LINEARNA TRODIMENZIONALNA TRANSFORMACIJA U FOTOGRAMETRIJI

Anton SINDIK — Beograd

U fotogrametrijskoj praksi neizbježno se susrećemo sa pojmoj apsolutne orijentacije. U slučaju grafičke restitucije ona je obuhvaćena postupcima urazmjeravanja i horizontiranja, dok se kod analitičke fotogrametrije izvodi putem linearne trodimenzionalne transformacije. Podsjetimo da se takva transformacija zasniva na poznavanju njenih slijedećih parametara: faktora razmjere, 3 parametra translacije i 3 parametra prostorne rotacije. Da bi se moglo odrediti tih 7 parametara potrebno je imati izvjestan broj tačaka sa poznatim koordinatama i u sistemu modela i i u državnom koordinatnom sistemu. Minimum su: dvije tačke sa x, y i h koordinatama i jedna tačka sa h koordinatom — poznatim u oba sistema. Ako na modelu ima više tačaka sa poznatim koordinatama u oba sistema, 7 parametara transformacije mogu se računati primjenom metode najmanjih kvadrata.

No svakako, trodimenzionalna — prostorna — transformacija nije sama sebi cilj. Pomoću nje moguće je odrediti Y, X i H koordinate državnog koordinatnog sistema sa sve tačke čije su koordinate mjerene ili računate u sistemu modela. Na ovom principu zasniva se određivanje koordinata međnih — graničnih tačaka u tzv. numeričkom katastru i u operacijama komasacije a taj se postupak može primijeniti i kod progušćavanja geodetske osnove novim tačkama. Te se operacije češće pojavljuju kao zadaci naših fotogrametrijskih radnih organizacija pa će se ovdje iznijeti postupak i redoslijed linearne trodimenzionalne transformacije modelnih — mašinskih koordinata u koordinate državnog sistema.

Do modelnih — mašinskih koordinata može se doći ili analitičkim putem ili direktnim čitanjem tih koordinata na stereorestitucionom instrumentu. Zadržaćemo se na ovom drugom slučaju jer je on u našoj praksi i najčešće moguć (analitički postupci još uvijek nemaju kod nas širu primjenu).

Rad na stereorestitucionom instrumentu obuhvaća:

1 — Operaciju relativne orijentacije,

2 — Postavljanje odnosno odabiranje skale visinskog brojčanika na kojoj će se čitati modelne h — koordinate u istim jedinicama kao x i y koordinate,

3 — Čitanje ili registrovanje modelnih, tj. mašinskih koordinata svih datih tačaka i tačaka koje se određuju.

Iz gornjeg je vidljivo da formirani model nije korizontiran i da ima proizvoljnu razmjeru. No treba težiti da ona bude što krupnija, vodeći pri

Adresa autora: Anton Sindik, dipl. ing., Vojno-geografski institut - Beograd

tome računa da baza bude odabrana u skladu sa mogućnosti zahvata z — stuba instrumenta. Očitane (registrirane) koordinate pružaju mogućnost daljnje računske obrade, odnosno same transformacije.

Poznato je da u fotogrametrijskoj praksi postoji nekoliko postupaka računanja trodimenzionalne transformacije iako svi polaze od istih osnova. Postupak koji se ovdje iznosi bazira na metodi koju je primijenio Dr. A. Dalcher (Kern i co — Aarau) pri povezivanju pojedinačnih modela u jedinstveni red aerotriangulacije (J. Klaver: »Semi-analitical aerotriangulation with the Kern PG 2«, iznijeto na simpoziumu numeričke fotogrametrije održanom u Gaithersburgu — SAD — 1967. godine).

