ZANIMLJIVOSTI

Školsko/gradsko natjecanje iz matematike, 26. siječnja 2023.

Zadatke za školsko/gradsko natjecanje za A varijantu i B varijantu priredilo je Državno povjerenstvo.

Zadatci za A varijantu

I. razred

1. Otac Matko prije 10 godina imao je pet puta više godina nego njegova dva sina Josip i Kristijan zajedno. Tada je Josip bio dvostruko stariji od Kristijana. S druge strane, za 14 će godina Josip i Kristijan zajedno imati jednako godina kao i njihov otac. Koliko su sada stari Matko, Josip i Kristijan?

2. Dan je pravokutan trokut ABC s pravim kutom pri vrhu C. Neka je N nožište visine iz vrha C, M polovište hipotenuze i L sjecište simetrale pravog kuta s hipotenuzom. Ako mjera kuta $\sphericalangle LCN$ iznosi 15°, odredi mjeru kuta $\sphericalangle MCL$.

3. Dokaži da je za sve prirodne brojeve n broj $n^4 - n^2$ djeljiv s 12.

4. Neka su a, b i c realni brojevi različiti od nule za koje vrijedi

$$a + b + c = 0 \quad \text{i} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Dokaži da je $abc < 0$.

5. Na ploči su napisana 2023 različita realna broja. Ako svaki broj na ploči (istovremeno) zamijenimo zbrojem svih ostalih brojeva, na ploči će biti ista 2023 broja kao i na početku. Koje sve vrijednosti može poprimiti umnožak svih brojeva na ploči u nekom trenutku?

6. Neka je $ABCDE$ konveksan peterokut kojemu su sve stranice sukladne, a kutovi pri vrhovima C i D pravi. Ako je P sjecište dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$, dokaži da je $|PA| = |PD|$.

7. Neka su $1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < d_5 < d_6 = n$ svi prirodni djelitelji broja n takvi da je $d_5 = 289$ i $d_3 - d_2 = 10$. Odredi n.

II. razred

1. Neka su x_1 i x_2 različita rješenja jednadžbe $x^2+5x+3=0$. Izračunaj $\dfrac{x_1^3x_2 + x_1x_2^3}{x_1 + x_2}$.

2. Odredi sve vrijednosti parametra $p \in \mathbb{R}$ za koje su sva rješenja jednadžbe $x^2 + px + 2023 = 0$ cijeli brojevi.

3. Neka su p i q prosti brojevi takvi da su $p + q + 4$ i $pq - 12$ također prosti brojevi. Odredi $p + q$.

4. Dan je trokut ABC. Neka je M polovište stranice $\overline{AB}$ i H ortocentar tog trokuta. Ako je $|HM| = \frac{1}{2}|AB|$, dokaži da je trokut ABC pravokutan.

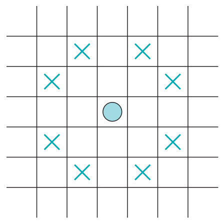
5. Neka je x realan broj različit od -1 i 1. Dokaži da vrijedi

$$x^2+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}\geq 2.$$

6. Odredi sve uređene trojke cijelih brojeva (a,b,c) za koje vrijedi

$$\begin{cases} a^2-2ab+c^2=ac-13, \\ b^2+ac=23. \end{cases}$$

7. Na ploči dimenzija 100×100 nalaze se dvije figure – u gornjem lijevom polju je kralj, a u gornjem desnom skakač. Figure se naizmjenično pomiču, a kralj kreće prvi. Obje figure se kreću kao u šahu: skakač se s polja označenog kružićem može pomaknuti na jedno od osam polja označenih križićima (ako je to polje na ploči), dok se kralj u svom potezu pomiće na jedno od (najviše) osam susjednih polja. Može li kralj sigurno doći do donjeg desnog polja ploče, a da ga skakač pritom ne ulovi?



III. razred

1. Odredi sve realne brojeve a za koje jednadžba

$$||2^x-1|-2|=a$$

ima točno dva realna rješenja.

