IZRAVNANJE TRIGONOMETRIJSKE MREŽE KADA SU UGLOVI MERENI PO METODI ZATVARANJA HORIZONTA

Krunislav MIHAILOVIĆ — Beograd

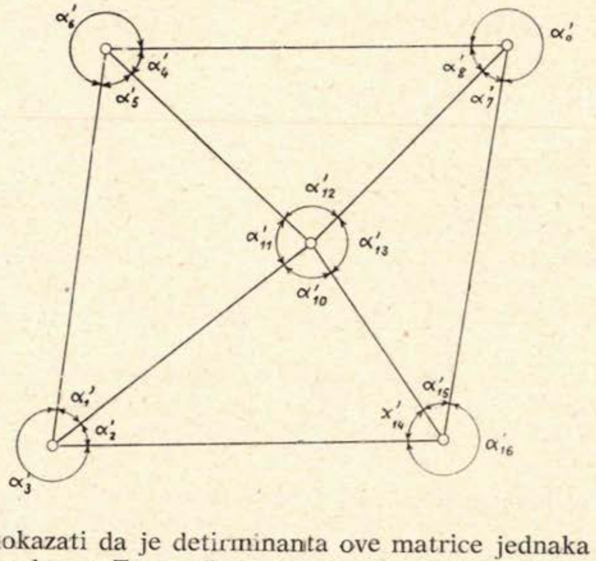
U našoj zemlji Pravilnikom je predviđeno da se u gradskim trigonometrijskim mrežama uglovi mere po metodi zatvaranja horizonta.

Ako greška zatvaranja horizonta ne prelazi graničnu vrednost, onda se računaju popravke koje algebarski sabiramo sa merenim vrednostima uglova. Ovako sračunati uglovi (izravnati uglovi) biće međusobno zavisne veličine. Ta se zavisnost definiše pomoću koeficijenta korelacije

$$r_{\alpha'_i, \alpha'_j} = - \frac{1}{n - 1}$$

pod pretpostavkom da su svi uglovi izmereni sa istom tačnošću [5].

Za trig. mrežu na sl. 1 korelaciona matrica imaće sledeći oblik (str. 113).



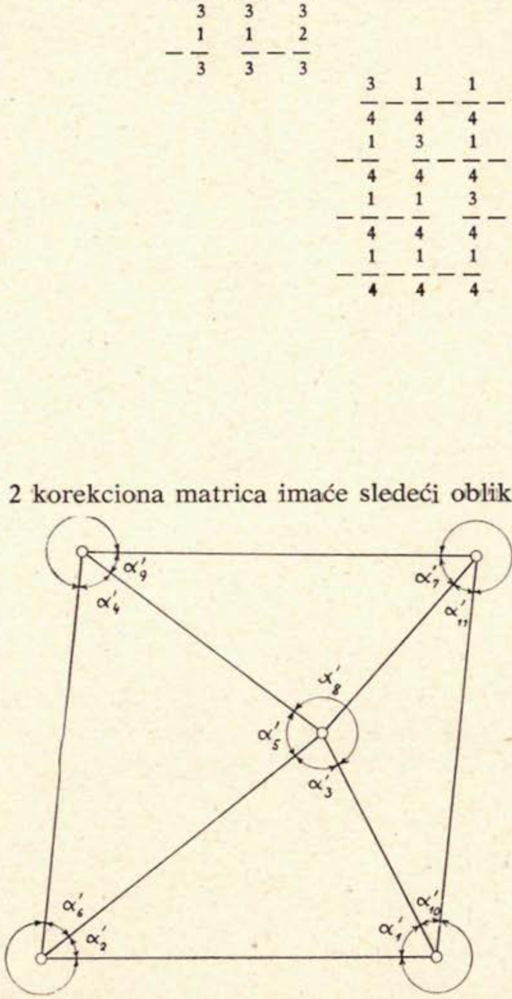
Slika 1

Nije teško dokazati da je detirminanta ove matrice jednaka nuli tj. da je matrica Q_α, singularna. To znaći da su vektori—vrste, odnosno vektori—kolone matrice Q_α, međusobno linearno zavisni. Pošto je prethodno zadovoljen uslov horizonta, to se na svakoj stanici jedan ugao može ispustiti jer se on može dobiti kao dopuna ostalih uglova do 360°.

