ORIJENTACIJA NAŠE TRIANGULACIJE

Abdulah MUMINAGIĆ, dipl. inž. — Beograd

(Kraj)

4. Nova orijentacija naše mreže

4.1. Sastavljanje jednačina za orijentaciju

U 2.5 rekli smo da se, suština orijentacije sastoji u određivanju koordinata jedne tačke i azimuta neke strane, (obično koja iz nje polazi)[1] ali tako, da se geodetske koordinate svih ostalih tačaka, koje se od nje računaju, najbolje podudaraju sa astronomskim koordinatama korespodentnih tačaka. Preostale razlike nastaju zbog **skretanja vertikala**, koje se iz ovih razlika najsigurnije i određuju.

Fundamentalni podaci triangulacije mogu se odrediti na više načina:

a) prostim usvajanjem astronomskih koordinata za geodetske — orijentacija po jednoj tački;

b) određivanjem izravnatih vrednosti iz koordinata više Laplasovih tačaka na nekom profilu (obično pri gradusnim merenjima);

c) određivanjem izravnatih vrednosti koordinata centralne tačke iz njenih astronomskih vrednosti i nekoliko bliskih okolnih Laplasovih tačaka raspoređenih po horizontu;

d) određivanjem izravnatih vrednosti svih Laplasovih tačaka pravilno raspoređenih po mreži — površinski način.

Opredelio sam se za ovaj poslednji način, jer:

— kod njega se ne postavlja pitanje izbora fundamentalne tačke; sve Laplasove tačke ovde se uzimaju ravnopravno i ma koju od njih uzeli za početnu, za nju i sve ostale uvek će se dobiti identične vrednosti koordinata;

— po ovom načinu se zaista dobija najprikladnija orijentacija referenc-elipsoida za čitavu teritoriju koju triangulacija pokriva.

4.2. Metode obrade triangulacije

Postojeće triangulacijske mreže obrađuju se uglavnom po dve metode:

1. **Metodi razvijanja**, u kojoj se sva merenja uglova i dužina svode na geoid, a sa njima se vrše dalja računanja na elipsoidu — razvijanje na elipsoid —, kao da su svedena na elipsoid; zbog ovoga nastaju greške u rezultatima — koordinatama — koje se manifestuju kao deo odstupanja vertikala; upravo to je razlog što se u ovoj metodi zahteva da se za referenc — uzme najprikladniji elipsoid; u tom slučaju će i greške redukcije biti najmanje (v. 3).

---

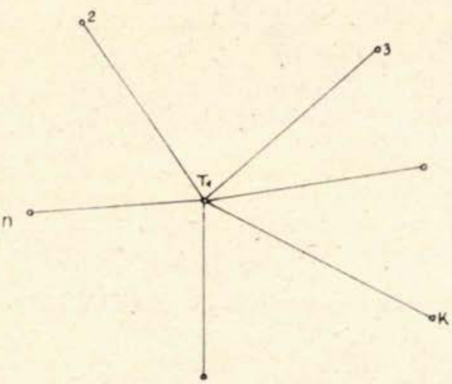
[1] Fundamentalni podaci triangulacije.

2. **metodi projektovanja** u kojoj se sva merenja svode, projektuju, na elipsoid normalima na njegovu površinu, pa su greške razvijanja isključene. Za njenu primenu je neophodna prethodna orijentacija i obrada mreže, izvršen astronomski ili **astro-gravimetrijski nivelman**, tj. određena visina geoida iznad (ispod) elipsoida.

Prema tome — svaka nova obrada triangulacije mora se prvo izvršiti po metodi razvijanja.

4.3. Formule za orijentaciju po metodi razvijanja

Pretpostavimo da na celoj teritoriji države imamo mrežu triangulacije izravnatu za geometrijske uslove — na elipsoidu sa velikom poluosom a_0 i spljoštenošću (α_0). Na odabranim tačkama mreže 1, 2, 3 . . . k . . . (sl. 2) izvršena su astronomska određivanja φ, λ i α.



Slika 2.

Astronomske koordinate jedne od ovih tačaka, npr. T_1, usvojimo za početne koordinate triangulacije. Počev, od nje sračunajmo na elipsoidu a_0, $[\alpha_0]$) geodetske koordinate svih ostalih tačaka B_k°, L_k° i azimut A° strane za koju je određen i astronomski azimut. Kao što je rečeno u 4.2. ove koordinate se neće slagati sa astronomskim za izvesne veličine ξ_k° i $d\lambda_k^\circ = \eta_k^\circ \sec\varphi_k$ i ξ_k° i η_k^0 obično nazivamo **komponente odstupanja vertikale.** Međutim u njih ulazi kako ono što je zaista odstupanje vertikale — različnost oblika i dimenzija referenc-elipsoida i geoida, neadekvatna orijentacija referenc-elipsoida, nehomogenost mase u unutrašnjosti planete —, tako i greške merenja i svođenja merenih veličina kao i greške nastale zbog primene metode razvijanja.