2. Odredi najmanji prirodan broj koji se može prikazati u obliku $50a^4$ i u obliku $3b^3$ za neke prirodne brojeve a i b.

3. Odredi sve realne brojeve x za koje postoji realan broj y takav da je

$$\frac{\sin(2x)}{\sin(2y)}=4\sin(x+y)\cos(x-y).$$

4. Koliko ima uređenih parova prirodnih brojeva (a,b) za koje vrijedi

$$\log_{2023-2(a+b)} b=\frac{1}{3\log_b a}?$$

5. Dan je šiljastokutan trokut ABC s ortocentrom H. Dokaži da vrijedi

$$|AH|^2+|BC|^2=|BH|^2+|CA|^2=|CH|^2+|AB|^2.$$

6. Na početku je zadan prirodan broj n. Jurica odabire dva prirodna broja a i b čiji je umnožak broj n, a zatim ponavlja postupak s brojem $a+b$ umjesto n. Odredi, u ovisnosti o broju n, najmanji mogući prirodan broj koji Jurica može dobiti kao rezultat nakon konačno mnogo koraka.

7. Neka je $ABCD$ paralelogram takav da vrijedi $|AB|=4$, $|AD|=3$, te je mjera kuta pri vrhu A jednaka $60°$. Kružnica k_1 dira stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ dok kružnica k_2 dira stranice $\overline{CB}$ i $\overline{CD}$. Kružnice k_1 i k_2 su sukladne i dodiruju se izvana. Odredi duljinu polumjera tih kružnica.

IV. razred

1. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje je

$$|z+1| = |4-\overline{z}| \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}\left(\frac{z}{5+i}\right) = \frac{1}{13}.$$

2. Dokaži da je za svaki prirodan broj n broj

$$13^{n+1} + 14^{2n-1}$$

djeljiv sa 183.

3. Dokaži da je $(\sqrt{20}+\sqrt{23})^{2024} + \dfrac{3^{2024}}{(\sqrt{20}+\sqrt{23})^{2024}}$ prirodan broj.

4. Članovi niza $x_1, x_2, x_3, \ldots$ dobiveni su množenjem odgovarajućih članova dvaju aritmetičkih nizova. Prva tri člana tako nastalog niza su $x_1 = 1440$, $x_2 = 1716$ i $x_3 = 1848$. Odredi osmi član tog niza.

5. U nekoj školi učenici mogu učiti dva klasična jezika: latinski i grčki. Od 100 učenika, njih 50 uči latinski, 40 grčki, a 20 ih uči oba jezika. Ako slučajno odaberemo dva učenika, kolika je vjerojatnost da barem jedan od njih uči latinski i barem jedan od njih uči grčki?

6. U trokut ABC površine 1 upisan je pravokutnik $PQRS$ tako da točke P i Q leže na stranici $\overline{AB}$, točka R na stranici $\overline{BC}$ i točka S na stranici $\overline{AC}$. Odredi najveći mogući iznos površine pravokutnika $PQRS$.

7. Odredi sve uređene trojke (x, y, p) gdje je p prost, a x i y prirodni brojevi za koje vrijedi

$$p^x - 1 = y^3.$$

Zadatci za B varijantu

I. razred

1. Zapišite izraz $\left[27^{-2m+3} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{3-2m}\right]^{-2} : 81^{1+m} - 6 \cdot 81^{-3}$, gdje je m cijeli broj, u obliku potencije s pozitivnim eksponentom.

2. Ako se broj stranica pravilnog mnogokuta poveća za 4, broj dijagonala poveća se za 94. Odredite broj dijagonala mnogokuta prije povećanja broja stranica.

3. Marko je potrošio 100 eura nakon što je dobio plaću. Pet dana nakon toga dobio je na lutriji $\frac{1}{4}$ od iznosa koji mu je preostao od plaće i potrošio je još 100 eura. Nakon petnaest dana dobio je $\frac{1}{4}$ od iznosa koji je tada imao i ponovno potrošio 100 eura. Na kraju je imao 800 eura više nego u trenutku dobivanja plaće. Koliku je plaću dobio Marko?

