Srednjoeuropska matematička olimpijada, Bern, 25. – 31. kolovoza 2022.

Nakon što smo 2021. po drugi put ugostili matematičare srednje Europe u Hrvatskoj, na red za domaćinstvo je 2022. godine došla Švicarska. Od 25. do 31. kolovoza održana je 16. Srednjoeuropska matematička olimpijada (MEMO) u Bernu. Ovo je natjecanje okupilo 60 učenika iz 10 država Srednje Europe: Austrija, Češka, Hrvatska, Litva, Mađarska, Njemačka, Poljska, Slovačka, Slovenija i Švicarska, kao domačina. Povratak u predpandemijsko vrijeme imali smo 2021. u Zagrebu, uz 8 država koje su se natjecale uživo, a 2022. je označila potpuni povratak na ovo natjecanje. Veselje i zadovoljstvo učenika bilo je očito. Na ovom natjecanju, prema pravilima, ekipe su zastupljene učenicima koji te godine ne nastupaju na Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi i nisu maturanti. Hrvatske ekipe za Srednjoeuropsku matematičku olimpijadu i Međunarodnu matematičku olimpijadu se već dugi niz godina biraju na izbornim natjecanjima pod nazivom Hrvatska matematička olimpijada. Ove godine članovi ekipe Republike Hrvatske, prema rezultatima na Hrvatskoj matematičkoj olimpijadi, bili su:

Emanuel Tukač, Prva gimnazija Varaždin,
Stella Čolo, Gimnazija Franje Petrića, Zadar,
Lara Semeš, XV. gimnazija, Zagreb,
Adian Anibal Santos Sepčić, XV. gimnazija, Zagreb,
Borna Čizmarević, Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka
Nikola Vujica, XV. gimnazija, Zagreb.

Emanuel, Stella i Adian Anibal su u školskoj godini 2021./22. pohađali treći, Lara drugi, a Borna i Nikola prvi razred. Ipak, svi su oni već iskusni i vrlo poznati natjecatelji iz matematike. Najveće međunarodno iskustvo imali su Stella i Emanuel, a i Lara i Nikola također, ali u natjecanju online zbog pandemije Covid-a 19. Kao voditelju ekipe bilo mi je zadovoljstvo imati simpatičnu i dragu ekipu čiji su se članovi lijepo slagali. Uz mene voditelj je bio i Petar Nizić-Nikolac, bivši olimpijac i danas asistent na ETH, Zürich.

Slika 1. Dolazak u Bern.

Pripreme za MEMO su započele klasičnim dvotjednim pripremama u Zagrebu, u organizaciji Hrvatskog matematičkog društva, u mjesecu lipnju, tijekom kojih su članovi ekipe iskazali visoku razinu motivacije. Nakon kraćeg odmora, s radom su nastavili tijekom ljeta. Petar Nizić-Nikolac je pripremio zadatke za rad, sustavno po područjima i težini, a bili su organizirani i online sastanci. Pripreme su se zaključile završnim pripremama ekipe na kampu Udruge Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić" održanom u Kaštel-Štafiliću, u trajanju od jednog tjedna, neposredno prije samog natjecanja.

Ekipa je putovala avionom do Züricha i potom vlakom do Berna. Bilo je to vrlo lijepo putovanje, pogled iz aviona na alpski krajolik je bio prekrasan, a putovanje vlakom vrlo ugodan doživljaj. U Bernu smo bili smješteni u hostelu pod nazivom Hostel 77, nedaleko od škole u kojoj se održalo natjecanje. Tamo je o ekipi vodio brigu naš vodič Leo, student molekularne biologije koji nam je bio uvijek na usluzi.

Bern, glavni grad Švicarske, je prelijepi grad i svakako je bio odličan izbor za domaćinstvo MEMO-a. Smješten je na obalama rijeke Aare, a u njegovom povijesnom središtu čuvaju se ostaci srednjovjekovnoga podrijetla uz lijepe palače iz 16. i 17. stoljeća. Povijesno središte Berna je upisano na UNESCO-ov popis mjesta svjetske baštine u Europi.

Učenici su se, u društvu s Petrom, najčešće opuštali igranjem "mafije", a takav pristup sigurno je pomogao ekipi da se smiri uoči samog natjecanja. Bili smo svijesni da svaki učenik ima neka područja u kojima je izuzetno dobar, a ukupno su dobro pokrivali i geometriju i kombinatoriku i teoriju brojeva i algebru, pa smo najveća očekivanja imali od ekipnog natjecanja gdje učenici rješavaju zadatke zajedno. Potajno smo se nadali medalji, iako smo bili svjesni vrlo jake konkurencije.

Ta se naša procjena pokazala opravdanom. Nakon pojedinačnog natjecanja, u kojem su svi učenici bili vrlo solidni, ali nitko nije uspio riješiti više od dva zadatka. Naša ekipa se uspjela maksimalno opustiti za ekipno natjecanje. Bili smo svijesni i svojih mogućnosti, ali i činjenice da su ekipe Mađarske, Poljske i Njemačke bile uspješnije od nas u pojedinačnom dijelu natjecanja. No, ekipno natjecanje je za našu ekipu uvijek "nešto posebno". I zaista, tu smo bili fantastični.