Adresa autora: Dr ing. Krunoslav Mihailović — Građevinski fakultet, Beograd

$$
\underset{16,16}{Q\alpha'} = \left\| \begin{array}{cccccccccccccccc}
\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} &&&&&&&&&&&&& \\
-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} &&&&&&&&&&&&& \\
-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} &&&&&&&&&&&&& \\
&&& \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} &&&&&&&&&& \\
&&& -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} &&&&&&&&&& \\
&&& -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} &&&&&&&&&& \\
&&&&&& \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} &&&&&&& \\
&&&&&& -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} &&&&&&& \\
&&&&&& -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} &&&&&&& \\
&&&&&&&&& \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} &&& \\
&&&&&&&&& -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} &&& \\
&&&&&&&&& -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} &&& \\
&&&&&&&&& -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} &&& \\
&&&&&&&&&&&&& \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\
&&&&&&&&&&&&& -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\
&&&&&&&&&&&&& -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}
\end{array} \right\|
$$

Za mrežu na sl. 2 korekciona matrica imaće sledeći oblik (str. 114).



Slika 2

$$
\underset{11,11}{Q\alpha'} = \begin{Vmatrix}
\frac{2}{3} & & & & & & & & & -\frac{1}{3} & \\
& \frac{2}{3} & & & & -\frac{1}{3} & & & & & \\
& & \frac{3}{4} & & -\frac{1}{4} & & & -\frac{1}{4} & & & \\
& & & \frac{2}{3} & & & & & -\frac{1}{3} & & \\
& & -\frac{1}{4} & & \frac{3}{4} & & & -\frac{1}{4} & & & \\
& -\frac{1}{3} & & & & \frac{2}{3} & & & & & \\
& & & & & & \frac{2}{3} & & & & -\frac{1}{3} \\
& & -\frac{1}{4} & & -\frac{1}{4} & & & \frac{3}{4} & & & \\
& & & -\frac{1}{3} & & & & & \frac{2}{3} & & \\
-\frac{1}{3} & & & & & & & & & \frac{2}{3} & \\
& & & & & & -\frac{1}{3} & & & & \frac{2}{3}
\end{Vmatrix}
$$

Uslovne jednačine

$$
\begin{aligned}
&- V_{\alpha_1}, + V_{\alpha_2}, + V_{\alpha_3}, + 4 = 0 \\
&V_{\alpha_4}, + V_{\alpha_5}, + V_{\alpha_6}, - 5 = 0 \\
&V_{\alpha_7}, + V_{\alpha_8}, + V_{\alpha_9}, - 1 = 0 \\
&- V_{\alpha_3}, - V_{\alpha_5}, - V_{\alpha_8}, + V_{\alpha_{10}}, + V_{\alpha_{11}}, + 5 = 0
\end{aligned}
$$

$$+ 0{,}08\ V_{\alpha_4}, + 0{,}15\ V_{\alpha_2}, - 0{,}15\ V_{\alpha_4} - 0{,}22\ V_{\alpha_6}, + 0{,}17\ V_{\alpha_7}, - 0{,}27\ V_{\alpha_9}, +$$
$$+\ 0{,}60\ V_{\alpha_{10}}, - 0{,}30\ V_{\alpha_{11}}, + 2 = 0$$

mogu se ovako prikazati u matičnom obliku

$$AV + \omega = 0$$

gdje je

$$
A = \begin{Vmatrix}
1 & 1 & 1 & & & & & & & & \\
& & & 1 & 1 & 1 & & & & & \\
& & & & & & 1 & 1 & 1 & & \\
& & -1 & & -1 & & & -1 & & 1 & 1 \\
-0{,}15 & +0{,}15 & & +0{,}08 & & -0{,}22 & +0{,}17 & & -0{,}27 & 0{,}60 & -0{,}30
\end{Vmatrix}
$$

$$\omega = \| +4 \quad -5 \quad -1 \quad +5 \quad +2 \|.$$

Kako se ovde radi o izravnavanju korelativno zavisnih veličina, to kod izravnanja treba primeniti uopšteni princip najmanjih kvadrata. Na poznati način prvo ćemo obrazovati matricu

$$N = \begin{Vmatrix} +2{,}083 & -0{,}583 & -0{,}250 & -0{,}583 & -0{,}127 \\ -0{,}583 & +2{,}083 & -0{,}583 & -0{,}250 & -0{,}054 \\ -0{,}250 & -0{,}583 & +2{,}083 & -0{,}583 & +0{,}007 \\ -0{,}583 & -0{,}250 & -0{,}583 & +2{,}083 & +0{,}193 \\ -0{,}127 & -0{,}054 & +0{,}007 & +0{,}193 & +0{,}565 \end{Vmatrix}$$

odrediti njenu inverznu matricu

$$N^{-1} = \begin{Vmatrix} +0{,}675 & +0{,}293 & +0{,}242 & +0{,}284 & +0{,}080 \\ +0{,}293 & +0{,}675 & +0{,}291 & +0{,}240 & +0{,}046 \\ +0{,}242 & +0{,}291 & +0{,}672 & +0{,}293 & -0{,}026 \\ +0{,}284 & +0{,}240 & +0{,}293 & +0{,}684 & -0{,}150 \\ +0{,}080 & +0{,}046 & -0{,}026 & -0{,}150 & 1{,}845 \end{Vmatrix}$$