Redoslijed računskih operacija izgleda ovako:

1 — Račun parametara transformacije pomoću tačaka čije su koordinate poznate u oba sistema:

a — Translacija se izvodi svođenjem poznatih Y, X i H koordinata na koordinatni sistem čije se ishodište nalazi u težištu tih tačaka i svođenjem mašinskih x, y i h koordinata istih tačaka takođe na sistem čije je ishodište u njihovom težištu.

b — Urazmjeravanje se vrši množenjem svedenih mašinskih koordinata sa faktorom razmjere R čija se veličina dobije kao količnik odnosa prostornih odstojanja u državnom i mašinskom sistemu.

c — Slijedi zatim račun elemenata matrice rotacije i množenje svedenih i urazmjerenih mašinskih koordinata sa tom matricom čime se dobiju koordinate tih tačaka u sistemu državnih koordinata svedenih na težište.

d — Računate koordinate vraćaju se zatim preko koordinata težišta u pravi državni sistem.

e — Upoređuju se date i transformisane koordinate pri čemu veličina odstupanja definišu tačnost izvršene transformacije odnosno ukazuju na postojanje neke greške u mjerenju ili računanju.

2 — Račun transformacije tačaka čije se koordinate Y, X i H određuju:

a — Svođenje mašinskih x, y i h koordinata na ranije računato ishodište.

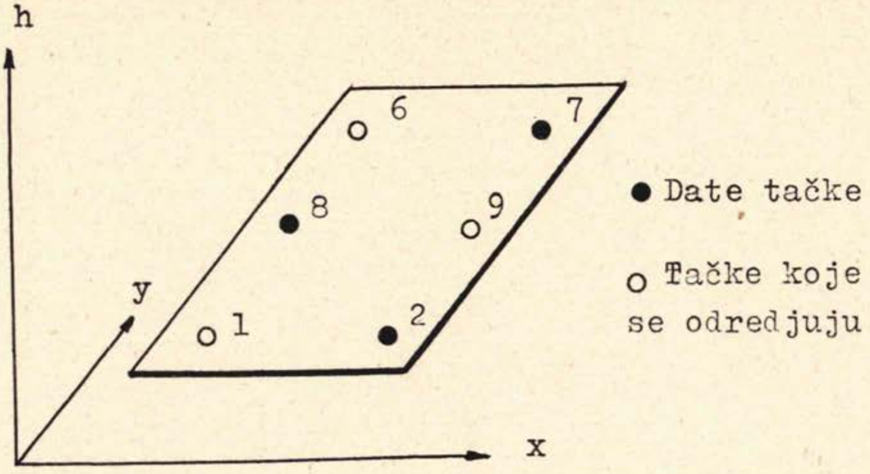
b — Množenje svedenih mašinskih koordinata sa faktorom razmjere R.

c — Množenje svedenih i urazmjerenih mašinskih koorginata sa matricom rotacije.

d — Vraćanje tako računatih koordinata preko koordinata težišta u pravi državni koordinatni sistem čime je zadatak i završen.

Praktični postupak biće izložen kroz jedan računski primjer kada će se paralelno dati i objašnjenje nekih operacija (naročito račun elemenata matrice rotacije). Instrumentalna obrada tj. formiranje modela i čitanje mašinskih koordinata izvršeno je na stereorestitucionom instrumentu Wild A7. Snimci su bili u razmjeni približno 1 : 5 000.

Slika 1 — Mašinski koordinatni sistem i raspored tačaka na modelu.



1 — POLAZNI PODACI

Tač-	Koordinate državnog koordinatnog sistema			Očitane mašinske koordinate		
	Y	X	H	x	y	h
7	3 995,49	7 495,11	519,29	299,38	478,73	351,46
8	3 711,57	7 250,31	490,27	81,18	304,42	333,33
2	3 994,91	6 997,26	491,17	284,73	108,12	336,06
6				86,43	490,31	343,08
9				292,20	293,57	335,61
1				76,16	116,25	336,29

