TAHIMETRIČKE TABLICE I KUTNA EKSTRAPOLACIJA

Dr NIKOLA NEIDHARDT — Zagreb

Indirektno mjerenje dužina znatno je napredovalo poslije Reichenbacha (1810.) Primijenjeni su stakleni klinovi, precizni teodoliti, konstruirani su razni duhoviti autoredukcioni uređaji, a u novije doba telurometar, distomat itd. itd. Ali usprkos tom snažnom napretku, izgleda, da je još uvijek najmasovnije u upotrebi o b i č a n tzv. Reichenbachov način. Skoro svaki geodetski durbin odnosno durbin na geodetskom instrumentu udešen je i za takovo optičko mjerenje. Dodatkom daljinomjernih niti na diafragmu, bez naročitog troška, gotovo usput, instrument je osposobljen i za mjerenje dužina. Koji proizvođač instrumenata će propustiti, da ne stavi taj jednostavan dodatak na svoje teodolite, nivelire, busolne instrumente?

Za r e d u k c i j u optički mjerenih dužina po Reichenbachu upotrebljavaju se tablice, nomogrami, logaritmari, grafikoni. Najviše su u upotrebi tahimetričke tablice i logaritmari. Tačnost tablica uglavnom je nešto veća nego logaritmara. A zašto se ipak logaritmar dosta upotrebljava? Optimum njegove primjene leži tamo, gdje se odmah na terenu vrši redukcija npr. kod rada s geodetskim stolom, vojničkih mjerenja i slično. Tahimetrički logaritmar lakše je po terenu nositi i upotrebljavati nego tablice. Potonje su historijski i zamijenile logaritmar, kad je u civilnoj geodeziji teodolit zamijenio geodetski stol i kad se počelo snažnije ekonomizirati s radnom snagom. Terenski dio posla je, naime, dragocjeniji i skuplji od kancelarijskog. Potrebno je povoljno vrijeme. Po mraku, kiši, zimi, ne može se na terenu raditi, ali može u kancelariji. Na terenu potrebni su i pomagači, dok u kući geodet i sam može računati, kartirati i sl. Dok u trošak terena idu geometar i pomagači, u trošak ureda uglavnom samo geometar. A računanje na terenu odugovlači skuplji terenski rad. Dok geodeta tamo računa, pomagači eventualno nisu dovoljno iskorišteni odnosno zaposleni.

Zavod za geodeziju Šumarskog fakulteta u Zagrebu ima razne tahimetričke t a b l i c e. Razlike su u konstrukciji, načinu upotrebe i opsegu. Želja mi je, da ovdje malko kompariram, kombiniran i eruiram povoljnija rješenja.

Evo npr. tablice »Tacheometric tables« F. A. R e d m o n d a, profesora univerziteta Hongkong (London 1931), svrstane su osnovno po kutovima (a ne po dužinama *Kl* odnosno *100 l* kao Jordanove, gdje je l

odsječak na letvi, a K tzv. multiplikaciona konstanta). Tj. na čelu poje-
20 minuta. Dakle prva stranica vrijedi za $0°20'$, druga $0°40'$ itd. dok kod
dine stranice nije masno otisnuto $Kl = 100\ l$ već visinski kut α od *20* do
Jordana prva stranica vrijedi za $Kl = 10$, druga za *11* itd. Redmond preporuča, da se vertikalni krug naravnava na punih $20'$ pa tek onda čita letva i horizontalni kut. Time, što se vertikalni kutevi koriste samo na $20'$, a ne npr. od minute do minute, tablice doduše postaju manje po opsegu, ali je pitanje, da li je i postupak s njima ekonomičniji? Rekli smo, da je t e r e n s k i dio posla za ekonomiku važniji. Ako način, koji Redmond preporuča, imalo produžuje terenski rad, on nije ekonomičan. Meni se čini, da produžuje. Evo zašto:

1. najprije se vizura uperi u letvu (bez čitanja letve),
2. na vertikalnom krugu naravna najbližih punih $20'$,
3. to se upiše u zapisnik,
4. ponovno se gleda u durbin pa a) čita i upisuje letva ili b) čita i zapiše srednja nit, onda naravna donje čitanje na okrugao iznos i čita i zapiše gornje čitanje odnosno l,
5. letvonoši daje znak dalje«,
6. čita i upiše vodoravni krug.

Kad se upotrebljavaju Jordanove tablice način je rada nešto drugačiji tj.:

1. vizira,
2. čita letva,
3. »dalje«,
4. čita vertikalni i vodoravni kut.

