ORIJENTACIJA NAŠE TRIANGULACIJE

Abdulah MUMINAGIĆ, dipl. inž. — Beograd*

1. Uvod

Jedan od bitnih elemenata, koji se danas postavlja za dobru triangulaciju, jeste njena ispravna orijentacija. Grube greške u orijentaciji negativno se odražavaju u više pravaca:

1. nepravilno se definiše odnos između geoida, na koji svodimo merenja, i elipsoida na kojem vršimo računanja; to prouzrokuje veće greške u redukciji merenih elemenata; zbog toga
2. ne održava se ispravna razmera na celom području koje triangulacija pokriva;
3. mreža, premer i karte ne mogu se uklopiti u okolne mreže, premere i karte tj. prekida se kartografski kontinuitet;
4. triangulacija gubi naučni značaj kao integralni deo svetske mreže za izučavanje oblika· dimenzija i fizičkih osobina Zemlje.

2. Orijentacija mreže

2.1. Triangulacija

Triangulacijska mreža definiše samo relativni odnos tačaka — temena trouglova. Njeno mesto i položaj na površini Zemlje je neodređeno. Ona je slična listu papira sa iscrtanom mrežom trouglova, koji možemo po volji premeštati u razne sisteme, ili na razna mesta u istom sistemu.

2.2. Suština orijentacije

Ako se odrede koordinate φ i λ jedne tačke takve triangulacije u nekom sistemu, ona se više neće moći premeštati po celoj Zemlji, ali može cela da rotira oko te tačke, slično kao kad bi pomenuti list sa mrežom trouglova prikucali čavlom kroz jednu tačku i on, razume se, može da se okreće oko te tačke.

Ako se u mreži odrede koordinate dve tačke, ili jedne tačke i azimut **ma koje** strane, čitava mreža će čvrsto stajati u određenom položaju i na pravom mestu na površini Zemlje. Mreža je, kažemo, **orijentisana.**

2.3. Fundamentalna tačka

Obično se određuju koordinate jedne tačke i azimut strane koja iz nje polazi. Ova tačka zove se fundamentalna tačka, a njene koordinate i pomenuti azimut sa nje — **fundamentalni podaci triangulacije.**

---

* V. G. Institut — Beograd.

2.4. Referenc-elipsoid, najprikladniji elipsoid

Danas je skoro nemoguće računati koordinate ostalih tačaka triangulacije na zemaljskoj površini, pa čak i na geoidu — mnogo manje komplikovanom telu, kojim je predstavljena Zemlja kao **fizičko telo.** Računanja se vrše na jednostavnijoj matematičkoj površini — obrtnom elipsoidu, čije su dimenzije i oblik približno jednake dimenzijama i obliku Zemlje. Elipsoid, na kojem se računa triangulacija zove se **referenc-elipsoid.** Ako se on na teritoriji, koju pokriva triangulacija, i najbolje podudara sa geoidom, zove se — **najprikladniji**[1]. Normalno se teži da se izabere baš takav elipsoid. Da bi se to postiglo on treba da ima ne samo oblik i dimenzije najpribližnije geoidu, nego i da na odgovarajući način bude u telu Zemlje — **orijentisan.**

2.5. Orijentacija elipsoida

Neka su na nekoj tački T triangulacije određene astronomska širina φ, dužina λ, azimut α_T^K strane TK — i njihove vrednosti svedene na geoid. Tački T odgovara na usvojenom elipsoidu tačka T' za koju su geodetska širina B i dužina L jednake gornjim astronomskim vrednostima tj.

$$\varphi_T = B_{T'} \qquad (1)$$
$$\lambda_T = L_{T'}$$

Kažemo da su tačke T i T' korespodente.

