

## O UPOTREBI ELEKTRONTSKIH DALJINOMJERA ZA ODREĐIVANJE ORIJENTACIONIH TAČAKA

*Franjo BRAUM — Zagreb*

**O p ć e n i t o** — Mogućnost da dulje dužine mjerimo brzo i dovoljno tačno, kao što ju pružaju elektronski daljinomjeri, od posebnog je značaja za fotogrametriju. Time je znatno olakšano i ubrzano određivanje orijentacionih tačaka, koje je do sada predstavljalo velik dio troškova u ukupnoj cijeni fotogrametrijskih radova i koje je često zadržavalo restituciju.

Smještaj orijentacionih tačaka je naime u velikoj mjeri uvjetovan propisanim položajem unutar protezanja modela, pri čemu se obično moramo odreći optimalnih uvjeta određivanja. Moramo se zadovoljiti s malo prekobrojnih mjerenja, koja uz to niti ne daju najbolje presjeka. Zahvaljujući spomenutoj mogućnosti svladava se sada problem često pouzdanije i s manje terenskog rada.

Pri tom razlikujemo da li se radi o ravničastom ili brdovitom terenu i da li se zahtjeva krupno ili sitno mjerilo fotogrametrijske izmjere.

Fotogrametrija u sitnom mjerilu izvodi se u pustim predjelima, gdje nema većih električnih uređaja i gdje ne postoji nikakva ili oskudna mreža geodetskih fiksnih tačaka. Uvjeti za organizaciju noćnih opservacija su naročito nepovoljni. Planirane orijentacione tačke leže daleko jedna od druge.

Mjerenje kuteva, potrebno pri triangulaciji za određivanje položaja, je u takvim okolnostima obzirom na teoriju pogrešaka ne samo nepovoljno već i dugotrajno i skupo, jer zahtjeva postavljanje velikih signala i dobru vidljivost.

Naprotiv je pri izmjeri duljina pomoću elektronskih daljinomjera prirast pogrešaka s povećanjem duljine za tu svrhu beznačajan. I druge nagovještene poteškoće otpadaju kod daljinomjera tipa Wild Distomat Di 50, Tellurometar i slično.

Stoga je za određivanje orijentacionih tačaka na širokom prostranstvu u fotogrametriji sitnog mjerila najprikladnija trilateracija opservirana s elektronskim daljinomjerom koji za val nosilac koristi duljinu od cca 3—10 cm. Visine se u ravničastom terenu određuju motoriziranim geometrijskim nivelmanom. U brdovitom terenu visine se određuju trigonometrijskim nivelmanom mjereći kose duljine elektronskim daljinomjerom, a ako su visinske orijentacione tačke previše udaljene od fiksnih tačaka, trigonometrijski se nivelman zamjenjuje barometrijskim.



Drugačije je u fotogrametriji krupnog mjerila, gdje su udaljenosti orijentacionih tačaka kraće. Tu je mjerenje kuteva, što se tiče određivanja položaja, povoljno u smislu teorije pogrešaka, ali ono samo često ne dostaje za pouzdano određivanje orijentacionih tačaka, jer nam premalo vizura stoje na raspolaganju, a niti te ne daju željene presjeke.

Za tu se svrhu u brežuljkastom i brdovitom terenu kombinira triangulacija s trilateracijom odnosno elektronskim mjerenjem duljina. Visine se određuju trigonometrijskim nivelmanom, koji sada ne zahtjeva više geodetsko određivanje položaja, jer se kose dužine  $d$  direktno mjere. Visinska je razlika  $\Delta h$  određena sa

$$\Delta h = d \cdot \sin \beta$$

gdje je  $\beta$  nagib vizure.

U ravničastom terenu se visine, kao i do sada, određuju geometrijskim nivelmanom, a položaj poligonometrijom, koja međutim sada brže teče, jer su poligone strane duže, čak i po volji duge. Za mjerenje duljina dolaze više do izražaja elektrooptički daljinomjeri, naročito oni »infracrveni«, koji će se uskoro proizvoditi kao dodatak teodolitu (Wild Di 10 T k teodolitu T 2). Ti daljinomjeri daju tačnost od  $\pm 1$  cm, a doseg im je 1 km (Wild Di 10) do 2 km (SM 11, Carl Zeiss Oberkochen).

Treba još naglasiti da elektronsko mjerenje duljina teče brže od mjerenja kuteva i da je, izuzev daljinomjera s valom nosioca iz vidljivog sektora, manje osjetljivo na nepovoljne atmosferske prilike.

Obzirom na manji broj raspoloživih vizura odnosno dužina, možemo istovremeno izračunavanje i izjednačenje svih opservacija zamjeniti pojedinačnim rješenjima (formular 1, sl. 2 i 3). Da bismo mogli kombinirati istovrsna pojedinačna rješenja ili mjerenja duljina težinski kombinirati s mjerenjem kuteva, poželjno je odrediti težine. Izjednačenje potrebno je i zbog toga što uvjeti određivanja nisu optimalni. Pri kvalitetnim mjerenjima, koja je danas sa sekundnim teodolitom i elektronskim daljinomjerom lako postići, za određivanje orijentacionih tačaka potpuno zadovoljavaju i približna izjednačenja, jer ćemo vrlo nepovoljne figure ionako izbjegavati (npr. presjek natrag vizurama koje su raspoređene u uskom sektoru). To će nam olakšavati računanje, i to dakako u mnogo većoj mjeri onda kada se ne koriste elektronski računski strojevi.

Pri određivanju orijentacionih tačaka ne treba inzistirati na brojnim prekobrojnima podacima, međutim ona ipak moraju postojati, iako je u nas praksa često drugačija. Prekobrojni podaci nisu samo potrebni da bi se izjednačenjem postigla veća tačnost, nego i radi toga da na vrijeme otkrijemo grube pogreške i time spriječimo zastoje na skupocijenom stereoinstrumentu.

Istovremeno s elektronskim daljinomjerima sve se više pojavljuju i elektronski računski strojevi. Treba u budućnosti pretpostaviti da će ponuda elektronskog računanja porasti, a time cijena opasti. Kako određivanje orijentacionih tačaka često ne predstavlja masovnu operaciju istog tipa, to će se, barem manji zadaci, još uvijek racionalno izračunavati na mehaničkim i pogotovo na električnim računskim strojevima, koji u velikom broju i dobroj kvaliteti u mnogim pogonima stoje na raspolaganju. To opravdava da se obaziremo na primjenu tih strojeva, pogotovo kod nas, gdje primjena elektronskih računskih strojeva nije uvriježena, ni ekonomski racionalno oblikovana.



U daljnjim razlaganjima provest ćemo u tom smislu teoretsku analizu i prikazati nekoliko racionalnih primjena.

## 1. POJEDINAČNA RJEŠENJA

### 1. 1. Lučni presjek

Pored uobičajenog direktnog rješenja (vidi [3]) ima i iteraciono rješenje koje se na klasičnim računskim strojevima može udobnije i brže izvesti. Izvod se bazira na sl. 1.

$$b = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$

$$db = \frac{\partial b}{\partial x_C} dx_C + \frac{\partial b}{\partial y_C} dy_C = \frac{(x_C - x_A) dx_C + (y_C - y_A) dy_C}{b} \quad (1)$$

Analogno proizlazi:

$$da = \frac{(x_C - x_B) dx_C + (y_C - y_B) dy_C}{a} \quad (1)$$

i nadalje:

