JOŠ O ORIJENTACIJI NAŠE TRIANGULACIJE*

Abdulah MUMINAGIĆ, dipl. inž. — Beograd

5. *KORIŠĆENJE TEORIJE TOPOGRAFSKO-IZOSTATIČKE KOMPENZACIJE ZA DELIMIČNU ELIMENTACIJU UTICAJA NERAVNOMERNOSTI U RASPODELI MASA ZEMALJSKE KORE KOD NOVE ORIJENTACIJE NAŠE TRIANGULACIJE*

5.1. *Uvod*

Iz tablice 2, stubci 4 i 5 može se zaključiti da su odstupanja vertikala na tačkama naše triangulacije po veličini veoma različita, a na nekima tako velika da dovode u sumnju i korisnost njihove upotrebe za orijentaciju i izravnanje mreže.

Po savremenoj teoriji oblika Zemlje ovakva odstupanja nastala su zbog nejednakog rasporeda masa u realnoj Zemlji i referencelipsoidu. Naime, referenc-elipsoid se danas u geodeziji ne tretira kao obično geometrijsko telo, tj. kao ljudska na kojoj se vrše računanja. I on je *fizičko telo* u kojem je poznat zakon rasporeda masa. Kad bismo merenja izvršili na ovakvom elipsoidu, astronomske i geodetske vrednosti koordinata bi se podudarale (naravno isključujući ovde greške merenja) i slobodni članovi f jednačina (7) bili bi jednaki nuli — nulta nivoska površina bi se podudarila sa elipsoidom.

Raspored masa u realnoj Zemlji, međutim, ne pokorava se istom zakonu kojem se pokorava raspored u našem elipsoidu. Razlike u rasporedu masa ispoljavaju se uglavnom u tri vida:

- — kao različita orijentacija elipsoida i planete u prostoru;
- — kao neravnomerna koncentracija masa različite gustine na pojedinim mestima;
- — kao neravnine zemaljske površine — brda, planine, doline i morske potoline itd.

I osnovni su uzročnik odstupanja vertikala i različitih vrednosti f u (7), koja očito nose lokalni pečat.

5.2. *Postupci kojima se ublažava uticaj neregularnog rasporeda masa na geodetske radove*

Ovo ublažavanje neophodno je iz dva razloga:

- — lokalni uticaji ne bi smeli da utiču na obradu mreže, jer bi mogli izazvati sistematske deformacije, kao što je razmotreno u 3.4;
- — površina na koju svodimo merenja treba da je što bliža površini na kojoj se izvode računanja, kako bi se oslabio uticaj usvojenog metoda obrade.

* Ovaj je članak nastavak članka »Orijentacija naše triangulacije«, objavljenoj u G. l. br. 1-3 i 4-6.

5.2.1. S m a n j e n j e u t i c a j a p o g r e š n e o r i j e n t a c i j e[1])

Postiže se optimalnom orijentacijom, što je i cilj ovog ispitivanja.

5.2.2. U r a č u n a v a n j e u t i c a j a n e r a v n o m e r n e k o n c e n t r a c i j e m a s a r a z l i č i t e g u s t i n e

Geofizika je već utvrdila da se neravnomeran raspored masa različite gustine u jednom sloju može očekivati samo u spoljnjem omotaču Zemlje — kori. Iako nam je to najbliži sloj, na kojem zapravo živimo, određivanje popravki za njegov uticaj je skopčano sa veoma velikim teškoćama. Blagodareći napretku nauke i tehnike, sve smo bliže trenutku kada će ove teškoće biti savladane. Gravimetrijski premer na kopnu i moru je već toliko napredovao da je korišćenje *Vening Majnesove* formule (za određivanje skretanja vertikala na osnovu mernih anomalija sile teže izazvanih neravnomernim rasporedom masa u kori) već postalo dnevna praksa. Istina, primena ove formule zahteva gravimetrijski premer na celoj površini Zemlje, kojeg još nemamo, pa su i rezultati zasada nepotpuni. Ovaj metod daje *apsolutna* skretanja vertikala — u odnosu na opšti zemaljski elipsoid. Za geodetske potrebe neophodna su *relativna* skretanja — u odnosu na referenc-elipsoid.

Sovjetski naučnik Molodenskij razradio je metod određivanja relativnih skretanja putem korišćenja gravimetrijskog premera na dosta maloj površini za interpolaciju astro-geodetskih vrednosti.

