NEKI NOVI ASPEKTI O IZRAVNANJU GEODETSKIH MREŽA

Krunislav MIHAILOVIĆ — Beograd

Geodetske mreže obično se razvijaju po principu »od većeg ka manjem« tj. od radova većeg obima i veće tačnosti ka radovima manjeg obima i manje tačnosti. Sprovođenje ovog principa u delo obezbeđeno je podelom mreža u redove. Za svaki red propisani su »kriterijumi« koji treba da obezbede željenu tačnost koja se apriori utvrđuje. Zbog toga, svi podaci koji služe za određivanje geodetskih mreža podležu ozbiljnoj analizi kako merenih tako i izravnatih veličina.

Mreže se izravnavaju po strogo utvrđenom redosledu: prvo se izravnava mreža 1. reda, zatim drugoga i tako redom. Svaki naredni red mreže oslanja se na prethodno izravnate mreže (date mreže) koje se uslovno usvajaju bespogrešnim. Ovo se strogo uvažava u praksi kako za izravnanje geodetske mreže tako i pri oceni tačnosti konačno usvojenih rezultata. Doduše od 1939. godine kada je Pranjis—Pranjevič prvi pokušao da kod ocene tačnosti uzme u obzir greške datih veličina postoje mnogi radovi iz te oblasti. Međutim, pri izravnanju geodetskih mreža sve što je dato, smatra se konstantnim i strogo fiksnim veličinama. Kao posledica toga, izravnanje mreže 1. reda nema uticaja na izravnanje mreže 2. reda i obratno. Ili uopšteno, izravnanje mreža prethodnih redova nemaju uticaja na izravnanje mreža narednih redova i obratno.

Postavlja se pitanje da li je pravilan ovaj opšte prihvaćeni postupak izravnanja odnosno da li on daje stroga rešenja? Svaka podela geodetskih mreže u redove je veštačka tvorevina koja se reguliše pravilnicima pojedinih zemalja. Prema tome, sa aspekta izravnanja, svaka podela mreža na redove ima trivijalan značaj. Stroga rešenja mogu se dobiti samo pod uslovom ako sve merene veličine, bez obzira kome redu pripadaju, obuhvatimo odjednom u izravnanju s tim što treba voditi računa o težinama podataka s kojima raspolažemo. Dakle, izravnanja geodetskih mreža klasificiranih u redove i pored toga što se zasnivaju na metodi najmanjih kvadrata ne mogu se uvrstiti u stroga izravnanja. Svaka podela mreže u redove i njihovo izravnanje na dosadašnji način dovodi do približnih rešenja. Razlozi su sledeći:

1 — svaku geodetsku mrežu, recimo triangulaciju ili neku drugu mrežu, možemo smatrati kao jednu jedinstvenu mrežu koja u geometrijskom smislu predstavlja celinu ali koja je heterogena u pogledu tačnosti. Zapravo u takvoj mreži pojavljuje se onoliko kategorija tačnosti merenih veličina koliko redova ima ta mreža.

Adresa autora: Dr ing. Krunislav Mihailović, Građevinski fakultet Beograd

2 — Kod izravnanja mreža svih redova sem prvog pojavljuje se problem izravnanja korelativno zavisnih veličina.

Cilj ovoga rada jeste upravo u tome da se ukaže na nedostatke izravnanja geodetskih mreža i odgovori na pitanje kako se mogu izravnati geodetske mreže posebno za svaki red a da pri tome dobiveni rezultati budu isti kao da je cela mreža izravnata odjednom. Radi lakšeg sagledavanja suštine posmatraćemo mrežu koja je klasificirana u dva reda.

Neka mreža 1. reda ima m_1 nepoznatih veličina čiji je vektor $x^* = \| x_1, x_2 \; x_{m1} \|$, a mreža 2. reda neka ima m_2 nepoznatih veličina čiji je vektor $y^* = \| y_1 \; y_2 \; . \; . \; . \; . \; y_{m2} \|$.

