JEDAN KRITIČKI OSVRT NA PRIMENU FEREROVE FORMULE

Krunislav MIHAILOVIĆ — Beograd

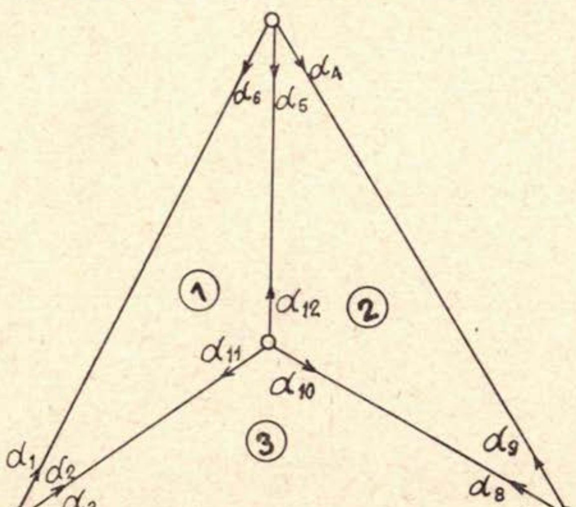
Za određivanje srednje greške opažanog pravca u trigonometrijskim mrežama mnogih zemalja koristi se Fererova formula

$$\mu = \sqrt{\frac{\omega^* \omega}{6 \eta}} \tag{1}$$

gde je ω vektor odstupanja, a η broj trouglova.

Naš pravilnik za trijangulaciju čl. 87 nalaže da se po Fererovoj formuli mora sračunati srednja greška opažanog pravca ako u mreži ima više od 10 trouglova. Pri tome srednje greške ne smeju biti veće od vrednosti koje su apriori utvrđene posebno za svaki red mreže.

U našoj zemlji kod trigonometrijskih mreža svih redova sem prvoga opažaju se pravci po girusnoj metodi. Dok se u mreži prvoga reda i gradskim trigonometrijskim mrežama mere uglovi po Štrajberovoj odnosno metodi zatvaranja horizonta. Znači da se u praksi primenjuju različite metode merenja uglova pa se nameće pitanje da li je ispravno da se za određivanje srednje greške opažanog pravca uvek primenjuje Fererova formula?



Adresa autora: Dr ing. Krunoslav Mihailović, Građevinski fakultet, Beograd

Iz oblika Fererove formule može se primetiti da je neophodno za njenu primenu da uglovna odstupanja u trouglovima budu međusobno nezavisne veličine. Međutim to nije slučaj u mrežama gde se opažaju pravci po girusnoj metodi. Naša tvrđenja ilustrovaćemo na jednoj maloj trigonometrijskoj mreži sl. 1.

Uglovna odstupanja u trouglovima dobijamo po formulama

$$\omega_1 = 180^\circ - [(\alpha_2 - \alpha_1) + (\alpha_6 - \alpha_5) + (\alpha_{12} - \alpha_{11})]$$
$$\omega_2 = 180^\circ - [(\alpha_5 - \alpha_4) + (\alpha_9 - \alpha_8) + (\alpha_{10} - \alpha_{12})]$$
$$\omega_3 = 180^\circ - [(\alpha_3 - \alpha_2) + (\alpha_8 - \alpha_7) + (\alpha_{11} - \alpha_{10})]$$

odnosno prikazana u matričnom obliku

$$\begin{Vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 180^0 \\ 180^0 \\ 180^0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} +1 & -1 & \cdot & \cdot & +1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & +1 & -1 & \cdot & \cdot & +1 & -1 & -1 & \cdot & +1 \\ \cdot & +1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & +1 & -1 & \cdot & +1 & -1 & \cdot \end{Vmatrix} \circ \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{Vmatrix}$$

ili kratko

$$\omega = C + A^*\alpha \qquad C = const$$

Sada odredimo korelacionu matricu

$$Q_\omega = A^*Q_\alpha = A^*P^{-1}A = A^*A = 2 \quad \begin{Vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{Vmatrix}$$
$$Qx \Rightarrow P^{-1} \Rightarrow E$$

odnosno njenu inverznu vrednost

$$Q_\omega^{-1} = \tfrac{1}{4} \begin{Vmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 1 \end{Vmatrix}$$

Pošto su glavna odstupanja u trouglovima međusobno zavisne veličine, to srednju grešku opažanog pravca nije pravilno računati po Fererovoj formuli, već po formuli

$$\mu = \sqrt{\frac{\omega^* Q_\omega^{-1} \omega}{\eta}} \tag{2}$$

kojom se uzima u obzir korelativna zavisnost.