2 — TRANSLACIJA — SVOĐENJE NA SISTEM ČIJE JE ISHODIŠTE U TEŽIŠTU

Tačka	Koordinate državnog koordinatnog sistema			Očitane mašinske koordinate		
	Y	X	H	x	y	h
8	3711,57	7250,31	490,27	81,18	304,42	333,33
7	3995,49	7495,11	519,29	299,38	478,73	351,46
2	3994,91	6997,26	491,17	284,73	108,12	336,06
Suma	11701,97	21742,68	1500,73	665,29	891,27	1020,85
$\frac{\text{Suma}}{\text{n}}$	$Y_0 =$ 3900,66	$X_0 =$ 7,247,56	$H_0 =$ 500,24	$x_0 =$ 221,76	$y_0 =$ 297,09	$h_0 =$ 340,28
Tačke	Državne koordinate svedene na težište			Mašinske koordinate svedene na težište		
	$\overline{Y}=Y-Y_0$	$\overline{X}=X-X_0$	$\overline{H}=H-H_0$	$\overline{x}=x-x_0$	$\overline{y}=y-y_0$	$\overline{h}=h-h_0$
8	$-189,09$	$+\ 2,85$	$-\ 9,97$	$-140,58$	$+\ 7,33$	$-\ 6,95$
7	$+\ 94,83$	$+247,55$	$+19,05$	$+\ 77,64$	$-181,64$	$+11,18$
2	$+\ 94,25$	$-250,30$	$-\ 9,07$	$+\ 62,97$	$-188,97$	$-\ 4,22$
	$-\ 0,01$	0,00	$+\ 0,01$	$+\ 0,01$	0,00	$+\ 0,01$

3 — *RAČUN FAKTORA RAZMJERE R I URAZMJERAVANJE SVEDENIH MAŠINSKIH KOORDINATA*

Faktor razmjere R računa se po izrazu:

$$R = \sqrt{\frac{\Delta Y^2 + \Delta X^2 + \Delta H}{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta h^2}} \tag{1}$$

Ovdje su ΔY, ΔX i ΔH, odnosno Δx, Δy i Δh koordinatne razlike tačaka.

U primjeru, računanje faktora razmjere R iz tri kombinacije dalo je slijedeće rezultate:

Dužina	Faktor R
8 — 7	1 343,3
8 — 2	1 343,6
7 — 2	1 343,3

Iz gornjih podataka uzeta je srednja vrijednost:

$$R = 1\,343{,}4$$

Množenjem svedenih mašinskih koordinata sa faktorom R dobije se slijedeće:

Tačka	Državni koordinatni sistem			Mašinski koordinatni sistem		
	Y	X	H	x'	y'	h'
8	— 189,09	+ 2,85	— 9,97	— 188,86	+ 9,85	— 9,34
7	+ 94,83	+ 247,55	+ 19,05	+ 104,02	+ 244,02	+ 15,02
2	+ 94,25	— 250,30	— 9,07	+ 84,59	— 253,86	— 5,67
	— 0,01	0,00	+ 0,01	0,00	+ 0,01	+ 0,01

Nakon ovih operacija, oba sistema imaju zajedničko ishodište i istu razmjeru. Predstoji još prostorna rotacija mašinskog sistema.

4 — *RAČUN ELEMENATA MATRICE ROTACIJE*

Uglovne vrijednosti zakošenja osi mašinskog sistema prema osima državnog koordinatnog sistema (s_1, s_2 i s_3) računaju se preko sistema jednačina koji u općem obliku glasi:

$$A \,.\, s = c \tag{2}$$

Koliko će se jednačina moći formirati zavisi od broja datih tačaka s time što će svaka tačka omogućiti formiranje 3 jednačine. To znači da će npr. u slučaju 3 date tačke poznate u oba sistema biti moguće formirati 9 jednačina, odnosno u slučaju 4 date tačke — 12 jednačina. Nepoznanica (s_1, s_2 i s_3) ima uvjek 3 pa ih je moguće riješiti metodom najmanjih kvadrata. Na primjer, u slučaju 3 tačke, sistem

$$^{A}(9,3) \cdot {}^{s}(3,1) = {}^{c}(9,1) \tag{3}$$

izgleda ovako:

$$\left\|\begin{array}{ccc} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \\ 0 & a_6 & -a_5 \\ -a_6 & 0 & a_4 \\ a_5 & -a_4 & 0 \\ 0 & a_9 & -a_8 \\ -a_9 & 0 & a_7 \\ a_8 & -a_7 & 0 \end{array}\right\| \cdot \left\|\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \end{array}\right\| \tag{4}$$