Primena ovog metoda na naše uslove se priprema i uskoro ćemo moći i njega koristiti.

5.2.3. O d r e đ i v a n j e u t i c a j a n e r a v n i n a z e m a l j s k e p o v r š i n e

U sadašnjem momentu stajao nam je na raspoloženju jedino metod delimičnog eliminisanja uticaja vidljivih, izmerenih i kartiranih neravnina zemaljske površine. Uticaj ovih neravnina, posebno kad su bliske razmatranoj tački, uočen je pre skoro vek i po. Međutim, kad su se sračunale popravke za privlačenje mase ovih neravnina, one su ispale nekoliko puta veće od stvarno opaženih, astronomskih, vrednosti, dobijenih po formuli (5). Ispitivajući uzroke ove pojave u Indiji, nekako u isto vreme (početkom druge polovine 19 veka), engleski naučnici Prat i Eri su došli do zaključka da se čvrsta zemaljska kora, koja pliva na tečnom magmatskom sloju, nalazi u stanju hidrostatičke ravnoteže. Da bi ravnoteža zaista postojala — a ona se uočava na osnovu posmatranog relativnog mirovanja kore — površinske neravnine moraju da se na izvesnoj dubini kompenziraju dubinskim slojevima: ili su visoke planine na svoj svojoj debljini do tečnih slojeva građene od lakših materijala, a doline od težih (Prat), ili je kora iste gustine, ali se na lavi drži potiskom stvorenim zagnjurivanjem u težu lavu, čime istiskuje masu jednaku masi vanjskih slojeva po Arhimedovom zakonu (Eri).

Detaljnije o ovim teorijama upućujem čitaoca na udžbenike više geodezije.

Docnija ispitivanja su više potvrđivala Erijevu teoriju. Na osnovu ovih dveju teorija razvijeno je više drugih, koje još bolje odražavaju stvarno fizičko stanje zemaljske kore. Sve one daju skoro iste rezultate, a postupak po njima je veoma složen pa se slabo koriste. Najčešće se, zbog jednostavnosti, upotrebljava Pratova uz izvesne modifikacije.

Mi smo radili po varijanti poznatoj pod imenom Prat—Hajfordove teorije.

---

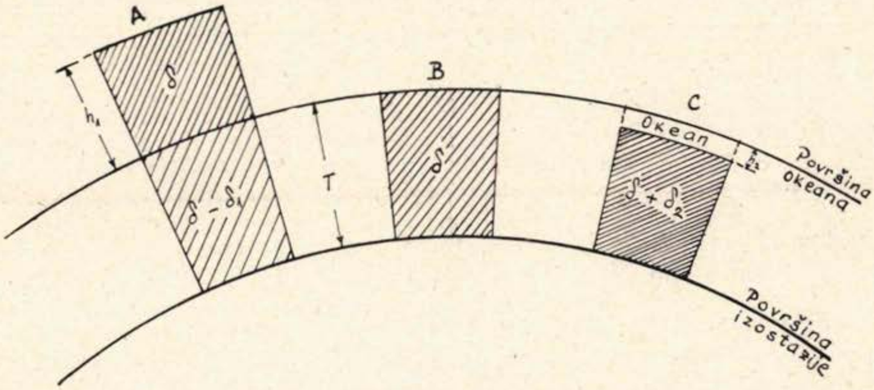
1) Smatramo stalno da je izvršen sretan izbor najprikladnijeg elipsoida.

5.2.4. Prat — Hajfordova teorija

Hajford je od Prata usvojio da se kompenzacija površinskih slojeva vrši na izvesnoj dubini ispod nivoa mora T, koja svuda ima istu vrednost. Ova dubina zove se — *dubina kompenzacije*, a površina na kojoj se kompenzacija događa zove se — *površina izostazije*.

Zatim — da je kompenzacija potpuna.

Međutim, dok Prat smatra da je gustina svakog stuba zemaljske kore različita u zavisnosti od njegove visine iznad nivoa okeana, ali jednaka od površine izostazije do njegove gornje površine, Hajford smatra da je jednaka samo do površine okeana — za kopnene stubove, a do dna okeana — za okeanske. Gustina u delu stuba koji se izdiže iznad nivoa okeana ne menja se i



Slika 3.

jednaka je gustini u stubu čija je visina tačno jednaka T, tj. koji dolazi do površine okeana (stub B).