Premeštanjem elipsoida tačke T i T' možemo dovesti do poklapanja i to tako da se površine elipsoida i geoida tangiraju (ili da budu paralelne)[2]. To znači da će se podudarati i vertikala u T sa normalnom u T'. Ostaje mogućnost rotacije elipsoida oko normale (vertikale). Ako na neki način uspemo da tu rotaciju zaustavimo tako da se podudare meridijanske ravni u tačkama T i T' — elipsoid će biti fiksiran u telu Zemlje — biće orijentisan. Ovo najjednostavnije postižemo kada astronomski azimut α_T^K usvojimo za geodetski, tj. azimut sa geoida prenesemo na elipsoid.

Ako na ovom elipsoidu — na osnovu podataka iz triangulacije i azimuta α_T^K — sračunamo geodetske koordinate tačke K'—$B_{K'}$ i $L_{K'}$, tačka K' biće korespodentna tački K na geoidu. Isto, to važi i za sve ostale tačke triangulacije, tj. triangulacija će biti orijentisana.

Prema tome: orijentacija triangulacije svodi se na orijentaciju elipsoida.

---

[1] Izbor ovakvog elipsoida je veoma važan posao, jer su merenja izvršena na Zemlji i svedena na geoid.

[2] Kad sam u 2.4 rekao da elipsoid treba »i da na odgovarajući način bude smešten u telu Zemlje« i u ovom razdelu: »...da se površine elipsoida i geoida tangiraju (ili da budu paralelne)«, treba razumeti da je neophodno pomeranjem elipsoida po vertikali (normali) naći takav njegov položaj, koji najbolje odgovara površini geoida. Ta operacija naziva se — **orijentacija elipsoida po visini.** Ovakva orijentacija zove se **orijentacija u jednoj tački.** Videće se dalje da se svaka orijentacija u suštini svodi na orijentaciju u jednoj tački. Ali dobivanje koordinata ove tačke i njen visinski odnos prema geoidu utvrđuje se na osnovu podataka iz većeg broja tačaka.

2.6. Orijentacija naše postojeće triangulacije

Naša postojeća mreža, kao deo i nastavak stare austrijske triangulacije ima sledeće fundamentalne podatke (određene 1892.):

Fundamentalna tačka jeste Hermannskogel

$\varphi = 48^0\ 16'\ 15'',29 \pm 0,04$

$\lambda = 33\ \ 57\ \ 41,06$ E (od Fera)

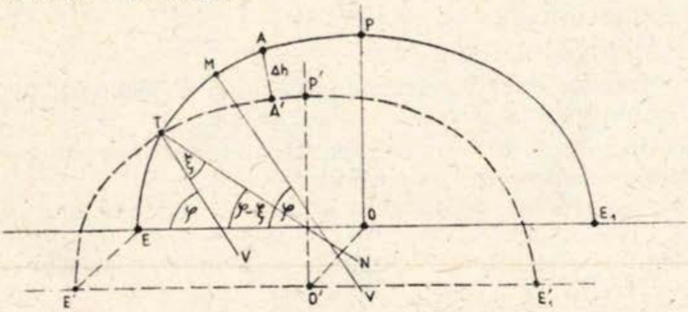
$\alpha = 107\ \ 31\ \ 41,70$ — za stranu Hermannskogel—Hundsheimberg

Beselov elipsoid tangira geoid u Hermannskogel-u.

Posledice ovakve orijentacije jesu, da su se na sastavu sa susednim triangulacijama za iste tačke pokazale sledeće razlike (jugoslavensko minus susedno). Tablica 1

Susedna triangulacija	$\Delta\varphi$ "	$\Delta\lambda$ "	Napomena
albanska	+_ 7,63	+ 44,84	Sredina iz tri tačke
bugarska	— 5,82	+ 11.44	Sredina iz dve tačke
grčka	+ 0.88	+ 25.55	Za širinu sredina iz dve, a za dužinu iz tri tačke
italijanska	+ 1,45	+ 15,42	Sredina iz šest tačaka
rumunska	— 11,87	+ 13,59	Sredina iz tri tačke

Neka docnija određivanja koordinata Hermannskogela pokazala su da su podaci iz 1892. pogrešno sračunati. Za veličinu greške daju se različite vrednosti.