Na kraju se ispostavilo da je ekipa Hrvatske na ekipnom dijelu natjecanja bila druga, samo bod iza ekipe Poljske te su tako svi učenici dobili *srebrne medalje* za ekipni dio. Bod iza nas bila je Mađarska, a sve ostale ekipe znatno su zaostale iza prve tri. Preciznije, Poljska je osvojila 56 od 64 moguća boda, Hrvatska 55, Mađarska 54, dok su se sve ostale ekipe osvojile između 10 i 44 boda. Za zlatnu medalju zaista je nedostajalo tek malo "sportske sreće". Ipak, žalost za time zamijenio je ponos zbog izvrsnog rezultata. Još jednom se pokazalo koliko je timski rad i složnost jaka strana naše ekipe.

Na pojedinačnom dijelu natjecanja, učenici su također bili odlični. Iako je učenica iz Njemačke, Réka Wagener, dobila maksimalnih 32 boda, što je izuzetno dostignuće, mnogi natjecatelji nisu uspjeli dobiti veći broj bodova, jer su zadatci objektivno bili dosta zahtjevni. Od naših učenika Emanuel je osvojio 18, Stella 17, Lara 16, Nikola 13, Borna 10 i Adian Anibal 9 bodova. Zapravo su imali vrlo solidan, a neki i jako dobar nastup s obzirom na težinu zadataka. Ispostavilo se da je ekipa na pojedinačnom natjecanju dobila četiri medalje: *Emanuel* srebrnu, a *Stella*, *Lara* i *Nikola* brončanu.

Osim natjecanja, učenici su, kao i voditelji, proveli vrlo ugodno vrijeme u zajedničkom druženju s članovima ostalih ekipa. A osobito nam je u sjećanju ostao prekrasan izlet brodom po jezeru Thunsee, nakon čega je slijedio uspon na planinu Niederhorn pri čemu su se neki, osobito voditelji, barem dio tog uspona "pomogli" uspinjačom i žičarom. Bila je to zaista prava Švicarska, prekrasna priroda, malih pitoresknih gradića uz obale jezera, lijepih planinskih lanaca i predivnih pogleda s vrha planina.

Na povratku kući smo iskoristili činjenicu da nam je let za Zagreb bio večernji i veliki dio dana smo proveli razgledavajući lijepi grad Zürich, gdje smo šetajući obišli gradsku jezgru, a i posjetili ETH, poznato švicarsko sveučilište, na kojem će možda i neki od naših učenika imati priliku studirati. Nakon povratka kući, gdje su nas obitelji, prijatelji i mnogi znanci dočekali uz čestitke i veselo raspoloženje, ostale su nam zaista lijepe uspomene.

Vrlo lijepi MEMO očekujemo i sljedeće godine, od 21. do 27. kolovoza u gradiću Strečno, nedaleko od Žiline u Slovačkoj. Veselimo se što će nova ekipa, možda i s nekim mlađim članovima ovogodišnje, uživati u matematici, druženju s prijateljima i upoznavanju novih lijepih krajeva Srednje Europe.

Slika 2. Naši natjecatelji sa srebrnim medaljama.

Na kraju navodimo i zadatke s natjecanja.

Pojedinačno natjecanje

1. Neka je $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da
$$f(x + f(x + y)) = x + f(f(x) + y) \quad \text{vrijedi za sve } x,\ y \in \mathbb{R}.$$

2. Neka je n prirodan broj. Ana i Barbara igraju špilom od n karata označenim brojevima $1, 2, \ldots, n$. Prije početka igre špil je promiješan. Igračice naizmjenično povlače poteze, počevši od Ane. Kada je igračica na potezu, ako k označava broj karte na vrhu špila, onda ta igračica pogleda sve karte te promijeni ili ostavi poredak gornjih k karata. Ako je i dalje karta na vrhu označena brojem k, onda je igračica izgubila i igra završava. U protivnom, potez druge igračice započinje. Odredi, ovisno o početnom rasporedu karata u špilu, ima li neka od igračica pobjedničku strategiju, i ako ima, koju.

3. Neka je $ABCD$ paralelogram takav da je $\sphericalangle DAB < 90^\circ$. Neka je $E \neq B$ točka na pravcu BC takva da je $|AE| = |AB|$, slično neka je $F \neq D$ točka na pravcu CD takva da je $|AF| = |AD|$. Kružnica opisana trokutu CEF siječe pravac AE još i u točki P te pravac AF još i u točki Q. Neka je X točka simetrična točki P s obzirom na pravac DE te neka je Y točka simetrična točki Q s obzirom na pravac BF. Dokaži da točke A, X i Y leže na istom pravcu.