Koeficijenti $a_1 \ldots a_9$ i $c_1 \ldots c_9$ dobiju se preko zbira, odnosno razlike koordinata Y_n, X_n i H_n i x'_n, y'_n i h'_n, pri čemu je, slijedeći naš primjer:

$$\begin{array}{ll} a_1 = Y_8 + x'_8 & c_1 = Y_8 - x'_8 \\ a_2 = X_8 + y'_8 & c_2 = X_8 - y'_8 \\ a_4 = Y_7 + x'_7 & c_3 = H_8 - h'_8 \\ a_3 = H_8 + h'_8 & c_4 = Y_7 - x'_7 \\ a_5 = X_7 + y'_7 & c_5 = X_7 - y'_7 \\ a_6 = H_7 + h'_7 & c_6 = H_7 - h'_7 \\ a_7 = Y_2 + x'_2 & c_7 = Y_2 - x'_2 \\ a_8 = X_2 + y'_2 & c_8 = X_2 - y'_2 \\ a_9 = H_2 + h'_2 & c_9 = H_2 - h'_2 \end{array} \tag{5}$$

Lako je uočiti kako bi se u slučaju 4 date tačke računali odgovarajući koeficijenti a_{10}, a_{11} i a_{12}, odnosno c_{10}, c_{11} i c_{12} i kako bi se rasporedili u sistemu A.

Sistem jednačina našeg primjera imaće oblik:

I	II	III	—c
0,00	— 19,31	— 12,70	+ 0,23
+ 19,13	0,00	— 377,95	+ 7,00
+ 12,70	+ 377,95	0,00	+ 0,63
0,00	+ 34,07	— 491,57	+ 9,44
— 34,07	0,00	+ 199,10	— 3,53
+ 491,57	— 199,10	0,00	— 4,03
0,00	— 14,74	+ 504,16	— 9,66
+ 14,74	0,00	+ 178,84	— 3,56
— 504,16	— 178,84	0,00	+ 3,40

Prelaskom na sistem normalnih jednačina dobije se:

+ 497 730,57	— 2 907,65	— 11 445,45	— 3 484,21
	+ 216 221,67	— 23 933,87	+ 891,99
		+ 710 450,42	— 13 498,67

Rješenje ovog sistema glasi:

$s_1 = +0{,}007427$

$s_2 + -0{,}001917$

$s_3 = +0{,}019055$

Pomoću vrijednosti s_1, s_2 i s_3 formira se matrica rotacije T po šemi:

$$T = \frac{1}{a} \cdot \begin{Vmatrix} b + 2 \cdot s_1^2 & 2(s_1 \cdot s_2 - s_3) & 2(s_1 \cdot s_3 + s_2) \\ 2(s_1 \cdot s_2 + s_3) & b + 2 \cdot s_2^2 & 2(s_2 \cdot s_3 - s_1) \\ 2(s_1 \cdot s_3 - s_2) & 2(s_2 \cdot s_3 + s_1) & b + 2 \cdot s_3^2 \end{Vmatrix} \qquad (6)$$

gdje su:

$$a = 1 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \qquad (7)$$
$$b = 1 - s_1^2 - s_2^2 - s_3^2$$

U praktičnom primjeru matrica T (6) glasi:

$$T = +0{,}999578 \begin{Vmatrix} +0{,}999688 & -0{,}038138 & -0{,}003522 \\ +0{,}038082 & +0{,}999586 & -0{,}014926 \\ +0{,}004116 & +0{,}014782 & +1{,}000304 \end{Vmatrix}$$

Odnosno, u definitivnom obliku:

$$T = \begin{Vmatrix} +0{,}999266 & -0{,}038122 & -0{,}003520 \\ +0{,}038066 & +0{,}999164 & -0{,}014920 \\ +0{,}004114 & +0{,}014776 & +0{,}999882 \end{Vmatrix} \qquad (8)$$

Moguće je izvršiti kontrolu formiranja matrice rotacije. Ako definitivnu matricu rotacije T predstavimo u obliku:

$$T = \begin{Vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_4 & m_5 & m_6 \\ m_7 & m_8 & m_9 \end{Vmatrix}$$

tada za nju, budući da posjeduje osobine ortogonalne matrice, vrijede slijedeća pravila:

1 — Suma kvadrata elemenata u svakom redu ili svakoj koloni mora biti jednaka jedinici (1)
Dakle:
$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1,$ ili
$m_1^2 + m_4^2 + m_7^2 = 1,$ itd.