Slika 1

Za nas je najvažnije da orijentacija naše triangulacije nije dobra i da je treba popraviti zapravo izvršiti novu.

3. Uticaj pogrešne orijentacije referenc-elipsoida na tačnost koordinata tačaka triangulacije

3.1. Položaj pogrešno orijentisanog referenc-elipsoida

Razmotrimo ovo na karikiranom crtežu (sl. 1):

Neka je EPE_1 meridijanski presek dobro orijentisanog najprikladnijeg elipsoida. Na zemlji smo odredili fundamentalne podatke φ, λ i α neke tačke. Njeno ispravno mesto na elipsoidu EPE_1 obeleženo je sa T. Tražeći međutim na referenc-elipsoidu tačku sa širinom φ u skladu sa (1) — ona neće pasti u T, nego u neku drugu tačku M. Ovo je nastalo zbog odstupanja vertikale ξ u T. Tačka T na zemlji ostaje na svom mestu i od nje vršimo sva merenja s ciljem daljeg razvijanja triangulacije. Računanje triangulacije na elipsoidu pak, u skladu sa rečenim u 2,5, vršimo od tačke M. Posledice ovoga biće iste kao kad bismo ceo elipsoid linearno pomerili u položaj E'P'E'$_1$ tj. za veličinu $TM = M \cdot \xi'' \sin 1''$. Geodetske visine tačaka — visine iznad elipsoida — razlikovaće se od onih koje bi trebale da budu, npr. u tački A za Δh. Prema tome ni svođenje (redukcija) merenih veličina na elipsoid neće biti ispravna. Dužine severno — za slučaj na sl. 1 — biće kraće, a južno od nje — duže nego što bi trebalo.

Do sličnog zaključka dolazimo i kad razmatramo uticaj odstupanja vertikale u prvom vertikalu — η. Linearno premeštanje elipsoida biće $TP = N\eta'' \sin 1''$. Totalno odstupanje vertikala biće $u = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ a totalno linearno pomeranje elipsoida $\Delta - \sin 1'' \sqrt{(M\zeta')^2 + (N\eta')^2}$

Greška u geodetskoj visini koja zbog ovoga nastaje za neposrednu okolicu tačke T iznosi:

$$\Delta h = S \cdot u \cdot \sin 1'' \tag{2}$$

gde je S — dužina normalnog preseka od fundamentalne tačke do razmatrane.

3.2. Uticaj pogrešne orijentacije na svođenje — redukciju — dužina

Pri računanju triangulacije smatramo da su osnovice svedene na elipsoid, ako merenim dužinama na terenu dodamo popravku

$$\Delta S = S \frac{H}{R}, \tag{3}$$

gde je S — merena dužina osnovice — obrađena

R — srednji radijus Zemlje u tom području

H — visina osnovice iznad referenc-elipsoida. Praktično uvodimo visinu geoida određenu nivelmanom.

Pri razmatranju potrebne tačnosti elemenata metode i obrade geodetskih merenja obično se usvajaju dva kriterija:

— da se pri tome ne pokvari opšta tačnost koja se zahteva za datu vrstu merenja;

— ili da se ne izgubi ni jedna — najmanja — jedinica s kojom se merenja izvode.

Uzmimo prvi od ova dva kriterija.

Opšti zahtev je da se osnovice mere sa tačnošću 1:1 000 000. Da se ona ne bi pokvarila postavimo zahtev da greška koja se u njih unosi zbog nepravilno uzetog H bude manja od 1:2 000 000, tj.:

$$\frac{d(\Delta S)}{S} = \frac{dH}{R} < 1:2\,000\,000$$

odakle izlazi da treba da bude $dH < 3{,}2$ m.