Postavimo zadatak da na osnovu ovih podataka hoćemo da eliminišemo uticaj nepravilno usvojenih oblika, dimenzija i orijentacije rerefenc-elipsoida, tj. želimo da odredimo najprikladniji elipsoid. On će karakterizovati:

velikom poluosom $\quad a = a_0 + da$

spljoštenošću $\quad (\alpha) = (\alpha_0) + d(\alpha)$.

Geodetske koordinate i azimut u tački K na ovom elipsoidu obeležićemo sa B_k, L_k i α_k komponente skretanja vertikala u odnosu na njega sa ξ_k i η_k. Zanemarujući greške u određivanju astronomskih vrednosti i u računanju B_K^0, L_K^0 i α_K^0, na svakoj tački mogu se postaviti jednačine:

$$
\begin{aligned}
B_K &= B_K^0 + dB_K = \varphi_K - \xi_K \\
L_k &= L_{k^0} + dL_k = \lambda_k - \eta^k \sec\varphi_k \qquad (5) \\
A_{k.i} &= A_{k.0}^{\ 0} + dA_{k\,i} = \alpha_{\ .i} - \eta_k \operatorname{tg}\varphi_k
\end{aligned}
$$

Uvrštavajući ovde (4) za dB^K i dL_K, posle jednostavnih transformacija dobija se:[1]

$$\xi_K = (\varphi_K - B_K^0) + \left(\frac{\partial B_K}{\partial B_1}\right)_0 \xi_1 + \left(\frac{\partial B_K}{\partial A_1}\right)_0 \eta_1 \operatorname{tg}\varphi_1 - \left(\frac{\partial B_K}{\partial a}\right)_0 da - \left(\frac{\partial B_K}{\partial (\alpha)}\right) d(\alpha)$$

$$\eta_K \sec\varphi_K = (\lambda_K - L_K^0) + \left(\frac{\partial L_K}{\partial B_1}\right)_0 \xi_1 + \left[1 + \left(\frac{\partial L_k}{\partial A_1}\right) \sin\varphi_1\right] \eta_1 \sec\varphi_1 - \qquad (6)$$

$$- \left(\frac{dL_K}{\partial a}\right)_0 da - \left(\frac{\partial B_K}{\partial (\alpha)}\right)_0 d(\alpha)$$

Ovakve jednačine sastave se za svaku astronomsku tačku. Njihovim rešenjem pod uslovom

$$\Sigma\xi^2 + \Sigma\eta^2 = \text{minimum}$$

dobijaju se četiri nepoznate: ξ_1, η_1, da i $d(\alpha)$. Dve poslednje su popravke dimenzija i oblika elipsoida. One bi se verovatno netačno odredile iz podataka samo za našu državu. Zbog toga smatramo da je pravilnije usvojiti jedan od savremenih elipsoida kao definitivan. U tom slučaju je $da = d(\alpha) = 0$. Onda se elementi orijentacije ξ_1 i η_1 određuju iz $2n$ jednačina vida:

$$\xi_K = a_K \xi_1 \pm b_K \eta_1 + f_K$$
$$\eta_K = a'_K \xi_1 + b'_K \eta_1 + f'_{K_1} \qquad (7)$$

gde je

$$a_K = \left(\frac{\partial B_K}{\partial B_1}\right) \text{ i } \qquad b_K = \left(\frac{\partial B_K}{\partial A_1}\right) \operatorname{tg}\zeta_1 \qquad f_K = \zeta_K - B_K \qquad (8)$$

$$a'_K = \left(\frac{\partial L_K}{\partial B_1}\right) \cos\varphi^K \; ; \qquad b'_K = \left[1 + \left(\frac{\partial L_K}{\partial A_1}\right) \sin\varphi_1\right] \frac{\cos\varphi_x}{\cos\varphi_1} \; ;$$

$$f'_K = (\lambda_K - L_K)\varphi_K$$

Uvrštavanjem ovako izvedenih vrednosti za ξ_1 i η_1 u (7), dobiju se odstupanja vertikala u svih k tačaka. Kontrola računanja se vrši normalno:

$$\Sigma\xi^2 + \Sigma\eta^2 = \Sigma f^2 - \frac{[af]\,[af]}{[a\,a]} - \frac{[bf.1]\,[bf.1]}{[bb.1]}\,. \qquad (9)$$

Ocenu tačnosti izvodi po formulama:

Srednja kvadratna greška jedinice težine:

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{\Sigma\xi^2 + \Sigma\eta^2}{2n-3}} \qquad (10)$$

a srednje kvadratne greške širine i težine:

$$m_B = \frac{m_0}{\sqrt{p_B}} \quad \text{i} \quad m_L = \frac{m_0}{\sqrt{p_L}} \qquad (11)$$

$$p_B = [aa.1] \quad \text{a} \quad p_L = [bb.1]$$

---

[1] Pošto je primenjena metoda razvijanja dužine su ostale iste, pa je otpao član sa ds.

