}{r_{\max}}} = 7583.95 \text{ m/s}.$$

Konačno, Δv je razlika brzine kruženja svemirske postaje v i brzine objekta u apogeju $v_{\min}$:

$$\Delta v = v - v_{\min} = 7681.78 - 7583.95$$
$$= 97.83 \text{ m/s}.$$

Ur.

1794. *Izotop* ^{63}*Ni raspada se* β *emisijom u* ^{63}*Cu. Mjerenjem je ustanovljeno da se nakon 73 dana broj raspada u jednakim vremenskim intervalima smanjio za 0.1384 %. Odredi vrijeme poluživota tog izotopa.*

Rješenje. Aktivnost (broj raspada u jedinici vremena) radioizotopa mijenja se isto kao i broj atoma: $A(t) = A_0 2^{-t/T}$, gdje je A_0 početna aktivnost, a T vrijeme poluživota. Iz uvjeta zadatka

$$A(t) = A_0(1 - 0.1384/100),$$
$$0.998616 = 2^{-73/T},$$

uz T izražen u danima. Rješavanje logaritmiranjem daje $T = 36535.2$ dana $= 100.03$ godine.

Ur.

1795. *Okomito na optičku rešetku upada svjetlost valne duljine 500 nm. Kolika je konstanta rešetke ako se drugi ogibni maksimum opaža na* 15° *većem kutu od prvog? Gledamo svjetlost propuštenu kroz rešetku.*

Rješenje. Ogibni maksimum k-tog reda vidi se pod kutom α_k za koji je

$$d \sin\alpha_k = k\lambda,$$

gdje je λ valna duljina svjetlosti, a d konstanta rešetke. Uvjet zadatka je

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 15^\circ,$$

što daje jednadžbu

$$\sin(\alpha_1 + 15^\circ) = 2\sin\alpha_1.$$

Adicijska formula daje

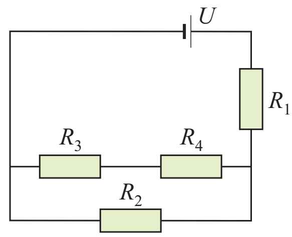
$$\sin\alpha_1 \cos 15^\circ + \cos\alpha_1 \sin 15^\circ = 2\sin\alpha_1,$$
$$0.9659 \sin\alpha_1 + 0.2588 \cos\alpha_1 = 2\sin\alpha_1,$$
$$0.2588 \cos\alpha_1 = 1.0341 \sin\alpha_1,$$
$$\operatorname{tg}\alpha_1 = 0.2503,$$
$$\alpha_1 = 14^\circ 3'.$$

Sada je konstanta rešetke

$$d = \frac{\lambda}{\sin\alpha_1} = 2060 \text{ nm}.$$

Marko Dodig (4), Zagreb

1796. *Na otporniku* R_4 *na shemi napon je 1.2 V veći od napona na* R_3. *Odredi napon izvora.* $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, $R_4 = 4\ \Omega$.



Rješenje. Serijski spoj R_3 i R_4 određuje

$$I_3 = I_4, \qquad \frac{U_3}{R_3} = \frac{U_4}{R_4},$$
$$U_3 = \frac{3}{4}(U_3 + 1.2).$$

Rješenje te jednadžbe je $U_3 = 3.6$ V, pa je

$$U_4 = 4.8 \text{ V},$$
$$U_2 = U_3 + U_4 = 3.6 + 4.8 = 8.4 \text{ V},$$
$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = 4.2 \text{ A},$$
$$I_3 = \frac{U_3 + U_4}{R_3 + R_4} = 1.2 \text{ A}.$$

Tada je za otpornik R_1

$$I_1 = I_2 + I_3 = 5.4 \text{ A},$$
$$U_1 = I_1 R_1 = 5.4 \text{ V}.$$

Konačno, napon izvora je

$$U = U_1 + U_2 = 5.4 + 8.4 = 13.8 \text{ V}.$$

Vilim Ivanuš (4),
Prva gimnazija, Varaždin

1797. *Samarij je metal gustoće* 7520 kg/m^3 *i atomske težine* 150.36 g/mol. *Odredi raspon gustoća izotopski obogaćenog samarija, ako je masa najlakšeg stabilnog izotopa 143.912, a najtežeg* 153.922 g/mol.

Rješenje. Raspored atoma ne ovisi o masi izotopa, nego samo o kemijskom elementu, pa je omjer gustoća jednak omjeru masa izotopa. Tako za najlakši ^{144}Sm imamo

$$\frac{\rho_{\min}}{7520} = \frac{143.912}{150.36}, \qquad \rho_{\min} = 7197.5 \text{ kg/m}^3.$$

Za najteži ^{154}Sm imamo

$$\frac{\rho_{\max}}{7520} = \frac{153.922}{150.36}, \qquad \rho_{\max} = 7698.1 \text{ kg/m}^3.$$

Tako da ovisno o izotopskom sastavu gustoća varira od 7197.5 do 7698.1 kg/m^3.

Ur.