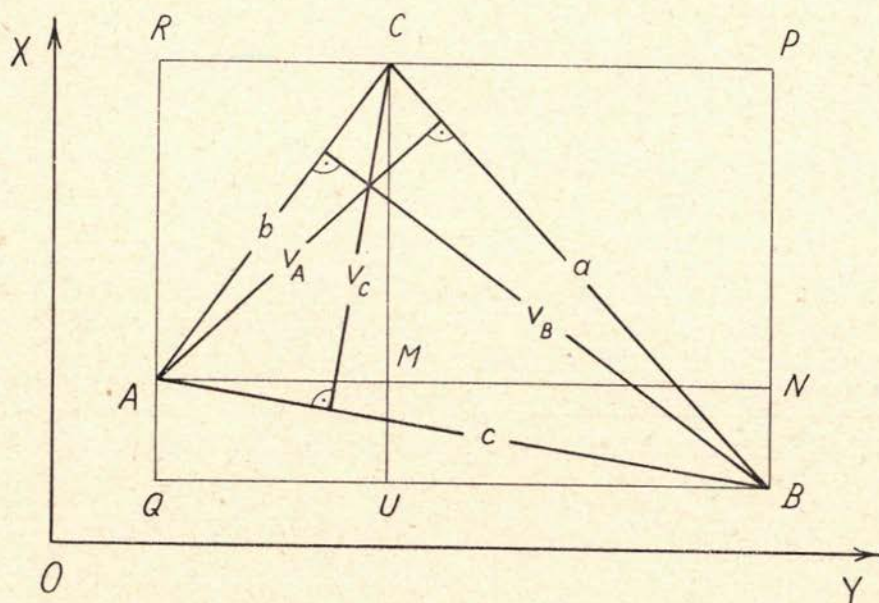
$$b \cdot db = (x_C - x_A) dx_C + (y_C - y_A) dy_C$$

$$a \cdot da = (x_C - x_B) dx_C + (y_C - y_B) dy_C$$

$$dx_C = \frac{(y_C - y_B) b \cdot db - (y_C - y_A) a \cdot da}{(x_C - x_A)(y_C - y_B) - (x_C - x_B)(y_C - y_A) = D}$$

$$dy_C = \frac{(x_C - x_A) a \cdot da - (x_C - x_B) b \cdot db}{D} \quad (2)$$

Slika 1



Značenje determinante D je slijedeće (sl. 1):

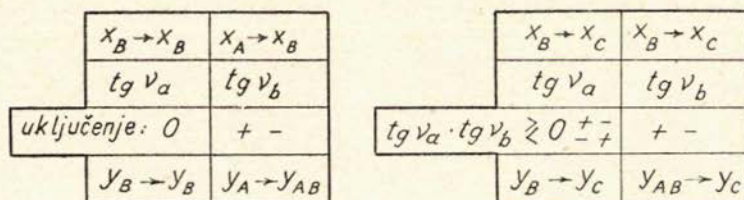
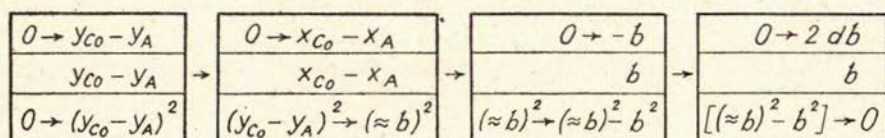
$$\begin{aligned}
 -D &= \square(\text{CPNM}) + \square(\text{RCUQ}) = 2 [\Delta(\text{ACM}) + \Delta(\text{CNM}) + \Delta(\text{AMU})] = \\
 &= 2 [\Delta(\text{ACM}) + \Delta(\text{CBM}) + \Delta(\text{MBA})] = 2 \Delta(\text{ACB}) = a \cdot v_A = \\
 &= b \cdot v_B = c \cdot v_C \quad (3)
 \end{aligned}$$

S tom geometrijskom interpretacijom daju se formule (2) dalje razviti u

$$\begin{aligned}
 dx_C &= -\frac{y_C - y_B}{v_B} db + \frac{y_C - y_A}{v_A} da \\
 dy_C &= -\frac{x_C - x_A}{v_A} da + \frac{x_C - x_B}{v_B} db \quad (4)
 \end{aligned}$$

Veličine  $x_A, x_B, y_A, y_B, a$  i  $b$  su u trilateraciji zadane. Približne koordinate  $x_{C_0}$  i  $y_{C_0}$  možemo očitati sa skice vođene u mjerilu 1:10000 odnosno 1:100000, koja je već radi pregleda poželjna. Ovo očitavanje kao i vođenje takve skice u tim mjerilima je na mm-papiru jednostavno. Izmjerena duljina  $a$  odn.  $b$  zahvati se sa razmjernika šestarom (1 km . . . 1 dm odn. 1 cm), a presjek tih lukova opisanih iz B i A daje položaj određivane tačke C. Visine trokuteva  $v_A$  i  $v_B$  očitavaju se na skali pravokutnog trokuta u naravnoj veličini. Pri svim tim očitanjima nije potrebna preciznost.

Slika 2



Slika 3

Iterativan postupak baziran na formulama (4) prikazan je u formularu 1. Koeficienti iz (4) izračunavaju se logaritmarom, i to jednom za sva ponavljanja. Korekcije  $db$  i  $da$  izračunaju se na računskom stroju najprije iz početnih koordinatnih razlika  $y_{C_0} - y_A$  i  $x_{C_0} - x_A$  odn.  $y_{C_0} - y_B$  i  $x_{C_0} - x_B$ , i to prema shemi prikazanoj na sl. 2. Ta je operacija vrlo jednostavna na električkim računskim strojevima koji su provideni posebnom tipkom za kvadriranje, kao npr. Facit CA 1—13.

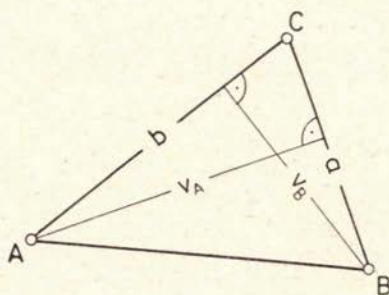
Iz dobivenih korekcija  $db$  i  $da$  sada se logaritmarom izračunaju popravke  $dy_C$  i  $dx_C$  i dodaju dotadanjim koordinatnim razlikama. Dalje slijede ponavljanja sve dok  $db$  i  $da$  ne spadnu na  $\leq 1$  cm. Postupak konvergira vrlo brzo čak i pri većim početnim pogreškama, kao što je vidljivo iz formulara 1, i traje zajedno sa svim očitavanjima sa skice cca 8 minuta po tački.



# ITERATIVNI LUČNI PRESJEK

$Y_{co}$				$X_{co}$				$Y_{co}$				$X_{co}$				$Y_B - Y_A = (Y_{co} - Y_A) - (Y_{co} - Y_B)$													
$Y_A$				$X_A$				$Y_B$				$Y_B$				+ 6 573 82 4													
$Y_{co} - Y_A$				$X_{co} - X_A$				$Y_{co} - Y_B$				$X_{co} - X_B$				$X_B - X_A = (X_{co} - X_A) - (X_{co} - X_B)$													
$\Sigma - dy_c$				$\Sigma - dx_c$				$\Sigma - dy_c$				$\Sigma - dx_c$				- 13 386 95 8													
$Y_c - Y_A$				$X_c - X_A$				$Y_c - Y_B$				$X_c - X_B$				b a													
714	610	00	1	845	080	00	7	714	610	00	1	845	080	00	7	8	035	96	9	453	71								
707	648	40	0	848	977	54	7	714	222	22	4	835	590	59	8	db				da									
+	6	961	60	1	-	3	897	54	0	+					+	387	78	6	+	9	489	41	8	-	57	36	+	43	72
+		41	70	3	-		45	00	0	+					+	41	70	3	-		45	00	0						
+	7	003	30	4	-	3	942	54	0	+					+	429	48	0	+	9	444	41	8	+	0	82	+	0	46
-		1	19	2	-		0	40	4	-					-	1	19	2	-		0	40	4						
+	7	002	11	2	-	3	942	94	4	+					+	428	29	7	+	9	444	01	4	-	0	02	+	0	01
+		0	02	2	-		0	01	1	+					+	0	02	2	-		0	01	1						
+	7	002	13	4	-	3	942	95	5	+					+	428	31	0	+	9	444	00	3	+	0	00	-	0	00