4.4. Praktična primena izložene teorije na našu mrežu

U našoj mreži je, do pristupanja ovom radu, bilo opažano i obrađeno 19 parova Laplasovih tačaka. Pre svega su koordinate parova izravnate i svedene na jednu tačku. Tako se dobilo 19 Laplasovih tačaka, koje su dalje služile kao osnova za orijentaciju triangulacije po napred iznetoj teoriji.

Zatim su ove Laplasove tačke spojene lancima triangulacije I reda, koji su izravnati za geometrijske uslove. Počev od tačke T_1, čije astronomske koordinate i azimut u njoj usvojene za preliminarne fundamentalne podatke, sa izravnatim vrednostima uglova i dužina, sračunate su geodetske koordinate Laplasovih tačaka na Beselovom i elipsoidu Krasovskog.

Razlike astronomskih vrednosti i ovih geodetskih koordinata po (8) daju slobodne članove jednačina (7). Na osnovu geodetskih koordinata dobivene su i vrednosti koeficijenta a i b jednačina (7) po Helmertu /vidi (4) i (8)/, Krasovskom (5) i M. Burši (2).

Sve ove formule za našu državu dale su skoro indentične rezultate. Razlike se pojavljuju tek za po koju jedinicu treće decimale, što se uopšte ne odražava na rešenje. Za našu zemlju dovoljno tačno rešenje daju i uprošćene formule, u kojima se zanemaruju razlike između:

— dužine redukovane geodetske linije i same geodetske linije;

— dužina poluprečnika po meridijanu i prvom vertikalu;

— 1 i $\sqrt{1-e^2}$

— nule i korekcionih članova koji daju manje od jedne jedinice trećeg decimalnog mesta; oni su uglavnom i najsloženiji za računanje.

Greške koje zbog ovoga nastaju u svakom slučaju su daleko ispod onih koje se unose pogrešnim merenjima ili nesavršenstvom njihove obrade.

U tablici 2 dati su koeficijenti a i b i slobodni članovi za elipsoide Besela i Krasovskog. Zapravo, na osnovu rečenog u 3.4, koeficijenti **a** i **b** su za oba elipsoida isti. Razlikuju se samo slobodni članovi f.

Odavde su formirane normalne jednačine. Kao rezultat njihova rešenja dobijene su sledeće vrednosti popravki prvobitno usvojenih vrednosti B_1, L_1 i A:

	Elipsoid Besela	Elipsoid Krasovskog
$\xi_1 =$	+ 4",663	4",871
$\eta_1 =$	+ 3,357	3,525

	Elipsoid Besela	Elipsoid Krasovskog
$m_{\xi_1} = m_{\eta_1} =$	$\pm 1\overset{''}{,}308$	$\pm 1\overset{''}{,}333$
$dA_1 =$	4,71 δ	4,951
$m^{A_1} =$	$\pm$ 1,837	$\pm$ 1,872

Sa ovim vrednostima po (7) su sračunata odstupanja ξ_K i η_K u svih ostalih 18 tačaka i po (5) dobijene njihove geodetske koordinate po novoj orijentaciji.

Time bi posao orijentacije bio završen.