Pošto se svi stubovi A, B i C (slika 3) nalaze u ravnoteži na površini izostazije, oni, ako imaju isti poprečni presek, moraju imati istu težinu i to težinu stuba B, koji dolazi do površine okeana. Na osnovu ove jednakosti lako se sračunaju kompenzirajuće mase — negativna δ_1 i pozitivna δ_2 respektivno u stubovima A i C.

Samo računanje uticaja pojedinih stubova na skretanje vertikale računa se po formuli.

$$D_c + D_T = F D_T \qquad (12)$$

gde je D_c — uticaj na skretanje kompenzacirajućih masa

D_T — uticaj vanjskih masa (reljefa)

$$F = 1 - \frac{\lg\left(\dfrac{r_k + \sqrt{r_k^2 + T^2}}{r_i + \sqrt{r_k^2 + T^2}}\right)}{\lg \dfrac{r_k}{r_i}}$$ — koeficijent koji za

usvojenu *dubinu kompenzacije* T zavisi samo od vanjskog r_k i unutrašnjeg r_i poluprečnika razmatranog stuba, tj. od udaljenosti njegove najdalje i najbliže površine do tačke za koju računamo uticaj. Za njega je lako sračunati tablice i one postoje.

Hajford je zemaljsku koru oko ove tačke mrežom koncentričnih kružnih konusa i njihovih dijametarskih ravni razbio u sistem stubova, s takvim proračunom da svaki stub visok 1 stopu izaziva skretanje vertikale u pravcu meridijana ili prvog vertikala od 0",0001.

Stubovi su poređani u 41 kružnu zonu. Mreža se na ravan karte projektuje u sistem koncentričnih kružnica i njihovih radijusa (slika 4). Za svaku ćeliju ove mreže po karti se sračuna srednja visina h. Ona je ujedno i srednja visina stuba čiji presek sa ravni karte i jesu ivice ćelija. Sa tom srednjom visinom računa se skretanje koje izaziva stub po formuli

$$d'' = 0'',00773 \frac{\delta}{\delta_o} KLh \qquad (13)$$

gde je δ gustina stuba,

δ_o — srednja gustina Zemlje,

K i L — konstante; od K zavisi azimut radijusa, a od L — poluprečnik.

S obzirom da su K i azimut međusobno zavisni, mreža mora imati odgovarajuću orijentaciju.

Da se mreža ne bi crtala na karti oko svake tačke, ona se jednom uradi na providnoj podlozi i polaže na kartu, pa se može koristiti za određivanje skretanja i po meridijanu i po prvom vertikalu.

5.2.5. Praktična primena na našu mrežu

Kod naših računanja obuhvatili smo teoriju do radiusa 1962,4 km od razmatrane tačke. Preko toga nismo išli jer su uticaji daljih zona dosta slabi i malo se menjaju od tačke do tačke. Za dubine kompenzacije usvojene su vrednosti: 231,3; 120,9; 113,7; 96,0 i 55,92 km.

Radi ispitivanja koja od ovih dubina najbolje odgovara za našu zemlju, uporedio sam odstupanja vertikala dobijena astronomsko geodetskim i izostazijskim postupkom. Najbolje slaganje je dobijeno za krajnje vrednosti T — 55,92 i 231,3 km, i to:

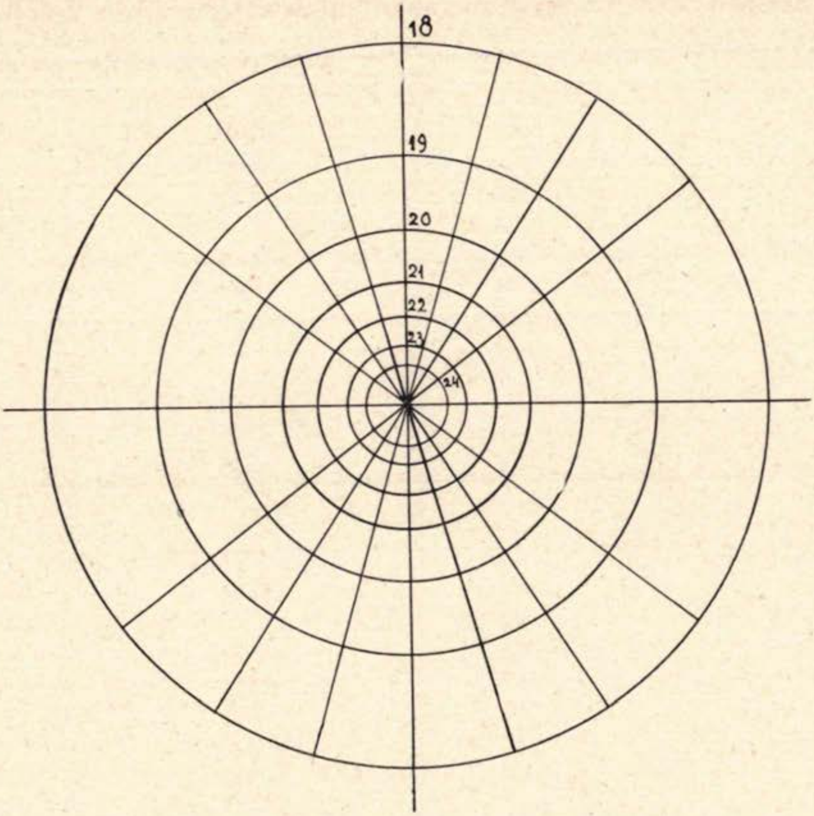
	55,92 km	231,3 km
ξ	8 slučajeva	9 slučajeva
η	9 slučajeva	8 slučajeva