$Y_c$				$X_c$				$Y_c$				$X_c$			
$\frac{X_{co} - X_A}{v_A} da$				$-\frac{Y_{co} - Y_A}{v_A} da$				$A = \Delta 26$				$v_A \quad 7 \quad 200$			
$-\frac{X_{co} - X_B}{v_B} db$				$\frac{Y_{co} - Y_B}{v_B} db$				$B = \Delta 1655$				$v_B \quad 8 \quad 330$			
$v_{yc} = -dy_c$				$v_{xc} = -dx_c$				$C = \circ 30$							
-	0	541	da	-	0	967	da								
-	1	140	db	+	0	047	db								
-	23	60	2	-	42	30	0								
+	65	30	5	-	2	70	0								
+	41	70	3	-	45	00	0								
-	0	25	7	-	0	44	8								
-	0	94	4	+	0	04	4								
-	1	19	2	-	0	40	4								
-	0	005		-	0	010									
+	0	023		-	0	001									
+	0	02	2	-	0	01	1								



ALOGARITAMSKI PROGRAM ZA ITERATIVNI LUCNI PRESJEK

(1) = b	(28) = (27) <sup>2</sup> = da <sup>2</sup>
(2) = a	(28') $\left( \frac{(23) \leq (9)}{\quad} \right) - ne \rightarrow E(30)$
(3) = y <sub>A</sub>	
(4) = x <sub>A</sub>	da
(5) = y <sub>B</sub>	(29) = (23) <sup>2</sup> = db <sup>2</sup>
(6) = x <sub>B</sub>	(29') $\left( \frac{(29) \leq (9)}{\quad} \right) - da \rightarrow E(41)$
(7) = v <sub>A</sub>	
(8) = v <sub>B</sub>	ne
(9) = δa <sup>2</sup> = δb <sup>2</sup>	(30) = (17) : (7) = (x <sub>Co</sub> - x <sub>A</sub> ) : v <sub>A</sub>
(tolerancija <sup>2</sup> )	(31) = (16) : (7) = (y <sub>Co</sub> - y <sub>A</sub> ) : v <sub>A</sub>
(10) = (1) <sup>2</sup> = b <sup>2</sup>	(32) = (19) : (8) = (x <sub>Co</sub> - x <sub>B</sub> ) : v <sub>B</sub>
(11) = 2 (1) = 2b	(33) = (18) : (8) = (y <sub>Co</sub> - y <sub>B</sub> ) : v <sub>B</sub>
(12) = (2) <sup>2</sup> = a <sup>2</sup>	(34) = (30) (27)
(13) = 2 (2) = 2a	(35) = (32) (23)
(14) = y <sub>Co</sub>	(36) = (34) - (35) = - dy <sub>C</sub>
(15) = x <sub>Co</sub>	(36 <sub>1</sub> ) = (36) + (14) => (14) ; (36) => (36)
(16) = (14) - (3) = y <sub>Co</sub> - y <sub>A</sub>	(36 <sub>2</sub> ) = (36) + (16) => (16) ; (36) => (36)
(17) = (15) - (4) = x <sub>Co</sub> - x <sub>A</sub>	(36 <sub>3</sub> ) = (36) + (18) => (18)
(18) = (14) - (5) = y <sub>Co</sub> - y <sub>A</sub>	(37) = (31) (27)
(19) = (15) - (6) = x <sub>Co</sub> - x <sub>B</sub>	(38) = (33) (23)
(20) = (16) <sup>2</sup> = (y <sub>Co</sub> - y <sub>A</sub> ) <sup>2</sup>	(39) = - (37) + (38) = - dx <sub>C</sub>
(21) = (17) <sup>2</sup> = (x <sub>Co</sub> - x <sub>A</sub> ) <sup>2</sup>	(39 <sub>1</sub> ) = (39) + (15) => (15) ; (39) => (39)
(22) = (20) + (21) - (10)	(39 <sub>2</sub> ) = (39) + (17) => (17) ; (39) => (39)
(23) = (22) : (11) = db	(39 <sub>3</sub> ) = (39) + (19) => (19)
(24) = (18) <sup>2</sup> = (y <sub>Co</sub> - y <sub>B</sub> ) <sup>2</sup>	(40) = E (20)
(25) = (19) <sup>2</sup> = (x <sub>Co</sub> - x <sub>B</sub> ) <sup>2</sup>	(41) = (14) => y <sub>C</sub>
(26) = (24) + (25) - (12)	(42) = (15) => x <sub>C</sub>
(27) = (26) : (13) = da	(stop)



Kako visine trokuta i približne koordinate računane tačke možemo na opisani način očitati bez ikakvih poteškoća, to taj iterativni postupak možemo upotrijebiti i za elektronski računski stroj prema dijagramu prikazanom na str. 88.

## 1.2. PRESJEK NAPRIJED

Presjek naprijed može se vrlo lako izračunati na dvostrukom računskom stroju prema postupku prikazanom na sl. 3 (vidi detaljnije u [1]). Presjek natrag možemo pomoću Collinsove tačke (sl. 6) svesti na dva presjeka naprijed (vidi detaljnije u [3]).

## 2. IZJEDNACENJE

Bilo bi pogrešno uzeti kao mjeru za tačnost srednju položajnu pogrešku tačke, jer omjer srednjih pogrešaka za  $x$  i  $y$  može biti vrlo velik odnosno vrlo malen, što je naročito evidentno iz slučaja prikazanog na sl. 10. Stoga ćemo ispitati i odrediti srednje pogreške za  $x$  i  $y$ .

### 2.1. LUCNI PRESJEK

Iz formula (2) i (3) proizlaze srednje pogreške koordinata (sl. 1 i 4) :

$$\begin{aligned} dy_C &= -\frac{x_C - x_A}{b} \frac{a}{v_B} da + \frac{x_C - x_B}{a} \frac{b}{v_A} db = \\ &= \frac{v_B}{c_{By}} \frac{a}{v_B} + \frac{v_A}{c_{Ay}} \frac{b}{v_A} = a_{1y} da + b_{1y} db \end{aligned} \quad (5)$$

pri čemu su  $a_{1y}$  i  $b_{1y}$  (sl. 4) strane trokuta izražene u jedinici »1« čiji se vrh nalazi u C, čije strane  $a_{3y}$  i  $b_{1y}$  leže u pravcima  $a$  odn.  $b$  i čija je treća strana jednaka  $c_{1y} = »1«$ , a teče paralelno s  $y$ . Nadalje treba primjetiti da grafičke duljine  $a_{1y}$ ,  $b_{1y}$ ,  $a_{1x}$ ,  $b_{1x}$  iz formule (5), kao i kasnije iz formule (6), dobivaju svoj predznak prema pripadnim grafičkim duljinama  $c_{By}$ ,  $c_{Ay}$ ,  $c_{Bx}$  i  $c_{Ax}$  iz kojih su izvedene. Predznak potonjih dužina  $c_{By} \dots$  označen je na sl. 4. On se ravna prema indeksnoj oznaci  $y$  odn.  $x$ . Teče li npr. dužina  $c_{By}$  na sl. 4 u protivnom smjeru od osi  $Y$  to je ona negativna. Naravno da su  $da$  i  $db$  pozitivni pri produženju dužina  $a$  odn.  $b$ .

Analogno sa (5) imamo prema (2), (3) i sl. 1 i 4:

$$\begin{aligned} dx_C &= -\frac{y_C - y_B}{a} \frac{b}{v_A} db + \frac{y_C - y_A}{b} \frac{a}{v_B} da = \frac{v_A}{c_{Ax}} \frac{b}{v_A} db + \frac{v_B}{c_{Bx}} \frac{a}{v_B} da = \\ &= \frac{b}{c_{Ax}} db + \frac{a}{c_{Bx}} da = b_{1x} db + a_{1x} da \end{aligned} \quad (6)$$

Iz usporedbe (4) sa (5 i 6) proizlazi da se izračunavanje koeficijenata  $-(x_C - x_A) : v_A$  i dr., predviđeno u formularu 1, dađe nadomjestiti očitanjem grafičkih veličina  $a_{1y}$ ,  $b_{1y}$ ,  $b_{1x}$  i  $a_{1x}$  (sl. 4). To je i uputno ako ćemo te veličine trebati pri izjednačenju. Nadomještavanje u obrnutom smislu moguće je pri izjednačenju.