zatim vektor korelata

$$K = -N^{-1}\,\omega = \begin{Vmatrix} -2{,}573 \\ +1{,}197 \\ -0{,}254 \\ -2{,}763 \\ -3{,}056 \end{Vmatrix}$$

i na kraju vektor popravaka

$$V = Q_{\alpha},\, AK = \begin{Vmatrix} +0{,}12 \\ -2{,}64 \\ -1{,}47 \\ +0{,}45 \\ +2{,}30 \\ +2{,}26 \\ +0{,}10 \\ +0{,}84 \\ +0{,}06 \\ -2{,}36 \\ -0{,}97 \end{Vmatrix}$$

Kontrola:

$V^{*}Q_{\alpha}^{-1},\, v = -K^{*}\omega \qquad 35{,}8 \approx 35{,}9\,.$

Do istih rezultata može se doći ako se sa neposrednim merenim uglovima ulazi u izravnanje, odnosno kada se prethodno ne vrši izravnanje na stanici. U tom slučaju imaćemo deset uslovnih jednačina (četiri figurne, pet zatvaranja horizonta i jednu sinusnu uslovnu jednačinu).

Neposredno iz uslovnih jednačina

$$V_{\alpha_1} + V_{\alpha_2} + V_{\alpha_3} + 6 = 0$$
$$V_{\alpha_4} + V_{\alpha_5} + V_{\alpha_6} - 1 = 0$$
$$V_{\alpha_7} + V_{\alpha_8} + V_{\alpha_9} - 1 = 0$$
$$V_{\alpha_{10}} + V_{\alpha_{11}} + V_{\alpha_{12}} + 5 = 0$$
$$V_{\alpha_1} + V_{\alpha_{10}} + V_{\alpha_{13}} - 6 = 0$$
$$V_{\alpha_2} + V_{\alpha_6} + V_{\alpha_{14}} + 6 = 0$$

$$
\begin{aligned}
&V_{\alpha_7} + V_{\alpha_{11}} + V_{\alpha_{16}} - 1 = 0\\
&V_{\alpha_4} + V_{\alpha_9} + V_{\alpha_{15}} - 5 = 0\\
&V_{\alpha_3} + V_{\alpha_5} + V_{\alpha_8} + V_{\alpha_{12}} + 8 = 0\\
&0{,}15V_{\alpha_2} - 0{,}15V_{\alpha_1} + 0{,}08V_{\alpha_4} - 0{,}22\,V_{\alpha_6} +\\
&0{,}17V_{\alpha_7} - 0{,}27V_{\alpha_9} + 0{,}60V_{\alpha_{10}} - 0{,}30V_{\alpha_{11}} + 2 = 0
\end{aligned}
$$

možemo obrazovati matricu A i vektor ω

$$
A = \left\|\begin{matrix}
1 & 1 & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & 1 & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & & & & \\
1 & & & & & & & & & 1 & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & & & & & 1 & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & 1 & & & & 1 & & & & & 1\\
 & & 1 & & 1 & & & 1 & & & & 1 & & & & \\
-0{,}15 & +0{,}15 & & +0{,}008 & & -0{,}22 & +0{,}17 & & -0{,}27 & +0{,}60 & -0{,}30 & & & & &
\end{matrix}\right\|
$$

$$
\omega^* = \left\| -11 \quad -6 \quad +3 \quad +1 \quad -5 \quad +6 \quad -6 \quad +5 \quad +1 \quad -8 \quad -2 \right\|
$$

Prvo obrazujmo matricu

$$
N = A^*A = \left\|\begin{matrix}
+3 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 & +1 & 0\\
0 & +3 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & +1 & -0{,}14\\
0 & 0 & +3 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & +1 & -0{,}10\\
0 & 0 & 0 & +3 & +1 & 0 & 0 & +1 & +1 & +0{,}30\\
+1 & 0 & 0 & +1 & +3 & 0 & 0 & 0 & 0 & +0{,}45\\
+1 & +1 & 0 & 0 & 0 & +3 & 0 & 0 & 0 & -0{,}07\\
0 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & +3 & 0 & 0 & -0{,}19\\
0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & +3 & 0 & -0{,}13\\
+1 & +1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +4 & 0\\
0 & -0{,}14 & -0{,}10 & +0{,}30 & +0{,}45 & -0{,}07 & -0{,}19 & -0{,}13 & 0 & +0{,}65
\end{matrix}\right\|
$$