Tablica 2

Tablica koeficijenata jednačina za orijentaciju

Tačka	±	a a'	±	b b'	±	f f'	±	f f'
		Elipsoid Besela						Elipsoid Krasovskog
1		2		3		4		5
1	+	1,0000		—		—	+	—
		—	+	1,0000		—		—
2	+	0,9995	—	0,0075	—	2,269	—	1,667
	+	0,0073	+	0,9998	+	2,780	+	2,992
3	+	0,9997	—	0,0210	+	0,540	+	0,668
	+	0,0207	+	0,9995	—	1,486	+	0,889
4	+	0,9994	—	0,0334	+	2,126	+	1,937
	+	0,0336	+	0,9989	+	5,466	+	6,433
5	+	0,9998	—	0,0244	—	1,925	—	2,152
	+	0,0243	+	0,9994	—	8,940	—	8,228
6	+	0,9991	—	0,0328	—	0,240	—	1,018
	+	0,0337	+	0,9995	—	8,443	—	7,600
7	+	0,9988	—	0,0335	—	1,358	—	2,838
	+	0,0459	+	0,9986	—	3,255	—	2,251
8	+	0,9983	—	0,0196	—	6,858	—	8,274
	+	0,0208	+	0,9996	—	2,769	—	2,180
9	+	0,9992	—	0,0134	—	8,156	—	9,157
	+	0,0140	+	0,9998	—	5,892	—	5,488
10	+	1,0000	—	0,0041	—	3,376	—	3,909
	+	0,0001	+	1,0000	—	3,631	—	3,516
11	+	0,9996	—	0,0012	—	23,093	—	24,070
	+	0,0002	+	1,0000	—	19,694	—	19,686
12	+	0,9995	+	0,0177	—	9,264	—	9,920
	—	0,0182	+	0,9997	—	8,569	—	9,089
13	+	0,9995	+	0,0312	—	3,809	—	4,235
	—	0,0315	+	0,9990	—	0,535	—	1,383
14	+	0,9989	+	0,0442	—	2,926	—	2,866
	—	0,0440	+	0,9979	—	0,510	—	1,828
15	+	0,9975	+	0,0714	—	11,261	—	11,139
	—	0,0984	+	0,9950	—	2,788	—	4,828
16	+	0,9988	+	0,0444	—	4,437	—	3,848
	—	0,0433	+	0,9980	—	3,612	—	4,929
17	+	0,9974	+	0,0714	—	0,945	—	0,140
	—	0,0982	+	0,9955	+	4,169	+	2,222
18	+	0,9995	+	0,0240	—	9,857	—	9,568
	—	0,0235	+	0,9994	—	3,111	—	3,800
19	+	0,9997	+	0,0065	—	1,395	—	0,981
	—	0,0063	+	0,9999	—	1,303	—	1,486

Međutim, zanimljivo je bilo uporediti koordinate po staroj i novoj orijentaciji. Za to sada raspolažemo sa dosta velikim brojem sigurnih tačaka. Razumljivo je da se ovde mogu poređivati samo koordinate na istom elipsoidu. Pošto je stara triangulacija bila na Beselovom, to smo upoređenje i izvršili na njemu. Rezultati su dati u tablici 3.

Iz nje se vidi da se razlike po širini i po dužini uglavnom dobro međusobno podudaraju i po veličini i po znaku i da u srednjem iznose:

po širini . . . . — 1",863

po dužini . . . . + 20,496

Tablica 3

Upoređenje geodetskih koordinata Laplasovih tačaka na Beselovom elipsoidu po staroj i novoj orijentaciji.

Tačka	Razlika po dužini B stara — B nova ±		Razlika po širini L stara — L nova ±	
1	—	1,893	+	22,166
2	—	1,608	+	20,967
3	—	1,650	+	20,490
4	—	1,625	+	20,398
5	—	1,695	+	20,321
6	—	1,391	+	20,155
7	—	1,387	+	19,989
8	—	1,813	+	19.923
9	—	1,847	+	20,053
10	—	1,914	+	20,204
11	—	1,930	+	20,074
12	—	1,934	+	20,159
13	—	2,187	+	20,210
14	—	2,065	+	20,368
15	—	2,238	+	20,522
16	—	2,212	+	20,843
17	—	2,219	+	20,796
18	—	2,034	+	20,821
19	—	1,764	+	20,909
Sred.	—	1,863	+	20,496

oduzimajući od koordinata po staroj orijentaciji koordinate po novoj. To znači da je stara triangulacija bila pomerena prema jugu (elipsoid prema severu) za 1",863, ili za oko 58 m, a prema istoku (elipsoid prema zapadu) za oko 430 m, što je daleko više nego što je ocenjeno u 3.4. Odavde i iz tablice 1 možemo zaključiti da ni naši susedi ne stoje baš najbolje sa orijentacijom. Istina neki od njih su koristili i druge elipsoide, pa je, kao što rekosmo, neoportuno upoređivati koordinate na raznim elipsoidima. Za očekivati je npr. da bi slaganje naše sa italijanskom triangulacijom bilo mnogo bolje da smo i mi našu mrežu računali na međunarodnom elipsoidu.

Zanimljivo je uporediti srednje kvadratne greške koordinata na oba elipsoida. One navode na zaključak da za našu teritoriju bolje odgovara Beselov nego elipsoid Krasovskog. Na to ukazuju i slobodni članovi jednačine za orijentaciju (stub 5, tablica 2) — oni su veći na elipsoidu Krasovskog.

Ovde je iznešena samo početna faza rada na orijentaciji naše mreže. Rad se nastavlja i o rezultatima će biti govora u sledećim brojevima Geodetskog lista.