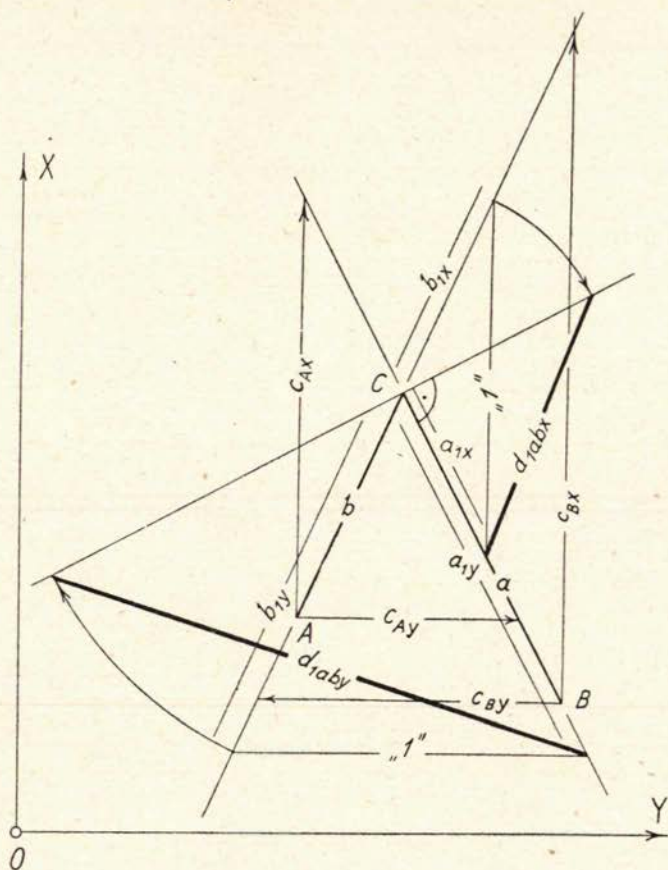
Ako za srednju pogrešku duljine smijemo pretpostaviti

$$m_a \approx m_b \approx \frac{1}{2} (m_a + m_b) = m_{ab} \quad (7)$$

što je pri elektronskom određivanju duljina praktički dozvoljeno i za prilično velike razlike duljina  $a$  i  $b$ , to iz (5) proizlazi slijedeća ordinatna pogreška.

$$m_{yc} \approx m_{ab} \cdot \sqrt{a^2_{1y} + b^2_{1y}} = m_{ab} \cdot d_{1aby} \quad (8)$$

$$m_x \approx m_{ab} \sqrt{b^2_{1x} + a^2_{1x}} = m_{ab} \cdot d_{1abx} \quad (9)$$



Slika 4

ri čemu je  $m_{ab}$  srednja pogreška za duljinu  $\frac{1}{2}(a + b)$  i upotrebljen daljinomjer, dok je konstrukcija za  $d_{1aby}$  odn.  $d_{1abx}$  prikazana na sl. 4. Ta je veličina izražena u »1« — jedinicama (npr. »1« = 1 dm).

Zelimo li postupiti numerički, kao npr. na elektronskom računskom stroju, ne treba koeficijente u formuli (5) konstruirati grafički već izraziti numerički. Tada formulu (5) upotrebimo u obliku:

$$dy_c = \frac{a}{c_{By}} da + \frac{b}{c_{Ay}} db \quad (5a)$$

$$dx_c = \frac{b}{c_{Ax}} db + \frac{a}{c_x} da \quad (6a)$$



pri čemu veličine  $c_{Ay} \dots$  dobivamo na osnovu sl. 4:

$$c_{Ay} = \frac{x_C - x_A}{x_C - x_B} (y_B - y_C) + (y_C - y_A) \quad (10)$$

$$c_{By} = (y_C - y_B) + \frac{x_C - x_B}{x_C - x_A} (y_A - y_C) \quad (11)$$

$$c_{Ax} = (x_C - x_A) + \frac{y_C - y_A}{y_C - y_B} (x_B - y_C) \quad (12)$$

$$c_{Bx} = \frac{y_C - y_B}{y_C - y_A} (x_A - x_C) + (x_C - x_B) \quad (13)$$

Uz pretpostavku (7) prelaze (5a) i (6a) u

$$m_{yC} = m_d \sqrt{\left(\frac{a}{c_{By}}\right)^2 + \left(\frac{b}{c_{Ay}}\right)^2} \quad (14)$$

$$m_{xC} = m_d \sqrt{\left(\frac{b}{c_{Ax}}\right)^2 + \left(\frac{a}{c_{Bx}}\right)^2} \quad (15)$$

## 2.2. PRESJEK NAPRIJED

Srednje koordinatne pogreške možemo prema sl. 5 odrediti vrlo jednostavno grafičkim rezoniranjem, pri čemu treba imati na umu da je

$$CC' = \frac{b}{x - x_A} b \cdot dv_b$$

Iz sl. 5 i analogije proizlazi tada neposredno:

$$dx_C = -\frac{b^2}{c_{Ay}} dv_b - \frac{a^2}{c_{By}} dv_a \quad (16)$$

Na tom geometrijskom odnosu temelji se i poznata fotogrametrijska formula  $dh = (h_g : b) dp_x$  pri čemu se, npr. kod prvog člana od (16),  $dh$ ,  $h_g$ ,  $b$  i  $dp_x$  zamjenjuju sa

$$dx_C, x_C - x_A, c_{Ay} \text{ i } CC'.$$

Ako koeficiente iz (16) zamijenimo grafičkom vrijednosti dobivenom iz sl. 5, slijedi

$$dx_C = -t_{Ay} dv_b - t_{By} dv_a \quad (16a)$$

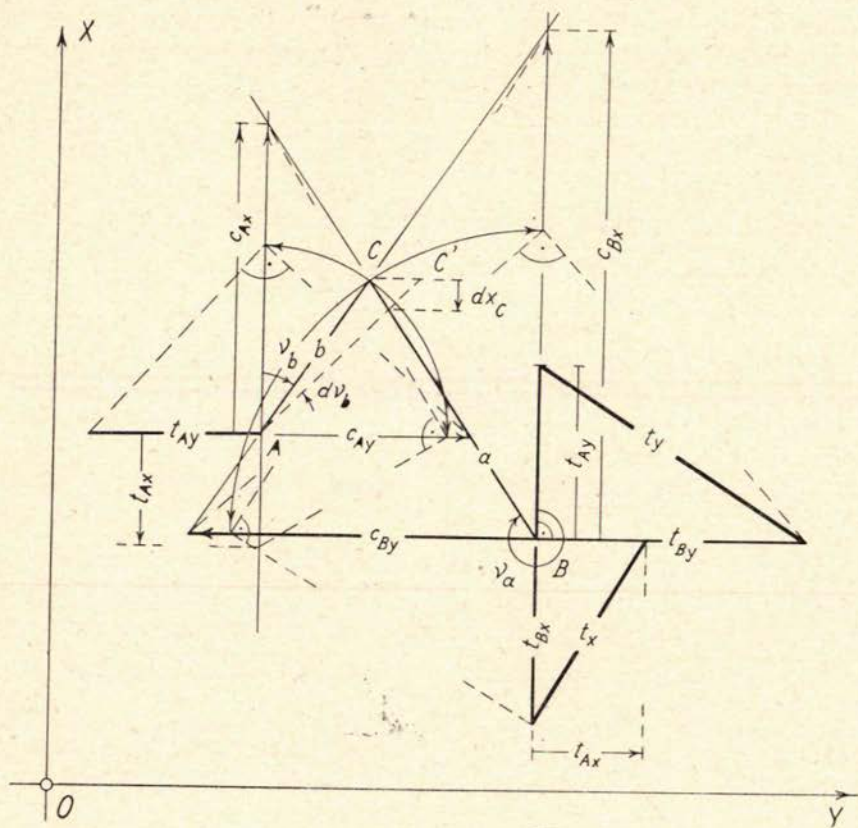
te analogno:

$$dy_C = \frac{b^2}{c_{Ax}} dv_b + \frac{a^2}{c_{Bx}} dv_a \quad (17)$$

$$dy_C = t_{Ax} dv_b + t_{Bx} dv_a \quad (17a)$$

Kod formula (16), (16a), (17) i (17a), slično kao i kod formula (5) i (6), treba upozoriti na slijedeće:

Kao što je naznačeno na sl. 5, grafičke dužine  $c_{Ay}$ ,  $c_{By}$ ,  $c_{Ax}$ ,  $c_{Bx}$  imaju svoj predznak, koji se ravna, u suglasnosti s odgovarajućim smjerovima ko-



Slika 5

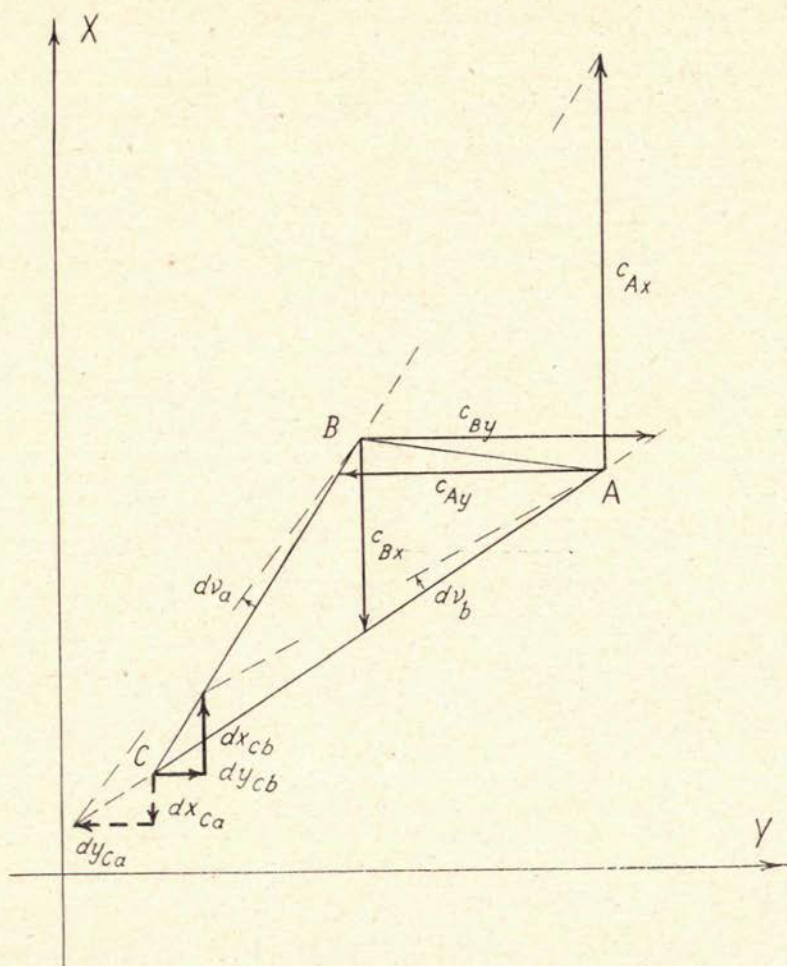
ordinatnih osi X odn. Y, prema indeksnoj oznaci x odn. y. Prema njima imaju predznak i odgovarajuće konstruirane dužine  $t_{Ay}$ ,  $t_{By}$ ,  $t_{Ax}$ , i  $t_{Bx}$ , koje se pojavljuju u (16a) i (17a). Promatrajući prema naprijed presjecanoj tački C bit će, analogno s lučnim presjekom (sl. 4), A lijeva, a B desna fiksna tačka (sl. 5). Navedeno pravilo važi općenito za sve konstelacije, kao npr. i za onu prikazanu na sl. 5a. Promjene smjera  $dv_a$  i  $dv_b$  su pozitivne u smjeru kretanja kazaljke na satu, dok su a i b uvijek pozitivni.



S formulama (16a — 17a) određene su i srednje koordinatne pogreške:

$$m_{yC} = \sqrt{l_{Ax}^2 \Pi^2 \cdot b + l_{Bx}^2 \Pi^2 \cdot v_a} \quad (18)$$

$$m_{xC} = \sqrt{l_{Ay}^2 m^2 v_b + l_{By}^2 m^2 v_a} \quad (19)$$



Slika 5a

Mi međutim smijemo staviti

$$m_{va} = m_{vb} = m_v \quad (20)$$

čime (18) i (19) daju prema sl. 5

$$m_{yC} = m_v \sqrt{l_{Ax}^2 + l_{Bx}^2} = t_x \cdot m_v \quad (21)$$

$$m_{xC} = m_v \sqrt{l_{Ay}^2 + l_{By}^2} = t_y \cdot m_v \quad (22)$$

Za posve numerički postupak prevedimo (16) i (17) na temelju sinusnog poučka u obliku (sl. 5):

$$dx_C = -b \cdot dv_b \frac{\cos v_a}{\sin(v_b - v_a)} + a \cdot dv_a \frac{\cos v_b}{\sin(v_b - v_a)} \quad (23)$$

$$dy_C = -b \cdot dv_b \frac{\sin v_a}{\sin(v_b - v_a)} + a \cdot dv_a \frac{\sin v_b}{\sin(v_b - v_a)} \quad (24)$$

To uz pretpostavku (20) daje

$$m_{x_C} = \frac{mv}{\sin(v_b - v_a)} \sqrt{b^2 \cos^2 v_a + a^2 \cos^2 v_b} \quad (25)$$

$$m_{y_C} = \frac{mv}{\sin(v_b - v_a)} \sqrt{b^2 \sin^2 v_a + a^2 \sin^2 v_b} \quad (26)$$

pri čem treba staviti (već prema tome da li je  $|\cos v| >$  ili  $<$  od  $|\sin v|$ ).

$$b = \frac{x_C - x_A}{\cos v_b} \text{ ili } \frac{y_C - y_A}{\sin v_b} \quad \text{i} \quad a = \frac{x_C - x_B}{\cos v_a} \text{ ili } \frac{y_C - y_B}{\sin v_a}$$

Iz formule (26 i 27) proizlazi jednostavan izraz za položajnu pogrešku:

$$m = \sqrt{m_{x_C}^2 + m_{y_C}^2} = \frac{mv}{\sin(v_b - v_a)} \sqrt{b^2 + a^2} \quad (27)$$

### 2. 3. Presjek natrag

Presjek natrag daje se pomoću Collinsove tačke C (sl. 6 i [3]) svesti na dva presjeka naprijed. U svrhu teorije pogrešaka dovoljno je promatrati prvi presjek naprijed, za koji se srednje pogreške  $m_x$  i  $m_y$  za Collinsovu tačku dadu odrediti na osnovu formula (21 i 22). Srednje pogreške za određivanu tačku P dobivamo interpolacijom ili ekstrapolacijom:

$$m_x = \frac{T_3P}{T_3C} m_{x_C} \quad m_y = \frac{T_3P}{T_3C} m_{y_C} \quad (28)$$

Iz toga se vidi da su figure određivanja s  $T_3P : T_3C > 1$  u smislu teorije pogrešaka nepovoljne i obrnuto.

Srednje pogreške  $m_a$ ,  $m_b$ ,  $m_{ab}$  u formulama (6—9), kao i  $mv$  u (19—21), su iznosi koji vrijede za kvalitetu upotrebljenih instrumenata i oni trebaju biti poznati iz iskustva ili iz podataka proizvodne firme. Pripadne su težine, kao što je poznato, obrnuto proporcionalne kvadratu srednje pogreške, tako da opću aritmetičku sredinu možemo, posebno za  $x$  i  $y$ , formirati iz svih presjeka (presjek naprijed, natrag i lučni presjek).

Kod pojedinačnih rješenja treba od prekobrojnih podataka koristiti povoljnije kombinacije, a ostale zavisne kombinacije isključiti.