Jednačine odstupanja klasificiraćemo u tri kategorije:

za I red $\qquad A_1 x = f_1 + V_1 \ldots . P_1 \qquad (1)$

$$\text{za II red} \quad \begin{cases} B_2 y = f_2 + V_2 \ldots . P'_2 & (2) \\ A_3 x + B_3 y = f_3 + V_3 \ldots . P'_3 & (3) \end{cases}$$

Jednačine (1) odnose se samo na mrežu 1. reda, (2) samo na mrežu 2. reda, a (3) na mrežu 1. i 2. reda »Vezujuće jednačine odstupanja«.

Ako (1) tretiramo nezavisno od ostalih jednačina odstupanja, dobićemo $\overline{x_1}, \overline{x_1}, \ldots . \overline{x_{m1}}$ koje će se razlikovati od veličina $x^1, x_2, \ldots . x_{m1}$ koje bi se dobile kompleksnim razmatranjem svih jednačina odstupanja (bez podele na redove). Prema tome jednačine (1) mogu se ovako prikazati

$$A_1 \overline{x} = f_1 + \overline{v_1} \ldots . P_1$$

Iz uslova minimuma $\overline{v_1}^* P_1 \overline{v} = min.$ obrazovaćemo normalne jednačine

$$A_1^* P_1 A_1 x = A_1^* P_I f_1$$

odavde

$$x = (A^*_1 P_1 A_1)^{-1} A^*_1 P_1 f$$

i

$$Qx = N_1^{-1} = (A^*_1 P_1 A_1)^{-1}.$$

Iz (2) i (3) odredićemo vektor y koristeći se vektorom x

$$B_2 y = f_2 + v_2$$

$$B_3 y = f_3 — A_3 \overline{x} + v_3 = \overline{f_3} + v_3$$

odnosno

$$\left\| \begin{matrix} B_2 \\ B_3 \end{matrix} \right\| y = \left\| \begin{matrix} f_2 \\ \overline{f_3} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} v_2 \\ v_3 \end{matrix} \right\|$$

ili kratko

$$By = f + v. \qquad (4)$$

Korigovane slobodne članove treba odrediti po formuli:

$$\overline{f_3} = f_3 — A_3 \overline{x}.$$

Korelaciona matrica biće:

$$Q_{\overline{f_3}} + Q_{f_3} \frac{\mu^2_{II}}{\mu^2_I} + A_3 Q_{\overline{x}} \overset{*}{A_3} = \overset{-1}{P_{f_3}} \frac{\mu^2_{II}}{\mu^2_I} + A_3 \overset{-1}{\overline{N_1}} \overset{*}{A_3}$$

gde su μ_I i μ_{II} srednje greške jedinice težine merenih veličina koje pripadaju mreži 1. reda, odnosno 2. reda.

Pošto su slobodni članovi $\underline{f}_3$ međusobno zavisne veličine to za izravnanje mreže 2. reda treba koristiti uopšteni princip najmanjih kvadrata

$$v^* Q^{-1}_f = min. \tag{5}$$

gde je

$$\overset{-1}{Q_f} = \begin{Vmatrix} P_2 \dfrac{\mu^2_{II}}{\mu^2_I} & \\ & \overset{-1}{Q_{f_3}} \end{Vmatrix} .$$

Kada uslov minimuma (5) primenimo na jednačine odstupanja (4) dobićemo normalne jedačine

$$B^* Q^{-1}_f By = B^* Q^{-1}_f f$$

odavde

$$y = (B^* Q^{-1}_f B)^{-1} B^* Q^{-1}_f f \tag{6}$$

i

$$Qy = (B^* Q^{-1}_f B)^{-1}.$$

Iz (6) odredićemo definitivne vrednosti $y_1, y_2 \ldots y_{m2}$. Sada mrežu 2. reda treba smatrati datom mrežom i pristupamo određivanju definitivnih vrednosti veličina $x_1, x_2 \ldots x_{m1}$ koje pripadaju mreži 1. reda.