Dokaz: Za mrežu na sl. 1 obrazujemo figurne uslove jednačine koje se mogu u matričnom obliku ovako prikazati

$$A^*V + \omega = O \tag{3}$$

odnosno

$$V^*A = -\omega^*$$

Na poznati način dolazimo do vektora popravaka

$$\begin{aligned} (A^*A)K + \omega &= O \\ K &= -(A^*A)^{-1}\omega \qquad (4) \\ V &= AK \end{aligned}$$

S leve strane vektor V pomnožimo sa vektorom V^*

$$V^*V = V^*AK$$

Kad uvrstimo (3) i (4) u (5) dobićemo sumu popravaka

$$V^*V = \omega^*(A^*A)^{-1}\omega$$

Kako je $Q_\omega = A^*A$, to sumu popravaka možemo ovako prikazati

$$V^*V = \omega^*Q_\omega^{-1}\omega \qquad (5)$$

Uzimajući ovo u obzir srednja greška opažanog pravca biće

$$\mu = \sqrt{\frac{V^*V}{r}} = \sqrt{\frac{\omega^*Q_\omega^{-1}\omega}{n}} \qquad r = n$$

Time smo dokazali egzistenciju formule (2) za slučaj kada su slobodni članovi međusobne zavisne veličine. To takođe znači da je nepravilno da se Fererova formula koristi za određivanje srednje greške opažanog pravca u trigonometrijskim mrežama u kojima su mereni pravci po girusnoj metodi.

Primer: Neka je vektor slobodnih članova za mrežu na sl. 1

$$\omega^* = \| \omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3 \|$$
$$\omega^* = \| +15'' \ -20'' \ +10'' \|$$

Srednja greška opažanog pravca bit će:

po formuli (1)

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{725}{18}} = \pm 6{,}4''$$

po formuli (2)

$$\mu_2 = \sqrt{\frac{94}{3}} = \pm 5{,}6''$$

Kao što vidimo formula (1) i (2) ne daju iste vrednosti za srednju grešku opažanog pravca. Ova razlika nastaje zato što se u formuli (1) ignoriše korelativna zavisnost koja je realno prisutna između uglovnih odstupanja ω.

Zato kod trigonometrijskih mreža svih redova sem prvog gde se opažaju pravci po girusnoj metodi srednju grešku opažanog pravca ne treba računati po Fererovoj formuli koju preporučuje Pravilnik za triangulaciju već nju treba odrediti na osnovu predložene formule (2).

Ustvari formula (2) je uopštenje Fererove formule i njena je primena univerzalna. Ako su uglovna odstupanja međusobno nezavisne veličine onda je

$$Q_{\omega} = 6E \qquad Q_{\omega}^{-1} = 1/6E$$

pa će formula (2) dobiti poznati oblik Fererove formule (1).

JEDAN KRITIČKI OSVRT NA PRIMENU FEREROVE FORMULE

Krunoslav MIHAILOVIĆ

Za određivanje srednje greške opaženog pravca u trigonometrijskim mrežama mnogih zemalja koristi se Fererova formula. Pravilnik za triangulaciju nalaže da se po Fererovoj formuli mora sračunati srednja greška opaženog pravca ako u mreži ima više od deset trouglova. Srednja greška računa se iz odstupanja u trouglovima koja se dobijaju dopunom merenih uglova u trouglu do 180°. To znači da se Fererova formula može primjenjivati samo u mrežama gde su uglovi neposredno merene veličine. Međutim u mrežama gde se uglovi dobijaju kao razlike odgovarajućih pravaca nepravilno je da se Fererova formula koristi za određivanje srednje greške opažanog pravca. Takav slučaj pojavljuje se u trigonometrijskim mrežama svih redova sem prvoga.

Kada se opažaju pravci po girusnoj metodi onda za određivanje srednje greške opažanog pravca treba koristiti formulu (2), čija je egzistencija u ovome radu teorijski dokazana. Ustvari ova formula je uopštenje Ferereove formule i njena primena je uvek moguća.

Ovaj kritički osvrt ukazuje da je nepravilno da se Fererova formula koristi za određivanje srednje greške opažanog pravca u mrežeama gde su opažani pravci po girusnoj metodi (u mrežama svih redova sem prvoga). U takvim mrežama objektivna ocena tačnosti može se postići na osnovu srednje greške opažanog pravca sračunate iz (2). Formula (1) i (2) daju različite vrednosti za srednju grešku opažanog pravca. Ovo nas obavezuje da budemo obazrivi prilikom primene Fererove formule.

Odredbu Pravilnika za triangulaciju koja se odnosi na određivanje srednje greške opažanog pravca po Fererovoj formuli treba preinaćiti i dopuniti u predloženom smislu kako bi sračunate srednje greške mogle da predstavljaju objektivni pokazatelj postignute tačnosti opažanih pravaca.

Literatura:

[1] Pravilnik za državni premer I deo Triangulacija, Beograd 1951.

[2] Zbornik geodetskog instituta, Beograd 1967.