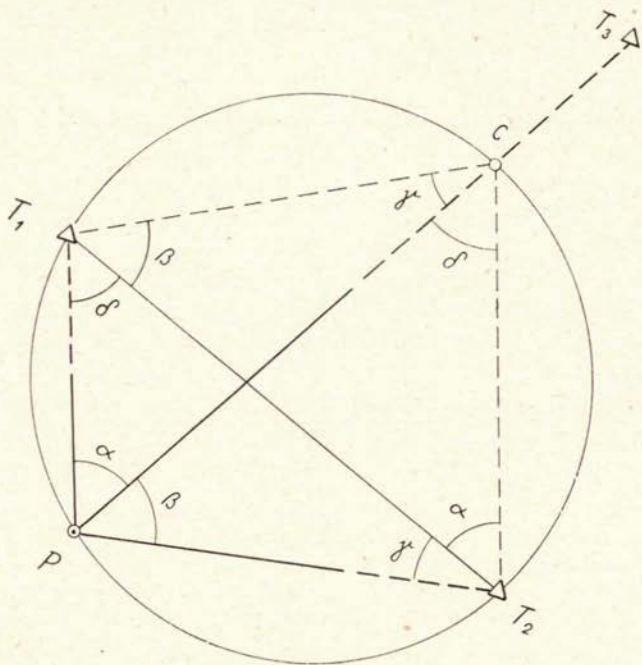


### 3. NEKE PRIMJENE

Pomoću elektronskih daljinomjera pružaju se nove mogućnosti, a neki do sada neupotrebivi slučajevi daju se dotjerati do pouzdanih rješenja. Na sl. 7—12 prikazane su neke primjene kod kojih s vrlo malo mjerenja postizavamo zadovoljavajuću pouzdanost, što mnogo doprinosi ekonomičnosti i tempu u određivanju orijentacionih tačaka.

#### 3.1. Polarno određivanje

Spomenimo pri tome i mogućnost da neku orijentacionu tačku D odredimo iz udaljene poznate tačke A polarno (sl. 7). To predstavlja doduše najjednostavniji slučaj određivanja, ali istovremeno i najmanje pouzdan između svih ovdje prikazivanih slučajeva. S većom udaljenosti orijentacione tačke treba dakako i smjer biti određen pouzdanije nego što je to inače potrebno za (bliži) ekscentrični signal.



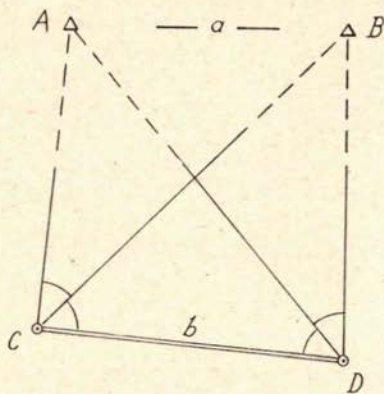
Slika 6

#### 3.2. Hansenov zadatak

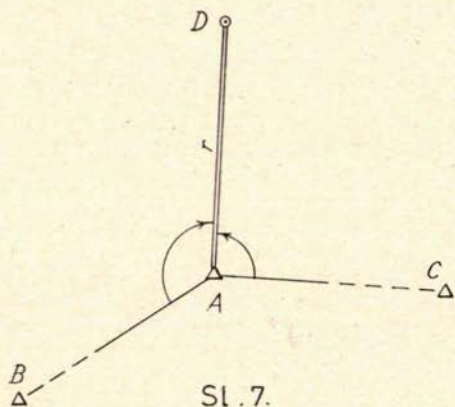
Ovaj zadatak iziskuje vrlo malo terenskog rada. Dvije orijentacione tačke mogu se odrediti mjerenjima sa samo tih dviju orijentacionih tačaka.

Kod Hansenovog zadatka orijentiraju se obzirom na bazu  $CD = b$  pramenovi zraka mjerenih sa traženih orijentacionih tačaka C i D prema zadanim tačkama A i B kao i prema drugoj traženoj tački D odn. C. Međusobna ori-

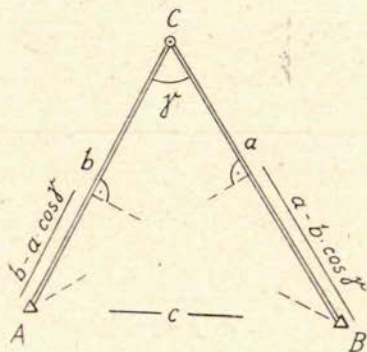
jentacija pramenova izvrši se prema samo jednoj (uzajamnoj) vizuri CD odn. DC. To u smislu teorije pogrešaka nije povoljno, te može lako doći do pogrešne konvergencije pramenova. Ta utječe na mjerilo dužine određene dvjema fiksnim tačkama presjecanim naprijed, i to, kod poželjnih figura određivanja, po prilici u istom iznosu kao i na mjerilo udaljenosti orijentacionih do fiksnih tačaka (formula (12) u [2]).



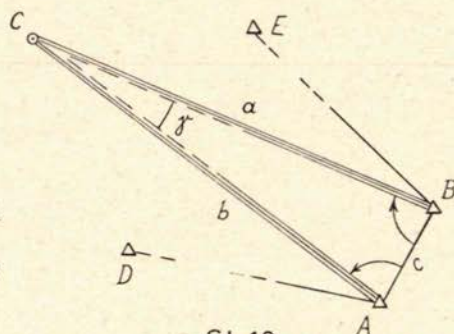
Sl. 8.



Sl. 7.



Sl. 9.



Sl. 10.

△ fiksne tačke  
 ○ orijentacione tačke  
 — mjerena duljina

Ako uz to odredimo i duljinu između orijentacionih tačaka elektronskim daljinomjerom, kao što je naznačeno na sl. 8, to možemo u presjecanju naprijed poći odmah tako rekuć u mjerilu 1 : 1, pa izračunate koordinate fiksnih tačaka A i B moraju dati zadanu dužinu a. Za ovo presjecanje uzmemo svrsishodno koordinatni sistem s ishodištem u orijentacionoj tački C i X — smjerom u pravcu orijentacione dužine CD.



Rezultirajuća nesuglasica:

$$\Delta a = a_{\text{rač}} - a_{\text{dano}} \quad (29)$$

pripisuje se djelomično pogrešci mjerene duljine  $b$ , a još više pogrešci konvergencije pramenova zraka mjerenih iz C i D.

Zamislimo za početak takav koordinatni sistem  $\bar{s} \bar{\eta}$  u kojem je dužina između zadanih tačaka A i B paralelna  $s \bar{\eta}$  i konstruirajmo za taj sistem veličine  $t_{A\bar{s}}$  i  $t_{B\bar{s}}$  (sl. 5). Pogrešku usmjeravanja pramena izrazimo sa:

$$dv_C = \delta v_p + \delta v_k \quad (30)$$

$$dv_D = \delta v_p - \delta v_k$$

$$\delta v_p = \frac{dv_C + dv_D}{2}$$

$$\delta v_k = \frac{dv_C - dv_D}{2} \quad (31)$$

Pri poželjnom obliku figure određivanja, kao što je po prilici prikazano na sl. 8. zakretaj zadane dužine  $a$  prouzročen je u prvom redu komponentom zjediničkog (paralelnog) zakretaja  $\delta v_p$  (vidi (18) u [2]), dok na mjerilo prvenstveno djeluje komponenta konvergencije  $\delta v_k$ .

Za pogrešku izračunate duljine  $a$  dobijemo prema (17a)

$$\begin{aligned} \delta a &= d\bar{r}_a = (t_{BC\bar{s}} - t_{BD\bar{s}}) \delta v_k - (t_{AC\bar{s}} - t_{AD\bar{s}}) \delta v_k = \\ &= [(t_{BC\bar{s}} - t_{BD\bar{s}}) + (t_{AC\bar{s}} - t_{AD\bar{s}})] \delta v_k = t_k \delta v_k \end{aligned} \quad (32)$$

Isto tako dobili bi za zakretaj  $\delta \varepsilon$  prema (16a):

$$\delta \varepsilon = \frac{1}{a} [(t_{BD\bar{\eta}} + t_{BC\bar{\eta}}) - (t_{AD\bar{\eta}} - t_{AC\bar{\eta}})] \delta v_p = \frac{1}{a} t_p \delta v_p \quad (33)$$

To nas međutim tom prilikom ne interesira, jer se od dužine  $b$  mjeri samo njena duljina, a ne smjer.