Otpada u r a v n a v a n j e vertikalnog kruga na okruglo čitanje, pa je po svoj prilici za izvjestan dio vremena postupak kraći, naročito kod modernijih tahimetara, kod kojih se krugovi optički lako čitaju. Može se i dogoditi, da se ravnanjem (na okruglih $20'$) poremeti situacija, pa se letva ne može više dobro čitati (zarašten teren) i mora ponovno ravnati, eventualno mijenjati već upisani iznos vertikalnog kuta i slično.

U postupku po Jordanu »dalje« dolazi prije, pa letvonoša ima nešto više vremena za izbor nove tačke i postavljanje letve. Kod rada samo s jednom letvom redovno će to biti dobitak, a ne gubitak.

Redmondove tablice u svome osnovnome dijelu (Tabela I) za kutove $0°20'$, $0°40'$ . . . . . . $19°40'$, $20°00'$ i odsječke letve ($100\ l = D'$) *50, 51,* . . . . . *849, 850* daju reducirane dužine d i visinske razlike h. S kraćom tablicom II proširenje je do $30°$. Za kuteve $20°00'$, $20°20'$ . . . . $29°40'$ i D' *100, 200,* . . . . *900* u toj se tablici vade d i h. Ali, npr. za $Kl = 35{,}7$ treba onda vaditi za *300*, za *500* i *700*, rezultate dijeliti sa *10*, sa *100* i *1000* i zbrojiti. Ti su iznosi doduše na istoj stranici, ali zbrajanje ipak nešto odugovlači i može biti izvorom pogrešaka.

Dalnja kraća dodatna tablica III Redmonda analogna je tablici II za kuteve na $10'$ i D' *100, 200,* . . . . *900*. Upotrebljava se onda, kada se ne može raditi sa $20'$.

Tablice Redmonda su u engleskim stopama. Međutim to ništa ne smeta upotrebi i u bilo kojoj drugoj jedinici mjere npr. za rad u metrima, jer su stope tretirane (dijeljene) decimalno.

Na dnu svake strane spomenute Tablice *I* nalazi se *k sin*... i *k cos*... za pripadni α dotične stranice, gdje je *k* adiciona konstanta. Umnošci *k sin* i *k cos* očitaju se u dalnjoj dodatnoj tablici *IV* za odgovarajuće *k* i olovkom upisuju na stranicama osnovne tablice *I*. Dodavaju se iznosima $100\ l\ cos^2\alpha$ odnosno $100\ l\ ^1/_2 sin\ 2\alpha$, kada adiciona konstanta nije nula.

S Redmondovim tablicama se bez nekih poteškoća nesamo *h* nego i *d* može dobivati na dvije decimale.

Najpoznatije tablice za redukciju svakako su tablvice Dr W. Jordana. U izdanju bivšeg Ministarstva saobraćaja izašle su kod nas god. 1948. (»Dr W. Jordan: Pomoćne tablice za tahimetriju«, Beograd 1948., Saobraćajno izdavačko preduzeće Ministarstva saobraćaja). Ne ću ih prikazivati, jer su i odviše poznate. Kako je rečeno, osnovno svrstavanje nije po visinskim kutevima već po dužinama $K\,l = 100\,l$. Takova konstrukcija tablica ima i svoj nedostatak. Noviji teodoliti obično imaju vertikalni krug udešen za čitanje zenitnih kutnih udaljenosti (z), a ne kutnih udaljenosti od horizontale (α). Argumente, s kojima se vadi iz tablica, zvati ću ulazima. Sve tahimetričke tablice su dvoulazne. Kod Redmonda je prvi ulaz α, drugi *l* odnosno *100 l* ili *K l*, Kod Jordana prvi je *100 l*, drugi α. Teoretski je to svejedno, ali praktički nije. Neki instrumenti daju neposredno α, drugi z. Korisno je, da se tablice što lakše mogu upotrebljavati za oba slučaja. Kod Redmonda je na čelu stranice npr. kut $12^0 40'$ a ujedno (gore u ćoškovima) $77^0 20'$ i $102^0 40'$. U slučaju da se mjeri z, kod Jordana se najprije mora napamet odbiti z od 90^0. To ne predstavlja veću teškoću, ali ipak lakše dolazi do pogrešaka. Ne toliko kod depresija koliko kod elevacija, jer se kod depresija od z odbija okrugao broj tj. 90^0 i uzme kut sa znakom minus, dok se kod elevacija moraju odbijati nesamo stupnjevi već i minute.