2 — Suma proizvoda elemenata u odgovarajuća dva susjedna reda ili dvije susjedne kolone mora biti jednaka nuli (0).
To znači:
$m_1 \cdot m_4 + m_2 \cdot m_5 + m_3 \cdot m_6 = 0,$ ili
$m_1 \cdot m_2 + m_4 \cdot m_5 + m_7 \cdot m_8 = 0,$ itd.

3 — Kvadrat svakog elementa jednak je kvadratu njegove subdeterminante.
Tj.: $m_1^2 = (m_5 \cdot m_9 - m_8 \cdot m_6)^2$ ili
$m_3^2 = (m_4 \cdot m_8 - m_7 \cdot m_5)^2$ itd.

5 — *ROTACIJA MAŠINSKOG KOORDINATNOG SISTEMA*

Slijedi zatim množenje svedenih i urazmjerenih mašinskih koordinata (x'_n, y'_n i h'_n) sa matricom rotacije T, tj.:

$$\begin{Vmatrix} \bar{Y}_n \\ \bar{X}_n \\ \bar{H}_n \end{Vmatrix} = T \cdot \begin{Vmatrix} x'_n \\ y'_n \\ h'_n \end{Vmatrix} \qquad (9)$$

i vraćanje, preko koordinata težišta na koordinate državnog sistema:

$$Y_{transf.} = \bar{Y}_n + Y_o$$
$$X_{transf.} = \bar{X}_n + X_o \qquad (10)$$
$$H_{transf.} = \bar{H}_n + H_o$$

Vraćajući se numeričkom primjeru, nakon množenja svedenih i urazmjerenih koordinata mašinskog sistema sa matricom rotacije T, tj. nakon operacije (9), situacija je slijedeća:

Tačke	$\bar{Y}$	$\bar{X}$	$\bar{H}$
8	−189,06	+ 2,79	− 9,97
7	+ 94,84	+ 247,56	+ 19,05
2	+ 94,22	−250,34	− 9,07

Primjenom operacija (10) moguće je doći do uvida u kvalitet računa parametara transformacije upoređenjem transformiranih i datih koordinata:

	Y		
	transf.	dato	f_Y
8	3 711,60	3 711,57	−0,03
7	3 995,50	3 995,49	−0,01
2	3 994,88	3 994,91	+0,03
	X		
	transf.	dato	f_X
8	7 250,35	7 250,31	−0,04
7	7 495,12	7 495,11	−0,01
2	6 997,22	6 997,26	+0,04
	H		
	transf.	dato	f_H
8	490,27	490,27	0,00
7	519,29	519,29	0,00
2	491,17	491,17	0,00

Prvi dio u postupku trodimenzionalne linearne transformacije tj. računanje njenih parametara, ovime bi bio završen. Slijedi sada transformacija ostalih tačaka. Drugim riječima, riječima praktičara, prelazi se na određivanje Y, X i H koordinata za sve tačke što su merene na modelu i čije su mašinske koordinate poznate. Mislim da taj dio i nije potrebno u potpunosti i praktično pokazati numeričkim primjerom jer je raniji opis redoslijeda operacija dovoljan. Napominje se da su i za »nepoznate« tačke 6, 9 i 1 koordinate Y, X i H bile poznate pa nije suvišno istaći da su razlike između njihovih novoodređenih i praoih vrijednosti iznosile:

Tačka	f_y	f_x	f_H
6	+0,04	+0,07	+0,04
9	0,00	0,00	+0,04
1	−0,08	+0,06	−0,01

Bilo bi svakako nelogično iz ovog jednog primjera donositi sud o tačnosti koja se ovom metodom postiže. No svakako treba istaći da se uz dobro određenu geodetsku osnovu (date tačke) i odgovarajućom razmjerom snimanja postižu dobri rezultati.

Na kraju treba napomenuti da se prednost primjene trodimenzionalne transformacije ogleda u:

1. Uštedi vremena na stereorestitucionom instrumentu obzirom da se ne izvodi urazmjeravanje i horizontiranje, i
2. Simultanom određivanju Y, X i H koordinata tačaka pri kojoj operaciji dolazi do punog izražaja međuzavisnost merenih mašinskih koordinata x, y i h.