zatim vektor korelata

$$
K = -N^{-1}\omega = \left\|\begin{matrix}
-2{,}62\\ +1.31\\ -0{,}24\\ -2{,}81\\ +4.44\\ -1.66\\ +1.04\\ +1.17\\ -0.91\\ -4.24
\end{matrix}\right\|
$$

i najzad vektor popravaka

$$
V = AK = \left\|\begin{matrix}
+2.4\\ -4.9\\ -3.5\\ +2.0\\ +0.4\\ +0.5\\ +0.7\\ -0.7\\ +2.3\\ -0.9\\ -0.3\\ -3.7\\ +4{,}4\\ -1.7\\ +1.0\\ +1.2
\end{matrix}\right\|
$$

$$
V^*V = -K^*\omega
$$

$$
91.98 \approx 92{,}10
$$

Upoređenje rezultata

	Mjerni uglovi			V_i	izravnati uglovi 2 način		1 način		Razlike 2—1
α_1	52	56	02	+ 2	56	04	56	04	0
α_2	52	52	09	— 5	52	04	52	04	0
α_3	74	11	55	— 3	11	52	11	52	0
α_4	65	08	09	+ 2	08	11	08	11	0
α_5	71	14	06	0	14	06	14	06	0
α_6	43	37	42	0	37	42	37	42	0
α_7	52	46	21	+ 1	46	22	46	22	0
α_8	89	06	37	— 1	06	36	06	36	0
α_9	38	07	01	+ 2	07	03	07	02	+ 1
α_{10}	19	42	03	— 1	42	02	42	03	— 1
α_{11}	34	50	32	0	50	32	50	31	+ 1
α_{12}	125	27	30	— 4	27	26	27	26	0
α_{13}	287	21	49	+ 4	21	53	21	53	0
α_{14}	263	30	15	— 2	30	13	30	13	0
α_{15}	256	44	45	+ 1	44	46	44	46	0
α_{16}	272	23	06	+ 1	23	07	23	07	0

Kao što vidimo na oba načina dobijaju se isti rezultati. Prema tome treba se opredeliti za onaj način koji je ekonomičniji.

Na kraju treba napomenuti da se u našoj zemlji kod izravnanja geodetskih mreža gde su uglovi mereni po metodi zatvaranja horizonta ignoriše korelativna zavisnost koja je obavezno prisutna posle izravnanja na stanici. Ovo treba imati u vidu prilikom izravnanja takvih mreža. Do ispravnih rezultata (stroga rešenja) može se doći samo na osnovu jednog od prikazana dva načina. Prvi način u odnosu na drugi nešto je ekonomičniji. Međutim za njegovu uspešnu primenu nužno je poznavati teoriju izravnanja korelativno zavisnih veličina.

Problem izravnanja korelativno zavisnih veličina pojavljuje se kod svih metoda merenja uglova gde se vrši izravnanje na stanici.

Krunislav MIHAILOVIĆ — Beograd

U našoj zemlji Pravilnikom je predviđeno da se gradskim trigonometrijskim mrežama uglovi mere po metodi zatvaranja horizonta. Ova se metoda koristi i u nekim drugim mrežama. Zbog grešaka koje nastaju u procesu mjerenja zbir uglova koji zatvaraju horizont neće iznositi 360°, odnosno 400g. Zbog toga odstupanje horizonta podjednako raspoređujemo na sve merene uglove koji obrazuju horizont. Sa tako popravljenim uglovima (izravnatim) ulazimo u izravnanje mreže. Kako su izravnati uglovi međusobno zavisne veličine to nas obavezuje da o tome vodimo računa prilikom izravnanja trigonometrijske mreže. U praksi se občino ignoriše prisustvo korelativne zavisnosti pa stoga dobiveni rezultati ne mogu se uvrstiti u stroga rešenja bez obzira što se kod izravnanja primenjuje metoda najmanjih kvadrata.

Trigon. mreža (sl. 1) izravnata je na dva načina tj. kada se izravnavaju i ne izravnavaju uglovi na stanici. Oba načina daju iste rezultate samo pod uslovom da se kod prvog uzme u obzir korelativna zavisnost između izravnatih uglova na stanici. Ova zavisnost definiše se pomoću korelacione matrice Q_α.

Kod prvog načina treba postaviti pet uslova jednačina, a kod drugog deset. Zato se postavlja pitanje koji je način izravnanja ekonomičniji. Na osnovu priloženog primera dobija se utisak da je prvi način nešto racionalniji jer se brže dolazi do rezultata. Međutim njegova primena uslovljena je poznavanjem teorije izravnanja korelativno zavisnih veličina.