Redomndove tablice imaju svega 256 stranica, Jordanove 246.

Dalnja vrsta tablica su npr. »Tablice za tahimetriju« Vuka Kuzmanovića. Izašle su g. 1957. u Titogradu. Obasižu samo 169 stranica, dakle 77 stranica manje od Jordanovih a područje primjene im je do 45^0 nagnutosti vizure (a ne amksimum do 30^0 kao kod Jordana). Glavni ulaz je kut. Na pr. na izvjesnoj parnoj i susjednoj neparnoj stranici na čelima je masno otisnuto 17^0. Pod takovim naslovom su stupci za $17^0 10'$, $20'$... $17^0 50'$ te na neparnim stranicama iznosi $\Delta d = (Kl + k)\ (1 - cos^2\alpha) = (Kl + k)\ sin^2\alpha$ za $Kl + k = 10, 11, \ldots 151$, a na parnim analogni $h = (K\,l + k)\ ^1/_2\ sin\ 2\alpha$. Izvađeni $\Delta\,d$ moraju se odbijati od $D' = K\,l + k$ da se dobiju vodoravne udaljenosti *d*. Horizontalne udaljenosti i visinske razlike dobivaju se neposredno na dvije decimale. U 3 zadnja stupca svake stranice nalaze se male tablice za interpolaciju (slično »Partes proportionales« log. tablica) tj. koliko se za jedinične minute vertikalnog kuta i posebno za jedinične decimetre od $K\,l + k$ mora dodati izvađenim iznosima $\Delta\,d$ i *h*. Prednosti: tablice su sažetije, a područje (do 45^0) i tačnost veći. Ali više se mora ručno (ili napamet) računati tj. *dodavati* za jedinične minute i *dodavati* za jedinične decimetre a još i *odbijati* Δd.

Dalnja vrst su tablce, koje daju prirodne vrijednosti $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ i $^1/_2 \sin 2\alpha = \sin\alpha \cos\alpha$, koje se strojem za računanje množe sa $K\,l$ ili $(K\,l + k)$. Obično su takove tablice na 5 decimala. Od sviju tahimetričkih tablica one su najkraće (npr. samo 50 stranica u »Sinus und Tangentenfunktionen und Tachymetertafeln« F. Balzera i H. Dettwilera, Stuttgart 1950., u centezimalnoj podjeli od minute do cent. minute).

Jordanove tablice su za 30^0. Kuzmanovićeve i mašinske do 45^0. Činjenica je, da nagibi preko 30^0 rijetko dolaze. Oni su iznimni. Razmišljao sam stoga o tome, da li se može naći kakav jednostavan način, na se tablice, izrađene npr. samo do 30^0 mogu upotrebiti iznimno i preko 30^0. Dakle pitanje ekstrapolacije za kuteve. Za ekstrapolaciju po $K\,l$ je lako. Ako je npr. $K\,l = 180$, a Kuzmanovićeve tablice imaju samo do *151 m*, vadi se pod *100* i pod *80* te rezultati zbroje. Dakle posve je jednostavna ekstrapolacija za $K\,l$. Ali isto takova linearna ekstrapolacija za kuteve α nije moguća. Našao sam ipak rješenje uz pomoć dopunskog kuta *do* 45^0. Odbije se α od 45^0 tj. $x = 45 - \alpha$ i pod tim kutem x vadi u tablicama. Tražena reducirana dužina je onda:

$$d = \frac{1}{2} D' + h_x \tag{1}$$

a visinska razlika:

$$h = d_x - \frac{1}{2} D' \tag{2}$$

gdje su d_x i h_x vrijednosti iz tablica za kut x, a D' je $K\,l$, $100\,l$ odnosno $K\,l + k$.