Uzmimo da je naša triangulacija pogrešno orijentisana za veličine dobijene iz upoređenja sa italijanskom (tablica 1). Na osnovi formule (2) se onda može postaviti odnos:

$$L \cdot \frac{15''5}{S} < 3{,}2 \text{ m},$$

odnosno pri ovako lošoj orijentaciji, udaljenost osnovice od fundamentalne tačke ne bi smela da bude veća od 42,6 km (!) ako želimo da ne pokvarimo njenu tačnost. Znajući da su naše osnovice udaljene od

Beča i do 1000 km, vidimo da je u njih unešena greška za preko 20 puta veća od dozvoljene.[1]

Po drugom kriteriju, koristeći opet (2) i (3), dobiva se isti rezultat, ako uzmemo da je dužina osnovice 10 km, a najmanja jedinica s kojom se osnovice uvode u računanje 1 mm.

Kakve greške u redukciji osnovica možemo očekivati u našim osnovicama zbog ovako pogrešne orijentacije? Za ilustraciju uzmimo najbližu i najdalju od Hermannskogela. Za prvu, greška koja se unosi u osnovicu je oko 1:250 000, a u drugu — 1:80 000.

Imajući na umu da se za osnovice traži tačnost 1:1 000 000, a za izlazne strane osnovičkih mreža — 1:400 000, da bi na svakom mestu triangulacije I reda bila zagarantovana zahtevana tačnost 1:100 000, vidimo da slaba orijentacija naše postojeće mreže unosi u nju nedopustivo velike greške.

3.3. Uticaj pogrešne orijentacije na svođenje pravaca

Pravci izmereni na terenu, na visini H iznad elipsoida, trebali bi da se redukuju na elipsoid na kojem se vrši računanje. Smatrajući da je elipsoid dobro orijentisan i najprikladniji za našu teritoriju, uvodimo u račun visinu H iznad geoida, koja je određena nekom vrstom nivelmana. (Prema (1) samo zbog ovoga se u svu triangulaciju unosi greška od 1:500 000).

Mjereni pravci svode se uvođenjem popravke za visinu opažane tačke po formuli

$$\triangle\alpha'' = \frac{H}{M}\rho'' e^2 \sin\alpha \cos^2 2B - \frac{H \,.\, S}{4M \quad N}\rho'' e^2 \sin A \sin 2B.$$

Drugi član je za najnepovoljnije uslove u našoj mreži beznačajan. Da bi sračunali hiljaditi lučne sekunde, s kojima računamo, treba da je:

$$d(\triangle\alpha)'' = \frac{dH}{M}\rho'' e^2 \sin\alpha \cos^2 2B < 0''\!,0005,$$

odakle treba da je $\qquad dH < 4{,}8$ m.

Kao što smo videli, to u našoj mreži nije slučaj i u prednja dva slučaja u pravce unosimo dopunsku grešku od 0",002, odn. 0",006. Ona nije velika, ali je sistematska, zavisna od azimuta i takođe sistematski deformiše mrežu.

3.4. Uticaj pogrešne orijentacije na geodetske koordinate tačaka triangulacije

Za ova računanja koristićemo neke od diferencijalnih formula. Opšti oblik svih formula dat je jednačinama

$$\begin{aligned} dB_K &= \left(\frac{\delta B_K}{\delta B_1}\right)_0 bB_1 + \left(\frac{\delta B_K}{\delta L_{K^1}}\right)_0 dL_1 + \left(\frac{\delta B_K}{\delta A_1}\right)_0 dA_1 + \left(\frac{\delta B_K}{\delta S_{1K}}\right)_0 ds + \\ &\quad + \left(\frac{\delta B_K}{\delta a}\right)_0 da + \left(\frac{\delta B_K}{\delta(\alpha)}\right)_0 d(\alpha) \\ dL_K &= \left(\frac{\delta L_K}{\delta B_1}\right)_0 B_1 + \left(\frac{\delta L_K}{\delta L_K^1}\right)_0 dL_1 + \left(\frac{\delta L_K}{\delta A_1}\right)_0 dA_1 + \left(\frac{\delta L_K}{\delta S_{1\cdot K}}\right)_0 ds + \\ &\quad + \left(\frac{\delta L_K}{\delta a}\right)_0 da + \left(\frac{\delta L_K}{\delta(\alpha)}\right)_0 d(\alpha) \end{aligned} \qquad (4)$$

Jednačinu za popravku azimuta nisam uneo, jer je ona posledica jednačina za dužinu — promene azimuta i dužine povezane sa Laplasovim uslovom.