4. Neka je ABC jednakokračni pravokutni trokut. Kružnica sa središtem na jednoj od kateta prolazi vrhom pravog kuta C i dodiruje hipotenuzu trokuta ABC. Odredite duljinu hipotenuze trokuta ABC ako je polumjer dane kružnice jednak 1.

5. Niz od n bijelih i n crnih pločica složen je tako da se crne i bijele pločice pojavljuju naizmjence, a niz započinje bijelom pločicom. Cilj je presložiti pločice tako da sve crne pločice budu jedna pored druge na početku niza, a sve bijele pločice na kraju. Jedini dozvoljeni potez je zamjena susjednih pločica. Koliko je najmanje takvih zamjena potrebno da bi se postigao cilj?

6. Znamenka desetica troznamenkastog broja je 9, a zbroj njegovih znamenaka djeljiv je sa 6. Zamijenimo li tom broju znamenke stotica i jedinica, novi je broj za 99 manji od dvostrukog početnog broja. Odredite početni troznamenkasti broj.

7. Neka je duljina stranice kvadrata $ABCD$ jednaka a. Točka M je polovište stranice $\overline{BC}$. Točka X je sjecište pravca MD i okomice povučene iz vrha A na pravac MD. Izračunajte opseg trokuta ABX u ovisnosti o duljini a.

II. razred

1. Odredite vrijednost brojevnog izraza $\sqrt{2}+\left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}-1\right)^3-\dfrac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

2. Cijena mobitela prije prvoga sniženja iznosila je 200 €. Budući da se mobitel nije prodao nakon što mu je cijena prvi put snižena, prodavač je cijenu još jednom snizio za isti postotak. Ako konačna cijena mobitela iznosi 162 €, koliko je iznosila cijena mobitela nakon prvoga sniženja?

3. Kvadratna funkcija f pozitivna je samo na intervalu $\langle -2, 3\rangle$, a kvadratna funkcija g pozitivna je samo na $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 5, +\infty\rangle$. Broj 1 nultočka je rastuće linearne funkcije h. Odredite sve realne brojeve x za koje vrijedi $\dfrac{f(x)\cdot g(x)}{h(x)}>0$.

4. Zadan je trokut ABC. Točka D se nalazi na stranici $\overline{AB}$, a točka E na stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC tako da je $|AD|=3$ cm, $|BD|=7$ cm, $|BE|=8$ cm, $|DE|=5$ cm i $\sphericalangle BAC=\sphericalangle DEB$. Kolika je površina četverokuta $ADEC$?

5. Sto kartica označeno je brojevima od 1 do 100 tako da je na svakoj kartici isti broj otisnut na obje strane. Jedna strana svake kartice crvene je boje, dok je druga strana plave boje. Ana je najprije postavila sve kartice na stol crvenom stranom prema gore, a zatim je okrenula sve kartice na kojima su brojevi djeljivi s 2. Nakon toga je pregledala sve kartice i okrenula svaku karticu na kojoj je broj djeljiv s 3. Koliko je kartica okrenuto crvenom stranom prema gore nakon što je Ana završila s okretanjem kartica?

6. Zadan je kvadrat $ABCD$. U istoj ravnini izabrana je točka O takva da vrijedi $|OA|=|OB|=5$ cm i $|OD|=\sqrt{13}$ cm. Koliko iznosi duljina stranice toga kvadrata?

7. Zadane su funkcije $f(x)=-\dfrac{1}{4}x^2+3x-2$ i $g(x)=|2x-4|-6$. Kolika je površina trokuta kojemu su dva vrha sjecišta grafova funkcija f i g, a treći je vrh trokuta točka minimuma funkcije g?

III. razred

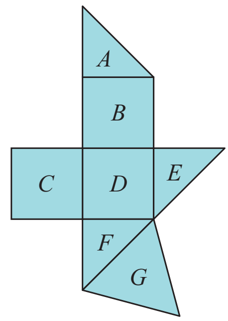
1. Ako je $\operatorname{ctg} x=\dfrac{1}{2}$, koliko je $\dfrac{(\cos x-1+\sin x)(\cos x+1-\sin x)}{\cos x-\cos x\sin x}$?