Srednja pogreška mjerene baze  $b$  neka je  $m_b$ . Ona ovisi o kvaliteti upotrebljenog daljinomjera i neka je ona poznata. Iz (30—31) proizlazi:

$$m_{v_k} = \frac{m_v}{\sqrt{2}} = m_{v_p} \quad (34)$$

Pogreška mjerene duljine  $\delta b$  i konvergencije (lijevog) pramena  $\delta v_k$  su raznovrsne i jedna od druge neovisne. Očekujući njihov malen iznos pretpostavit ćemo da one djeluju u istom smislu u stvaranju nesuglasice  $\Delta a$  (29), pa ćemo prema (32) dobiti:

$$\Delta a = t \delta v_k + \frac{a}{b} \delta b \quad (35)$$

$$\text{sgn}(t_k \delta v_k) = \text{sgn} \delta b = \text{sgn}(\Delta a)$$

Za apsolutni iznos od  $\delta b$  uzmimo apsolutnu vrijednost srednje pogreške elektronskog daljinomjera pri duljini  $b$ , koja je pogreška poznata ili po po-

datku proizvodne firme ili iz iziskustva, pa iz (35) možemo odrediti popravku konvergencije lijevog pramena smjerova  $v_{vk}$ .

$$-v_{vk} = \delta v_k = \frac{\Delta a - \frac{a}{b} \delta_b}{t_k} \quad (36).$$

Budući da utjecaj konvergencije svakako ovisi o figuri određivanja (sl. 8), ali ne o smjernom kutu zadane dužine  $a$ , to taj postupak važi ne samo za pretpostavku  $a$  paralelno s  $\bar{n}$  ili  $y$ , već i općenito.

Udaljenjem tretiranju ćemo radi jednostavnosti mjerenu duljinu pretpostaviti bespogrešnom. Za iznos tačnosti dobiven od proizvodnih firmi za elektronske daljinomjere ta je pretpostavka u velikoj mjeri i opravdana. Tom pretpostavkom formula (36) prelazi u

$$v_{vk} = -\frac{\Delta a}{t_k}$$

Vrijednost (36) odn. (36a) smjela bi poprimiti najviše dvostruki iznos od (34).

Drugačiji omjer smjerne prema duljinskoj tačnosti ne mjenja postupak principijelno, samo što  $v_{vk}$  neće biti određen po formuli (36a) već po (36).

Tretiranje takvog slučaja možemo izostaviti.

Sada zrake koje iz C smjeraju prema fiksnim tačkama korigiramo za  $v_{vk}$ , a one iz D za  $-v_{vk}$ , pa se presjecanje naprijed fiksnih tačaka A i B ponovi. Pri određivanju elemenata transformacije treba multiplikaciona konstanta biti toliko blizu jedinici da se odstupanje od toga može zanemariti (u ovisnosti o udaljenosti orijentacionih od fiksnih tačaka). To odmah služi i kao numerička kontrola za presjek naprijed. Koordinate orijentacionih tačaka dobivene transformacijom trebaju dati mjerenu duljinu  $b$ , što pak služi kao kontrola transformacije.

### 3.3. Primjena cosinusovog stavka

S vrlo malo terenskog rada može se savladati i slučaj prikazan na sl. 9. Ako kut  $\gamma$  mjerimo sekundnim teodolitom u cca 6 girusa, možemo izmjerenu vrijednost u daljnjem smatrati praktički bespogrešnom. Pri tom mjernom rasporedu možemo duljine  $a$  i  $b$  mjeriti neposredno jednu za drugom. Pri udaljenostima do cca 2 km su topografski (zemlja ili voda) i atmosferski (vlaga) uvjeti u smjeru obiju dužina redovito slični, pa očekujemo i isti predznak dotičnih mjernih pogrešaka  $-v_a$  i  $-v_b$ . Omjer apsolutnih vrijednosti odredimo, u ovisnosti o duljini, prema formuli za srednju pogrešku upotrebljenog daljinomjera, čime možemo  $v_b$  izraziti pomoću  $v_a$ . Duljinu  $c$  možemo izračunati po cosinusovom stavku

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \quad (37),$$

a iz toga

$$2c\Delta c = -2a \cdot v_a - 2b \cdot v_b + (v_a b + v_b a) 2 \cos \gamma$$

$$\Delta c = -\frac{1}{c} [(a - b \cos \gamma) v_a + (b - a \cos \gamma) v_b] \quad (38),$$



pri čem je  $\Delta c$  razlika između vrijednosti izračunate po (37) i zadane vrijednosti. Iznos članova u okruglim zagradama možemo očitati neposredno sa skice (sl. 9). Pri elektronskom mjerenju duljina smjet ćemo za prilično velike razlike  $a-b$  staviti

$$|v_a| \approx |v_b| \approx |v_d|,$$

čime (38) prelazi u

$$v_d = \frac{-c \Delta c}{(a - b \cos \gamma) + (b - a \cos \gamma)} \quad (39).$$

Sada se s korigiranim duljinama  $a + v_a$  i  $b + v_b$  izračuna sa zadanih tačaka B i A lučni presjek i time odrede koordinate orijentacione tačke C.

Prema formulama (38—39) pretpostavka istog predznaka za  $v_a$  i  $v_b$  daje pri željenom obliku trokuta ABC (sl. 9) i manje apsolutne iznose korekcija.

### 3.4. Siljat presjek

Orijentaciona tačka C (sl. 10) ne da se odrediti presjecanjem naprijed iz zadanih tačaka A i B, jer njezin položaj duž nutarnje simetrale kuta  $\gamma$  ostaje nepouzdan. Ne zadovoljava niti lučni presjek, jer u tom slučaju položaj pliva u smjeru vanjske simetrale kuta  $\gamma$ . Presjek naprijed i lučni presjek zajedno određuju međutim pouzdano položaj kako nutarnje, tako i vanjske simetrale od  $\gamma$ , a one u svom presjeku osiguravaju dobru tačnost za položaj tačke C. određen s koordinatima  $y_{Cv}$ ,  $x_{Cv}$  ( $y_{Cb}$ ,  $x_{Cb}$ ), koje su dobivene presjecanjem naprijed (lučnim presjekom), po jedan pravac u smjeru nutarnje (vanjske) simetrale:

Općenito možemo koordinate dobivene iz presjeka naprijed i lučnog presjeka izjednačiti, pri čemu se težine određuju na temelju formula (8), (9) i (21—22). Ako je međutim kut  $\gamma$  vrlo uzak, tako da niti lučnom presjeku možemo pridati neku težinu u određivanju nutarnje simetrale kuta  $\gamma$ , niti presjeku naprijed u određivanju vanjske simetrale, tada položimo kroz položaj

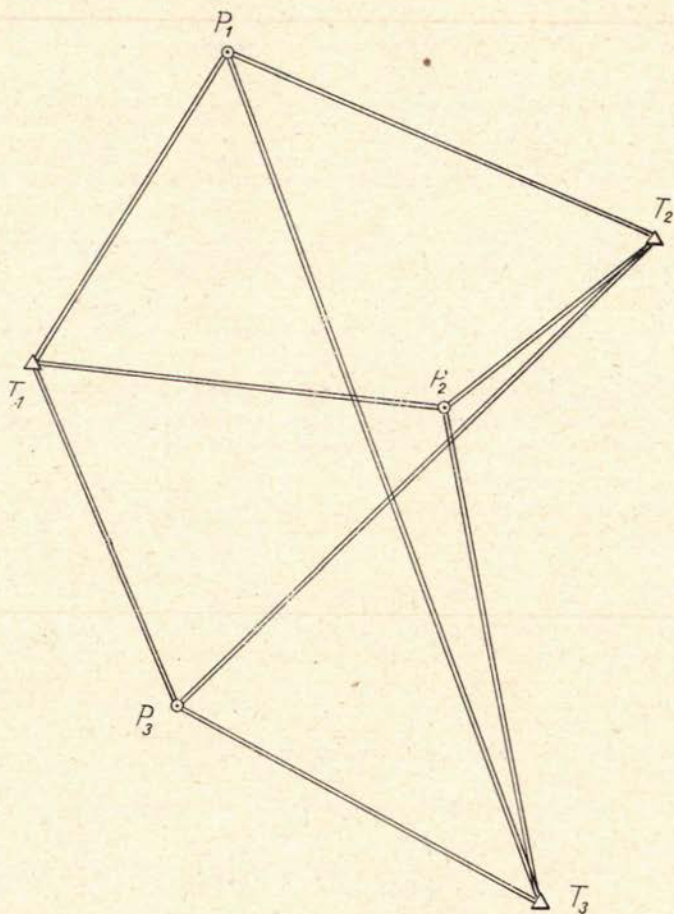
$$\begin{aligned} y - y_{Cv} &= \operatorname{tg} \left[ \frac{1}{2} (v_{ACv} + v_{BCv}) \right] (x - x_{Cv}) \\ y - y_{Cb} &= \frac{-1}{\operatorname{tg} \left[ \frac{1}{2} (v_{ACv} + v_{BCv}) \right]} (x - x_{Cb}) \end{aligned} \quad (40)$$

Rješenje od (40) daje približno izjednačene koordinate orijentacione tačke C.