4. Na početku su na ploči napisana dva prirodna broja a i b takva da je $a \neq b$. U svakom koraku Andrea bira s ploče dva broja x i y takva da je $x \neq y$ te na ploču dopisuje broj $D(x, y) + V(x, y)$. Neka je n prirodan broj. Dokaži da, neovisno o početnim vrijednostima a i b, Andrea može, u konačno mnogo koraka, postići da se višekratnik od n nalazi na ploči.

Napomena. Za dane prirodne brojeve $D(x, y)$ definiramo kao njihov najveći zajednički djelitelj i $V(x, y)$ kao njihov najmanji zajednički višekratnik.

Ekipno natjecanje

1. Za par realnih brojeva (a_0, b_0) definiramo dva niza realnih brojeva $a_0, a_1, a_2, \ldots,$ i $b_0, b_1, b_2, \ldots,$ koristeći rekurzije

$$a_{n+1} = a_n + b_n \quad \text{i} \quad b_{n+1} = a_n \cdot b_n$$

za sve $n = 0, 1, 2, \ldots$ Odredite sve parove realnih brojeva (a_0, b_0) takve da je $a_{2022} = a_0$ i $b_{2022} = b_0$.

2. Neka je k prirodan broj i neka su $a_1, a_2, \ldots, a_k$ realni brojevi $\geqslant 0$. Na početku je na ploči napisan niz od $n \geqslant k$ nula. U svakom koraku, Ivan bira k uzastopnih brojeva s ploče te uvećava prvi od njih za a_1, drugi za a_2, i tako dalje do k-tog od njih koji uvećava za a_k. Poznato je da je, nakon konačno mnogo koraka, Ivan postigao da su svi brojevi na ploči jednaki. Dokažite sa su svi ne-nul brojevi među brojevima $a_1, a_2, \ldots, a_k$ jednaki.

3. Neka je n prirodan broj. Dano je n plavih i n crvenih krava koje su, u nekom poretku, poredane u red. Tomislav želi sortirati krave prema boji, tako da se sve plave krave nalaze na početku reda. U svakom koraku, on smije zamijeniti dva susjedna bloka koji broje jednako mnogo krava (blok krava se sastoji od jedne ili nekoliko uzastopnih krava). Koji je najmanji broj poteza potreban Tomislavu da izvrši sortiranje, neovisno o početnom rasporedu krava?

4. Neka je n prirodan broj. Dana je $2n \times 2n$ ploča. Svako polje je obojano u jednu od $2n^2$ boja tako da je svaka boja iskorištena točno dvaput. Janica se nalazi u jednom od polja, a na nekom drugom polju postoji čokolada, do koje Janica želi doći. U svakom koraku, ona se može kretati na točno jedan od sljedeća dva načina: ili hoda do susjednog polja ili se teleportira na ono drugo polje trenutnom polju. (Ukoliko su dva susjedna polja iste boje, onda se Janica može kretati hodanjem ili teleportiranjem). Odredite može li Janica uspjeti tako da se kreće naizmjenično hodanjem i teleportiranjem, s time da je teleportiranje prva kretnja, neovisno o početnoj konfiguraciji.

Napomena. Dva polja su susjedna ako imaju zajedničku stranicu.

5. Neka je Ω kružnica opisana trokuta ABC takvom da je $\sphericalangle CAB = 90^\circ$. Težišnice trokuta iz vrhova B i C redom sijeku Ω još i u D i E. Tangenta iz točke D na Ω siječe pravac AC u točki X. Slično, tangenta iz točke E na Ω siječe pravac AB u točki Y. Dokažite da je pravac XY tangenta na Ω.

6. Neka je $ABCD$ konveksni četverokut takav da je $|AC| = |BD|$ te da stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ nisu paralelne. Neka je P sjecište dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Točka E leži na dužini $\overline{BP}$ tako da vrijedi $|PC| = |PE|$, dok točka F leži na dužini $\overline{AP}$ tako da vrijedi $|PD| = |PF|$. Dokažite da kružnica opisana trokutu određenom pravcima AB, CD i EF dodiruje kružnicu opisanu trokutu ABP.

7. Neka je $\mathbb{N}$ skup prirodnih brojeva. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je $f(1) \leqslant f(2) \leqslant f(3) \leqslant \ldots$ te da su oba broja $f(n) + n + 1$ i $f(f(n)) - f(n)$ potpuni kvadrati, za sve prirodne brojeve n.

8. Kažemo da je prirodan broj *sirni* ako je aritmetička sredina njegovih znamenaka u decimalnom zapisu jednaka početnom broju nakon što mu se stavi decimalna točka nakon vodeće (prve slijeva) znamenke. Dokažite da postoji samo konačno mnogo sirnih brojeva. Npr. 2250 je sirni, jer mu je aritmetička sredina znamenaka 2.250.

Više informacija o MEMO-u 2022. možete naći na `https://memo22.olympiad.ch/`.

Ilko Brnetić