2. Riješite jednadžbu: $\dfrac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}+5}-\dfrac{5x^{\frac{1}{4}}-15}{x^{\frac{1}{4}}-5}=\dfrac{50}{x^{\frac{1}{2}}-25}$.

3. Neka je ABC pravokutni trokut s pravim kutom u vrhu C. Dulja kateta $\overline{AC}$ promjer je polukružnice koja hipotenuzu siječe u točki D. Odredite duljinu polukružnice ako duljina manje katete iznosi 30 cm, a duljina tetive $\overline{CD}$ iznosi 24 cm.

4. Restoran svojim gostima nudi za predjelo platu hladnih mesnih narezaka, riblju paštetu i salatu od povrća. Od juha gosti imaju na raspolaganju pileću juhu, goveđu juhu, riblju juhu, juhu od brokule i juhu od šparoga. Za glavno jelo nudi riblju, mesnu ili vegetarijansku platu, a za desert veganski kolač ili veganski sladoled. Ako gost bira od svakog slijeda po jedno jelo, kolika je vjerojatnost da će slučajnim odabirom jela dobiti potpuno vegetarijanski obrok (obrok bez mesa i ribe)?

5. Na slici je mreža geometrijskog tijela. Likovi A, E i F su jednakokračni pravokutni trokuti. Likovi B, C i D su kvadrati stranice duljine 1, a G je jednakostraničan trokut. Odredite obujam toga tijela.



6. Odredite sve parove realnih brojeva (x, y) koji su rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{cases} y^{5x^2-51x+10} = 1, \\ 2\log x + 2\log y = \log 9 + \log 25. \end{cases}$$

7. Ustanovljeno je da se tijekom školske godine broj izostanaka učenika trećeg razreda može opisati funkcijom

$$f(t) = 2^{t+a} + b,$$

gdje je t broj proteklih mjeseci od početka školske godine 1. rujna, $f(t)$ ukupan broj izostanaka u prvih t mjeseci, a a i b su konstante. Ove su godine učenici u studenom izostali 128 sati.

a) Nakon koliko će mjeseci učenici imati 4064 sati izostanaka?

b) Koliko su učenici imali neopravdanih izostanaka u prosincu ako je omjer opravdanih i neopravdanih izostanaka u prosincu bio $29 : 3$?

IV. razred

1. Krajnje točke tetive kružnice k imaju koordinate $(6, 0)$ i $(6, 10)$. Odredite jednadžbu kružnice k ako je udaljenost njezina središta od tetive jednaka 4.

2. Neka su $z = x + 2i$ i $w = 3 + yi$ kompleksni brojevi, gdje su $x, y \in \mathbb{R}$. Odredite najmanji pozitivni realni broj x za koji je razlomak $\dfrac{z+w}{z-w}$ imaginaran broj.

3. Prvi, peti i jedanaesti član rastućeg aritmetičkog niza istovremeno su tri uzastopna člana geometrijskog niza. Odredite sto dvanaesti član aritmetičkog niza, ako je njegov prvi član jednak 136.

4. Tri su točke udaljene od podnožja uspravnog tornja redom 100, 200 i 300 metara te zajedno s podnožjem tornja leže u istoj ravnini. Odredite visinu tornja ako je zbroj kutova pod kojim se njegov vrh vidi iz tih točaka jednak 90°.

5. Ako je $z = -\sin\dfrac{2022\pi}{5} - i\cos\dfrac{2023\pi}{5}$, koliko je z^{10}?

6. Za koju vrijednost realnog broja x je zbroj trećeg i petog člana u razvoju binoma $\left(\sqrt{2^x} + \dfrac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^m$ manji ili jednak 135 ako je zbroj binomnih koeficijenata posljednja tri člana jednak 22?

7. Koliko ima neparnih sedmeroznamenkastih brojeva koji se sastoje od znamenki 2, 3 i 0 ako se svaka od tih znamenki u zapisu broja pojavljuje barem jednom?

Matko Ljulj