Dokaz za formulu (1):

$\alpha = 45 - x$, $\cos\alpha = \cos 45 \cos x + \sin 45 \sin x$,

$\cos^2\alpha = \cos^2 45 \cos^2 x + 2 \cos 45 \cos x \sin 45 \sin x + \sin^2 45 \sin^2 x$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin 2x \tag{3}$$

$$Kl \cos^2\alpha = \frac{1}{2} Kl + \frac{1}{2} Kl \sin 2x = \frac{1}{2} D' + h_x \tag{1}$$

Dokaz za formulu (2):

$\alpha = 45 - x,\ 2\alpha = 90 - 2x,\ \sin 2\alpha = \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$

$$\frac{1}{2}\sin 2\alpha = \frac{1}{2}\cos^2 x - \frac{1}{2}(1 - \cos^2 x)$$

$$\sin\alpha\ \cos\alpha = \cos^2 x - \frac{1}{2} \qquad (4)$$

$$Kl\ \frac{1}{2}\sin 2\alpha = d_x - \frac{1}{2}D' \qquad (2)$$

U Gorskom Kotaru, u šumi Zalesina, reambulirane su međe. Teren težak. Metoda snimanja bila je tahimetrička. Od 436 prvih vizura samo je jedna bila preko 30°. Takav zaista izniman slučaj može se jednostavno ekstrapolirati po formulama (1) i (2) pa su dovoljne tablice *30°* ili čak samo do *22°30'* ili *23°*. U spomenutom slučaju bilo je vizura između *20°* i *30°* samo cca *6%*.

Formule (1) i (2) mogu se eventualno upotrebiti i kao neka kontrola (makar su tablice i izrađene do *45°*), jer mora biti:

$$d + h = d_x + h_x \qquad (5)$$

odnosno za $\Delta d = D' - d$:

$$\Delta d = \frac{1}{2}D' - h_x \qquad (6)$$

$$h + \Delta d = d_x - h_x \qquad (7)$$

$$\Delta d = (d_x - h_x) - \qquad (8)$$

Svi tipovi tablica, koje sam gore nabrojio, imaju svoje prednosti i nedostatke. Da makar grubo ispitam *tačnost*, izračunao sam 20 raznolikih primjera s pojedinim tipom tablica (uz $K = 100$ i $k = 0$). Iznosi $K\,l$ bili su do *120 m*, a α do *24°*. Tablica za mašinsko računanje, jer je na 5 decimala, dala je praktički bespogrešne rezultate (2 decimale). Kuzmanovićeve tablice dale su srednju pogrešku reducirane dužine $m_d = \pm 0{,}7$, a visinske razlike $m_h = \pm 1{,}1$ centimetara, Jordanove uz pažljivo interpoliranje $m_d = \pm 3{,}4$, $m_h = \pm 0{,}7$, tahimetrički logaritmar Neuhöfer *50 cm* $m_d = \pm 7{,}5$, $m_h = \pm 2{,}4$, sve u centimetrima. Kako vidimo Jordanove tablice po tačnosti baš mnogo ne zaostaju, premda daju dužine samo na jednu decimalu.

Iznos m_d = *cca 3 cm* za Jordana prilično odgovara slijedećoj teoriji. Neka je i interval zaokruživanja (kod nas *1 dm = 10 cm*). Od $A - 0{,}5\,i$ do $A + 0{,}5\,i$ zaokružuje se na A. Odstupanja x od A su dakle pogreške zaokruživanja. U intervalu *—0,5i* do *+0,5i* svaki x jednako je vjerojatan. Srednju pogrešku onda daje:

$$m^2 = \frac{\int_{-0,5i}^{+0,5i} x^2\,dx}{\int_{-0,5i}^{+0,5i} dx} = 0{,}083\ i^2$$

$$m = \pm\ 2{,}9 \sim 3\ \text{cm}$$

Razlika između različitih citiranih sredstava za redukciju nije toliko u tačnosti već u *utrošku vremena*. Da potonju komponentu ekonomičnosti malko ispitam, bilježio sam i taj utrošak kod računanja spomenutih zadataka. Kuzmanovićeve tablice iziskuju više vremena dok mašinske traže gotovo isto toliko vremena kao Jordanove.

Kod tahimetričkih snimanja imamo zapravo različita tri stepena, tri markantno različite grupe tačaka. Prvu grupu čine poligonske tačke kao najvažnije. Na njima počiva izmjera, one čine geodetski skelet. Za njihovo određivanje potrebna je i veća tačnost. Druga grupa su *posjedovne* detaljne tačke, međašne tačke parcela i sl. Potrebna je je neka srednja tačnost. Konačno najniža grupa su tačke *konfiguracije* terena. Zar ne bi bilo dobro, da se i tačnost reduciranja udesi prema tome tj. poligonske strane da se što tačnije, međašne i konfiguracijske manje tačno ali zato adekvatno *brže* računaju.