### 3.5. Progušćavanje mreže orijentacionih tačaka na širokom prostranstvu

Ako se radi o prostranim ploštinama na kojima treba odrediti orijentacione tačke za fotogrametrijsko kartiranje u sitnom mjerilu, to je trilateracija sa širokim oknima, kao što je prikazano na sl 11, prikladno rješenje. Ona je tada i ekonomična i dovoljno tačna. Izjednačenje pojedinačnih rješenja otpada ako se rezultati u dovoljnoj mjeri slažu ili ako su težine približno jednake, u kojim se slučajevima zadovoljavamo običnom aritmetičkom sredi-

nom. Izjednačenje je naročito onda potrebno ako se sa dotičnih novih tačaka namjerava progustiti mrežu ili na njih priključiti i nadovezati novu mrežu orijentacionih tačaka.



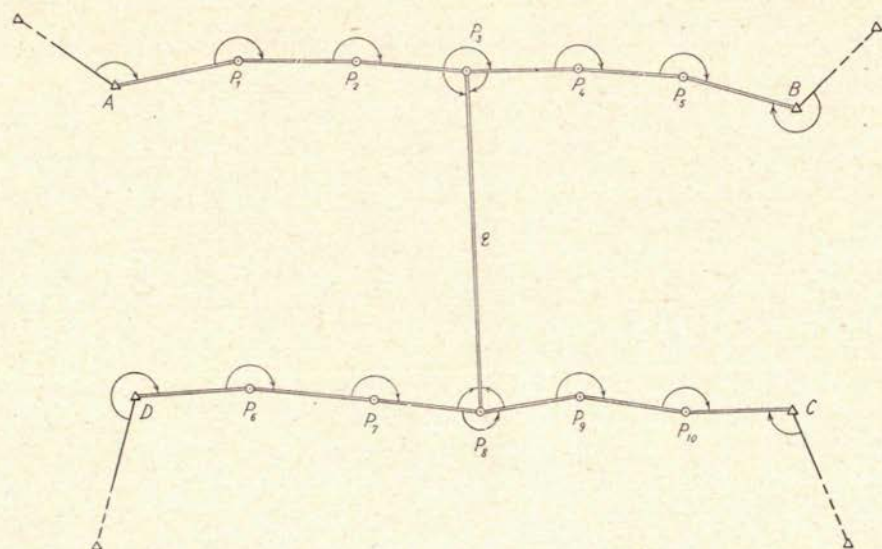
Slika 11

### 3.6. Primjena u poligonometriji

U ravničastom terenu upućuje problem određivanja orijentacionih tačaka, koje želimo imati smještene prema svakom uglu modela, da uzduž oba uzdužna ruba poteza obuhvaćenog jednim nizom aerosnimaka položimo po je-



dan poligoni vlak (sl. 12). Obzirom na priličnu duljinu ovih vlakova postoji opasnost pogreške udaljenosti između njihovih sredina, što bi se automatski ispoljilo kao pogreška mjerila modela. To se sada lagano sprečava direktnim mjerenjem jedne poprečne duljine  $q$  koja povezuje oba vlaka približno u njihovim sredinama.



Slika 12

Duljina poligonih strana iznosi cca polovicu ili čitavu bazu snimanja, već prema svrsi izmjere i mjerilu snimanja, a svaka druga ili svaka poligona tačka treba po mogućnosti pasti u blizinu pripadnog nadirnog poprečnog profila.

Iz sl. 7—12 jasno proizlazi da je pri upotrebi elektronskog daljinomjera potreban vrlo malen broj tačaka sa kojih treba mjeriti, što mnogo doprinosi ekonomičnosti i brzini određivanja orijentacionih tačaka.

## LITERATURA

- [1] F. Braum: »Računanje presjecanja naprijed dvostrukim računskim strojem tipa Brunsviga 13«, Geodetski list, Zagreb, br. 4—5/1947.
- [2] F. Braum: »Die Beseitigung der Modelldeformationen in Senkrechtaufnahmen durch die Änderung der relativen oder innern Orientierung«, ETH-disertacija, Zürich—Zagreb 1960.
- [3] S. Macarol: »Praktična geodezija«, Tehnička knjiga Zagreb, 1968.

## Zusammenfassung

### UEBER DIE ANWENDUNG DER ELEKTRONISCHEN DISTANZMESSER BEI DER PASSPUNKTBESTIMMUNG

Die Passpunktbestimmung, die bis jetzt einen grossen Kostenanteil in dem Gesamtpreis der photogrammetrischen Arbeiten beanspruchte und oft die Auswertung auf sich warten liess, wird durch die elektronische Entfernungsmessung erleichtert und beschleunigt. Eine rationelle Passpunktbestimmung richtet sich nach der Grösse und Konfiguration des vermessenen Gebietes.

Die Ortung von Passpunkten ist im grossen Masse an die vorgeschriebene Lage innerhalb der Modellfläche bedingt, so dass für die Triangulation keine optimalen Bedingungen vorliegen. Erst eine Kombination von der Triangulation und Trilateration ermöglicht in hügeligem oder gebirgigem Gelände eine zuverlässige Bestimmung mit wenig Feldarbeit.

Angesichts einer kleinen z. V. stehenden Anzahl von Messangaben einerseits und einfacher Ausführungen für den Vorwärts- und Bogenschnitt (Abb. 3 bzw. Abb. 1—2, Formeln 1—4 und Formular 1) andererseits, kann die Ausgleichung aller Angaben in einem Zuge durch den Ausgleich der unabhängigen Einzellösungen ersetzt werden. Zu diesem Zweck sind die  $x$ - und  $y$ -Gewichte für den Bogenschnitt (Abb. 4 und F. 5—15) und für den Vorwärtsschnitt (Abb. 5—5a und F. 16—27) abgeleitet.

Eine polare Bestimmung ist nun auch bei grossem  $r$  (Abb. 7) ermöglicht. Die Hansensche Aufgabe wird durch die direkte elektronische Messung von  $b$  (Abb. 8) nicht nur einfacher, sondern auch zuverlässiger, weil der Konvergenzfehler der in  $C$  und  $D$  gemessenen Strahlenbündel dann zum Ausdruck kommt (F. 29—36a). Eine genaue Messung von  $\gamma$  (Abb. 9) und unmittelbar nacheinanderfolgende Streckenmessung von  $b$  und  $a$  ermöglichen nach dem Cosinus-Satz eine einfache und zuverlässige Bestimmung von  $a$ - und  $b$ -Verbesserung (F. 37—39). Ein spitzer Schnitt (Abb. 10) ist nun brauchbar geworden, da der Vorwärtsschnitt die innere und der Bogenschnitt die äussere Symmetrale von  $\gamma$  liefern, und deren Schnitt den Passpunkt  $C$  ergibt (F. 40).

Für grossräumige Netzbestimmung ist die Triangulation zu zeitraubend und kostspielig. Sie wird nun durch die Trilateration (Abb. 11) ersetzt.

In flachem Gelände wird nach wie vor die Polygonometrie eingesetzt, die nun aber zügiger und genauer verläuft. Bei der Anlage von zwei Polygonzügen, die am oberen und unteren Rande eines Bildstreifens verlaufen, wird die Gefahr des Fehlers der Querverbindung der Zugmitten durch die direkte elektronische Längenmessung dieser Verbindungsstrecke behoben (Abb. 12).