U tom cilju (1) i (2) napišimo u obliku

$$A_1x = f_1 + v_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad P_1$$
$$A_3x = f_3 - B_3y + v_3 = \underline{f}_3 + v_3 \; . \; . \quad P'_2$$

odnosno

$$\begin{Vmatrix} A_1 \\ \\ A_3 \end{Vmatrix} x = \begin{Vmatrix} f_1 \\ \\ \underline{f}_3 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} v_1 \\ \\ v_2 \end{Vmatrix} \qquad P = \begin{Vmatrix} P_1 & \\ & P_2 \dfrac{\mu^2_I}{\mu^2_{II}} \end{Vmatrix}$$

ili

$$Ax = f + v.$$

Koristeći se uslovom minimuma $v^* P v = min.$ obrazovaćemo normalne jednačine

$$A^* PAx = A^* Pf$$

odavde

$$x = (A^* PA)^{-1} A^* Pf.$$

Korigovane slobodne članove f_3 treba odrediti po formuli:

$$\underline{f}_3 = f_3 - B_3y$$

Na osnovi izloženog možemo tvrditi:

— da izravnanje mreže 1. reda ima uticaja na izravnanje mreže 2. reda i obratno;

— da sve težine koje pripadaju mreži 2. reda treba pomnožiti sa koeficijentom $C = \mu_I^2/\mu_{II}$. Razume se izložena razmatranja mogu se proširiti na izravnanje geodetskih mreža klasificiranih u proizvoljan broj redova. U tom slučaju težine merenih veličina mreža svih redova sem 1. treba pomnožiti sa koeficijentom

$$C_i = \frac{\mu^2_I}{\mu_i^2}$$

gde indeks *i* označava red mreže.

U praksi je uvek zadovoljen uslov

$$0 < \mu_I < \mu_{II} < \mu_{III} < \mu_{IV} <$$

jer je tačnost merenja u prethodnim mrežama uvek veća od tačnosti u narednim mrežama. Prema tome, koeficijenat C_i mora da se nalazi u granicama od 0 do 1. tj. $0 < C_i < 1$.

Ako je koeficijenat C_i bliži jedinici onda je međusobni uticaj izravnanja između mreža pojedinih redova veći i obratno. Kada je C_i jednako 1 onda je mreža homogene tačnosti (nema redova) i problem se svodi na izravnanje mreže u više grupa. Ako je $C_i = 0$ onda se mreže mogu izravnavati nezavisno u okviru pojedinih redova. Tada se prilikom određivanja mreža narednih redova, mreže prethodnih redova mogu smatrati konstantnim mrežama.

Iz ovog sledi da se redovi mogu identifikovati sa grupama i problem se u suštini svodi na izravnanje mreža u više grupa, s tim što treba voditi računa da nije ista tačnost merenih veličina u svim grupama.

Prema tome možemo tvrditi da izravnanje mreža prethodnih redova mora da imaju uticaja na izravnanje mreža narednih redova i obratno. Stepen te zavisnosti zavisi od koeficijenta C_i. Kako je izravnanje korelativno zavisnih veličina mukotrpan posao to izložena razmatranja treba shvatiti kao objašnjenje zašto je nepravilno nezavisno izravnavati geodetske mreže na dosadašnji način u okviru pojedinih redova. Naravno, u praksi se uvek treba opredeliti za najcelishodnije izravnanje koje je i ekonomski opravdano.

LITERATURA:

1. *Pranis-Pranevič I. J.* Opredelenie srednej kvadratičeskoj ošibok funkcii s učetom ošibok ishodnih dannih pri uravnivanii po sposobu naimenjših kvadratov. Sbornik issledovanii po geodezii, CNIGA i K, 1939 g.
2. *Hristov V. K.* Vlijanie ošibok v ishodnih na točnost rezuljtatov uravnovešivanija po metodu naimenjših kvadratov. Izvestija na centralna laboratorija po geodezija, Sofija 1965. g.
3. *Agroskin A. I.* Ob učite ošibok ishodnih dannih pri posredstvennom metode uravnivanija, Trudi CNIGA i K, t. X, 1958. g.
4. *Muzafarov M.H.* Opredelenie srednej kvadratičarskoj ošibki funkcii uravnovešennih veličin geodezičeskoj seti s učetom ošibki ishodnnih dannih. Sb. statej GUGK, vip. XXXII, 1950. g.
5. *Selihanovič V. G.* K voprosu o metodah učeta ošibok ishodnih dannih pri uravnovešivanii izmerenih veličin. Trudi MIIG i K, vip. 9, 1951. g.
6. *Mihailović K. K.* Višegrupno izravnanje po metodi posrednih mjerenja. Zbornik Geodetskog instituta, br. 8, 1967. Beograd.