Može se zamisliti rad npr. sa tri vrste tablica. Za poligone da se koriste tablice za mašinsko računanje i ovo vrši po tačnijim formulama $d = K\,l\,\cos^2\alpha + k\cos\alpha$ i $h = K\,l\,{}^1/_2\,\sin 2\alpha + k\sin\alpha$. U istu svrhu mogu vrlo dobro služiti Kuzmanovićeve tablice s time, da se $k\sin\alpha$ i $k\cos\alpha$ na stranicama upišu pri dnu (a zenitne udaljenosti pri vrhu). Detalj parcela kao drugostepene tačke da se računaju po približnim formulama $\Delta d = (K\,l + k)\sin^2\alpha$ i $h = (K\,l + k)\,{}^1/_2\,\sin 2\alpha$ s tablicama Kuzmanovićevim ili Jordanovim, dok konfiguracijske s Jordanovim bez neke brižnije interpolacije. Da se ne mora raditi sa dvije vrsti tablica, možda bi dobro bilo npr. Kuzmanovićeve tablice dopuniti tako, da mogu brzo i jednostavno služiti za sva tri stupnja tačnosti, odnosno u vezi s time i u tri stupnja brzine. Ali, kad imamo mašinu za računanje, izgleda, da je najsvrsishodniji rad s mašinom odnosno zbog prekidanja zamornog i jednoličnog rada možda bi dobro bilo pomagala i mijenjati.

Ako se žele (npr. za kakav priručnik) što sažetije tahimetrijske tablice, onda bi odgovarale tablice za mašinsko računanje ali samo na 4 decimale i do $\alpha = 22^0 30'$ s time, da se slučajevi preko $22^0 30'$ vade uz pomoć formula (3) i (4).

ZUSAMMENFASSUNG

TACHYMETRISCHE TAFELN UND WINKELEXTRAPOLATION

Zuerst werden verschiedene Tafeln kompariert. Bei den einen (Jordan) bilden die Beträge $D' = Kl = 100\ l$ oder $Kl + k$ (K Multiplikationskonstante, k Aditionskonstante, l Lattenabschnitt) den Haupteingang, bei den anderen aber (Kuzmanović) die Höhenwinkeln α beziehungsweise Zenitdistanzen z. Moderne Instrumente sind meistens für Zenitwinkel eingestellt und die zweite Kombination kämme in den Vordergrund. Solche Tafeln, welche Langenunterschiede $\Delta\ d = D' - d = D' \sin^2\alpha$ geben, können mit Interpolationen (für einzelne Minuten und Dezimetern) leicht für Längen d sowie Höhenunterschiede h zwei Dnzimalstellen sichern. Die Genaigkeit ist dabei höher aber die Zeitverwendung beim Gebrauche grösser. Genaueste Resultate geben Tafeln natürlicher Werte $\cos^2\alpha$ und $\sin\alpha\ \cos\alpha$ beziehungsweise $\sin^2 z$ und $\sin z \cos z$ (Balzer) mit Maschienenrechnen.

Winkeln α über 30^0 kommen ausnahmsweise vor. Man kann sich in solchen Fällen mit dem Winkel $x = 45 - \alpha$ helfen. Die gesuchte horizontale Disstanz ist dann $d = D' \cos^2\alpha = 0{,}5\ D' + h$ und der Höhennunterschied $h = d\ - 0{,}5\ D'$ wo d und h aus den Tafeln für x entnommen werden. Die Beweise siehe Seite Di Tafeln Bräuchten also nur bis $22^0 30'$ gehen, da man darüberhin mittels solcher Extrapolation auskommen kann.

MOLIMO DA SE ISPRAVI

U članku O TOLERANCIJI ČITANJA NA LETVI REICHENBACHOVIM DALJINOMJEROM objavljenom u Geodetskom listu br. 10—12 god. 1966. potkrala se je štamparska pogreška, te je u prvom pasusu, u četvrtom redu iza riječi ± 1 mm, izostavljen dio teksta (dolje naveden kurzivom), čime se mijenja smisao članka.

Ispravan tekst treba glasiti:

Po »Pravilniku za državni premer« (II i III dio), Beograd 1958., propisuje se, da kod mjerenja sa daljinomjerom sa tri niti čitanje na letvi preko srednje niti mora biti jednako aritmetičkoj sredini čitanja preko donje i gornje niti, a odstupanje smije naviše ± 1 mm *za poligone strane (čl. 48—II), a najviše ± 2 mm za detaljne tačke* (čl. 101—III), bez obzira na dužinu i nagnutost vizure.