Opredelio sam se za dubinu od 55,99 iz dva razloga:

a) ova veličina se bolje slaže sa činjenicama do kojih je došla savremena geofizika;

b) kod nje se i sva ostala odstupanja dobijena na gornja dva načina slažu po znaku, dok za dubinu T = 231,3 ne slažu.

Slika 4.



U tablici 4 date su uporedne vrednosti astronomsko-geodetskih skretanja vertikala, izostatičkih popravki i popravljenih slobodnih članova jednačina (7).

Tablica 4 pokazuje:

— da je cela teritorija naše zemlje delimično kompenzirana i da je primena izostatičkih popravki prema tome opravdana;

— kompenzacija je različita za razne oblasti;

— da je korišćenjem ovog metoda srednje relativno skretanje po meridijanu i prvom vertikalu, smanjeno za jednu trećinu;

— da spoljnje neravnine nisu jedini pa ni najvažniji uzročnik skretanja vertikala i da na pojedinim mestima ti drugi uzročnici preovlađuju (tačke: 4, 8, 13 i 14); i površnim konsultovanjem opšte geološke karte može se utvrditi da su to stari proboji težeg materijala i rudišta s. i. Srbije, i j. z. Makedonije i duž dinarskog bila.

Astronomsko-geodetska i topo-izostatička skretanja vertikala **Tablica 4**

Tačka	Astro-geod. + −	ξ η	Izost. skret. + −	Δξ Δη	Popravljeno + −	ξ' η'
1		0	—	2,837		—
		0	—	0,974		—
2	—	2,269	—	0,098	—	2,171
	+	2,780	+	0,255	+	2,525
3	+	0,544	—	0,181	+	0,725
	—	1,486	—	0,246	—	1,240
4	+	2,126	—	1,966	+	4,092
	+	5,466	+	3,446	+	2,020
5	—	1,925	—	1,130	—	0,795
	—	8,940	—	4,582	—	4,358
6	—	0,240	—	2,961	+	2,721
	—	8,443	—	4,509	—	3,934
7	—	1,358	—	0,730	—	2,038
	—	3,255	—	1,217	—	2,038
8	—	6,858	—	0,587	—	6,271
	—	2,769	—	7,026	+	4,257
9	—	8,156	—	3,056	—	5,100
	—	5,892	—	0,860	—	5,032
10	—	3,376	—	2,337	—	1,039
	—	3,631	—	1,066	—	2,697
11	—	23,093	—	17,741	—	5,352
	—	19,694	—	10,626	—	9,068
12	—	9,264	—	2,421	—	6,843
	—	8,569	—	1,188	—	7,381
13	—	3,809	—	2,226	—	1,583
	—	0,535	+	2,776	—	3,311
14	—	2,926	—	5,203	+	2,277
	—	0,510	+	2,815	—	3,325
15	—	11,261	—	3,159	—	8,102
	—	2,788	—	2,790	+	0,002
16	—	4,437	+	0,152	—	4,589
	—	3,612	—	1,949	—	1,663
17	—	0,945	—	4,407	+	3,462
	+	4,169	+	3,502	+	0,667
18	—	9,857	—	2,417	—	7,440
	—	3,111	+	0,096	—	3,207
19	—	1,395	—	0,574	—	0,821
	—	1,303	—	0,062	—	1,241
$\Sigma\xi^2 + \Sigma\eta^2 =$		1 797,784				609,798
Sredina			—	2,835		
			—	1,274		