Uzevši Helmertove vrednosti diferencijalnih promena veličina u (4) dobije se:

$$dB_K = \frac{M_1}{M_K}\cos(L_K - L_1)\,dB_1 + \frac{m_{1\cdot K}}{M_K}\sin A_K^1\,dA_1 - \frac{\cos A_K^1}{M_K}\rho''\,ds + \frac{S_{1\cdot K}\cos A_K^1}{a_0 M_K}\rho''\,da + \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\Big\{2(B_K - B_1)'' - \frac{3(1-e^2)}{1-e^2\sin^2 B}\sin^2 B\,(B - B_1)'' + \frac{(L_K - L_1)''^2}{\rho''}\sin^3 B_K\Big\}\,d(\alpha) \qquad (4')$$

$$dL_K = \frac{M_1}{N_K}\sin(L_K - L_1)\,\mathrm{tg}\,B_K\cdot dB_1 + dL_1 - \frac{m_{1\cdot K}\cos A_K^1}{N_K\cos B_K}\,dA_1 - \frac{\sin A_K^1}{N_K\cos B_K}\rho''\cdot ds + \frac{S_{1\cdot K}\sin A_K^1}{a_0 N_K\cos B_K}\rho''\,.\,da - \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e_0^2\sin^2 B_1}\,.\,\frac{\cos B_1}{\cos B_K} \qquad (4')$$

$$(L_K - L_1)''\sin^2 B_1\,.\,d(\alpha).$$

U ovim formulama je uzeta u obzir ne samo promena orijentacije, nego spljoštenost ($d\alpha$) i dimenzija ($d\alpha$) elipsoida. Indeksi $—_0$ označavaju da se dati elementi odnose na prvobitno uzeti elipsoid. Indeks 1 označava fundamentalnu tačku, dok indeks k ostale tačke triangulacije. dB_1, dL_1 i dA_1, su promene koordinata i azimuta fundamentalne tačke; m je redukovana dužina geodetske linije. Ona omogućava da se na elipsoidu jednostavno rešavaju zadaci sa uglovima i dužinama. Približna formula je:

$$m \approx R\sin\frac{S}{R},$$

a tačna:

$$m_{1K} = S\Big[1 - \frac{S^2}{6N^2}(1+\eta^2) + \frac{S^3}{3N^3}\eta^2\,\mathrm{tg}\,B\cos A_1^K(1+\eta^2) + \frac{S^4}{120N^4}(1\,\eta^2 + 12\eta^2\cos^2 A_1^K - 12\,\eta^2\,\mathrm{tg}^2 B_1)\Big].$$

Postoji još niz izvoda ovih formula (Krasovskog, Burše itd.). Za naše uslove sve daju skoro identične rezultate. Koristeći (4) za naše severo-zapadne tačke koordinate će biti pogrešno geografski smeštene po širini za oko 1,"4, po dužini za oko 14,"70 a za jugo-istočne za 0,"5 i 13,"24 respektivno. Ovo znači da nam je mreža »stegnuta« za oko 0,"9 po širini i 1,"5 po dužini, što u dužinskoj meri respektivno iznosi oko 27 m i 32 m. Geografski pogrešno je smeštena — po širini za oko 30 m, a po dužini za 320 m. Ovakve greške ne mogu se tolerisati i sve govori da treba izvršiti novu orijentaciju mreže.

(Nastaviće se)

---

[1] (str. 7) Formula (2) tačna je, kako je napomenuto, samo za neposrednu okolicu tačke. Iz sl. 1 i docnijih formula vidi se da s daljinom ona gubi vrednost. Za naše uslove ona je dosta dobra, a za gornji zaključak sasvim primenljiva.