Razumljivo je da izostatička kompenzacija nikada ne može biti potpuna. Čim počne, mnogi prirodni činioci počnu da slabe njeno delovanje uz istovremeno stvaranje uslova za započinjanje na drugom mestu. Uzmimo napr. neku planinsku formaciju A (slika 3). Još u toku njenog formiranja na nju deluje sunce, mraz, vetar, kiša, led... razaraju je po površini i u unutrašnjosti i razoreni materijal prenose na drugo mesto. Pod njegovom težinom započinje proces kompenzacije na tom novom mestu. Tako se Zemlja stalno menja — ona živi i obnavlja se.

Nakon uvođenja popravki iz tablice 4, slobodni članovi f u tablici 2 izmeniće se još i za promenu koordinata početne tačke 1. Koeficijenti a i b jednačina (7) ostaju isti kao u tablici 2. Posle formiranja i rešenja normalnih jednačina, za koordinate početne tačke 1 dobiće se sledeće popravke:

$$\xi_1 = -\ 0'',738$$

$$\eta_1 = +\ 3,016$$

$$m_{\xi_1} = m_{\eta_1} = \pm\ 0,811$$

$$dA_1 = +\ 2'',985$$

$$m_{A_1} = \pm\ 0,790$$

Koordinate ostalih tačaka su se takođe izmenile u odnosu na čisto astronomsko-geodetsko rešenje, pa upoređenje starih i novih koordinata na Beselovom elipscidu daje sliku (vidi tablicu 5) na strani 174.

Odavde zaključujemo da je naša stara triangulacija bila pomerena prema severu za 0'',694 ± 0'',282 (21,5 m), a prema istoku za 18'',691 ± 0'',544 (409 m). U odnosu na astrogeodetsko rešenje razlika je: po širini 2'',557 i po dužini — 1'',805. Smatram da je ovo rešenje prihvatljivije i realnije, jer su u njemu dobrim delom eliminisani uticaji lokalnih anomalija, tj. rešenje je dobijeno preko zaglađenog geoida. Krednja kvadratna greška za ovu procenu dobijena je iz odstupanja od aritmetičke sredine.

Sasvim je razumljivo da bi gravimetrijsko određivanje skretanja vertikala po V. Majnesovoj formuli dalo još bolje rezultate. Ona daje realnu atrakciju *svih* — vidljivih i nevidljivih — anomalnih masa, koje nikakvom drugom šemom ne možemo obuhvatiti tako dobro. Na putu smo da primenimo i taj način.

Napomena 1.

U toku rešavanja prednjih zadataka uočeno je da su koeficijenti a i b' jednačina (7) za malu zemlju, kao što je naša, sasvim bliski jedinici, a koeficijenti [aa] i [bb] kvadratnih jednačina skoro jednaki broju tačaka, odakle sledi [af] ≈ [f], [bf] ≈ [f']. Koeficijenti a' i b su veoma mali i suprotnog znaka u svakoj jednačini, pa je [ab] takođe neznatno. Naše normalne jednačine za astro-geodetsko rešenje su:[1])

1) Primer dajem za astro-geod. rešenje, jer se u Tablici 2 nalaze svi potrebni podaci. Te podatke za topo-izost. rešenje nisam navodio radi uštede prostora ,a postupak je isti kao i kod astro-geodetskih rešenja.

$$18{,}995\ \xi_1 - 0{,}0422\ \eta_1 - 88{,}7431 = 0;\ [f] = 88{,}503$$
$$18{,}9801\ \eta_1 - 66{,}7055 = 0;\ [f'] = 62{,}123$$

Zbog toga se približno može napisati.

$$\xi_1 \approx -\frac{\Sigma f'}{n} \qquad \eta_1 \approx -\frac{\Sigma f}{n}$$

gde je n — broj Laplasovih tačaka uzetih u obzir.

Za naš slučaj dobijamo:

$\xi_1 = +4'', 658$ $\qquad$ $\eta_1 = +3'', 255$

Iz strogo rešenja: 4,663 $\qquad$ 3,525

Upoređenje geodetskih koordinata Laplasovih tačaka na Beselovom elipsoidu po staroj i novoj orijentaciji (uvedene topo-izostatičke popravke)

Tablica 5

Tačka	Razlika po širini		Razlika po dužini	
	±	B staro-B novo	±	L staro-L novo
1	+	0,671	+	20,319
2	+	0,961	+	19,038
3	+	0,927	+	18,557
4	+	0,959	+	18,444
5	+	0,884	+	18,405
6	+	1,191	+	18,251
7	+	1,195	+	18,207
8	+	0,759	+	18,098
9	+	0,722	+	18,224
10	+	0,652	+	18,216
11	+	0,634	+	18,290
12	+	0,618	+	18,416
13	+	0,357	+	18,486
14	+	0,468	+	18,667
15	+	0,275	+	19,029
16	+	0,319	+	19,117
17	+	0,294	+	19,261
18	+	0,515	+	19,039
19	+	0,796	+	19,056
Srednja	+	0,694	+	18,691
	±	0,282	±	0,544

Napomena 2

Iz gornjeg proizilazi da sve Laplasove tačke uzete u obzir kod orijentacije podjednako utiču na tačnost orijentacije i to približno sa 1/n svog slobodnog člana. Zbog toga, u ovom postupku površinskog pokrivanja teritorije Laplasovim tačkama, nema nikakvog smisla ulagati posebne napore za postizanje izuzetne tačnosti astronomskih merenja na tački unapred izabranoj za početnu. To proističe i iz rečenog u 4.1. d — da se kod ovog načina »sve Laplasove tačke uzimaju ravnopravno i ma koju od njih uzeli za početnu — za nju i sve ostale uvek će se dobiti identične vrednosti koordinata«.

Po gornjoj formuli to možemo približno proveriti. Ako npr. za početnu tačku uzmemo T_k, slobodni članovi f i f' svih ostalih tačaka će se promeniti. Pošto je to mala translacija i veoma malo rotacija, ove promene će iznositi ($-f_k$) po meridijanu i ($-f'_k$) — po prvom vertikalu. Popravke astronomskih koordinata za T_1 će približno biti:

$$\xi_k = -\frac{\sum_{1}^{k-1} f_i + \sum_{k+1}^{n} f_j}{n} + f_k$$

$$\eta_k = -\frac{\sum_{1}^{k-1} f'_i + \sum_{k+1}^{n} f'_j}{n} + f'_k \tag{14}$$

Uzmimo npr. za početnu tačku 4 (Tabela 2).

$\xi_4 = +6'',895$ (iz izravnanja $+6'',674$); $\eta_4 = +9'',023$ ($8'',976$)

Početna tačka 11:

$\xi_{11} = -19'',651$ (19,205); $\eta_{11} = -17'',461$ (16,160)

Za tačku 12 imaćemo:

$\xi_{12} = -5'',094$ (4,544); $\eta_{12} = -5'',765$ (5,298)

Razlike nastaju zbog:

- — približnosti formule,
- — zbog toga što se smatra da je izvršena prosta translacija, a nisu usvojene stvarne promene geodetskih koordinata ostalih tačaka kada se izmene koordinata početne tačke (v. formulu 4').
- — neuzimanja u obzir rotacije, izazvane translacijom za f_k; ona je jednaka $f'_k \times \operatorname{tg} \varphi_k$; zbog toga se po ovoj formuli dobiju veće razlike po širini za tačke istočno, odnosno zapadno od T_1, a po dužini — severno, odnosno južno od T_1; T_4 — istočna, T_{11} — južna, T_{12} — jugozapadna,
- — greška u računanju.

Napomena 3.

Orijentacija mreže zavisi od usvojenog referenc elipsoida. To proizlazi iz gornje približne formule i napomene 2.

Zaista, dokazano je i logično da sa istim podacima opažanja moramo za sve Laplasove tačke dobiti iste koordinate, bez obzira koju od njih uzeli za početnu. Tako dobijene koordinate su geodetske — fiksne za dalji rad. Razumljivo je, a to se vidi i iz (4'), da se za neku tačku neće dobiti iste koordinate ako ih računamo od iste tačke T_1 (B_1, L_1) na raznim elipsoidima. Odatle proističe i gornja tvrdnja.

Računanja na elipsoidima Besela i Krasovskog ovo su i pokazala.

Istina, na prostoru koji pokriva triangulacija postoji jedna tačka čije koordinate ne zavise od elipsoida.

Znači, ako želimo da redukcije merenja budu male, tj. da se merenja na površini Zemlje svedena na geoid što manje razlikuju od merenja svedenih na elipsoid na kojem vršimo računanja, onda se, sem orijentacije po položaju i visini, mora voditi računa i o obliku i dimenzijama elipsoida.