O ODREĐIVANJU OBLIKA ZEMLJE GRAVIMETRIJSKOM METODOM

Dr Marijan KASUMOVIĆ — Zagreb

Uvod

Kao i pri istraživanju većine prirodnih pojava vezani smo i u određivanju oblika i veličine Zemlje na mjerenja na njenoj površini, iz kojih treba primjenom matematičkih teorema i fizikalnih zakona doći do kvantitativnih rješenja i egzaktnih tumačenja.

U istraživanju i rješavanju tog veoma starog problema vidimo nekoliko razdoblja, od kojih u svakom dominira određena osnovna koncepcija o obliku našeg planeta. Pri tom od bitnog je značenja razvoj tehnike i preciznosti mjerenja potrebnih veličina, koji ne samo da je omogućavao potvrdu određenih spoznaja nego je i ukazivao na nove elemente o kojima treba voditi računa pri dobivanju realne predodžbe o obliku plohe, kojom definiramo oblik Zemlje.

Gravimetrijska metoda omogućuje danas punu praktičnu primjenu rezultata teorije oblika Zemlje, koja se je razvila sredinom prošlog stoljeća, kad je u tom istraživanju nastupila tzv. era geoida. Tada se je došlo do spoznaje da se tijelo omeđeno nivo plohom, koja bi se podudarala s mirnom površinom oceana kao plohom ravnoteže planeta koji rotira — nazvanim od njem. fizičara J. LISTINGA »geoid« — ne može prikazati jednim matematičkim izrazom, jer je njegova ploha nepravilnog oblika.

Eri geoida prethodila je era elipsoida, u kojoj se je smatralo da tijelo ograničeno spomenutom nivo plohom ima oblik rotacionog elipsoida ili sferoida tj. spljoštenog elipsoida male spljoštenosti. Na eliptičan oblik Zemlje prvi je ukazao I, NEWTON kad je objasnio smanjenjem akceleracije teže u području ekvatora skraćenje dužine njihala ure njihalice podešene za Pariz, koje je morao izvršiti franc. astronom J. RICHER, da bi u Caiennu uspostavio njen pravilan hod. Time je krajem 17. stoljeća završila era, u kojoj se je još od doba PITAGORE i ARISTOTELA (4. stoljeće pr. n. ere) smatralo da Zemlja ima oblik kugle.

U ovom članku prikazat ću sadržaj osnovnih teorema i rješenja u teoriji oblika Zemlje i značenje gravimetrijske metode u njihovoj primjeni, za što je potrebno prethodno izložiti razvojni put, koji je do njih doveo.

1. Mjerenja luka meridijana

Već NEWTON a i njegov savremenik HUYGENS nastojali su odrediti spljoštenost Zemlje teoretskim putem polazeći u svojim izvodima i računima od nešto različitih pretpostavki.

NEWTON računa spljoštenost sferoida iz razlike sile teže na polu i ekvatoru, do koje dolazi zbog nejednakosti ekvatorijalnog i polarnog polumjera te djelovanja centrifugalne sile. Pri tom je pretpostavio da se gravitacija u unutrašnjosti Zemlje mijenja proporcionalno s daljinom od njenog središta. Njegov račun dao je za spljoštenost $\alpha = \frac{1}{230}$

HUYGENS je računao privlačenje sferoida u tačkama na njegovoj površini i smatrao, da ono mora biti na cijeloj površini tijela jednako i usmjereno prema središtu. To je naime za njega bio uvjet, da tekućina koja pokriva planet bude u ravnoteži. Račun mu je dao znatno manju spljoštenost tj. $\alpha = \frac{1}{576}$

Neslaganje jednog i drugog rezultata smatra franc. matematičar CLAIRAUT samo prividnim jer oni, s obzirom na pretpostavke pod kojima su izvedeni, predstavljaju dvije granične vrijednosti, unutar kojih treba da se nalazi stvarna vrijednost za spljoštenost Zemlje. Newtonov račun predstavljao je homogenost mase Zemlje u kom slučaju bi iznos gravitacije u njenoj unutrašnjosti zaista bio upravno proporcionalan s udaljenosti od središta. Međutim Huygensova pretpostavka, prema kojoj bi privlačenje u svim tačkama površine trebalo biti usmjereno prema središtu, odvela je u drugu krajnost jer dopušta, da je sva masa skoncentrirana u središtu a gustoća ostalih dijelova da je nula, što opet ne vodi računa o stvarnoj raspodjeli mase. Obje pretpostavke u prirodi nisu ispunjene pa i njihova teoretska razmatranja nisu mogla dati realan rezultat. Tada je postalo jasno da se bez izvršenja potrebnih mjerenja neće moći odrediti stvarna spljoštenost a iz nje i dimenzije Zemlje kao elipsoida.

Praktičan rad u tom istraživanju svodi se početkom 18. stoljeća na gradusna mjerenja tj. na određivanje dužine luka meridijana u različitim geografskim širinama. Time ponovno dolazi do primjene veza luka meridijana i pripadnog središnjeg kuta dakle princip, kojeg je već prije dvije tisuće godina koristio ERATOSTEN, da izmjeri Zemlju kao kuglu.

No prema jednom od prvih mjerenja luka meridijana, kojeg je na jugu i sjeveru Francuske proveo CASSINI, Zemlja je trebala imati oblik produljenog elipsoida, što je bilo u protivnosti sa dotadanjim shvatanjem. Ubrzo zatim je glasovito mjerenje, kojeg je 1735. godine organizirala Francuska akademija pokazalo, da je dužina luka jednog stupnja u višim geografskim širinama veća nego u blizini ekvatora, pa time i meridionalni presjek Zemlje da odgovara analognom presjeku u spljoštenom elipsoidu, kako je to već tvrdio i NEWTON.

2. Otklon viska

Spomenuta gradusna mjerenja imala su za cilj odrediti dimenzije (ekvatorijalni i polarni polumjer odn. spljoštenost) a time i jednadžbu tzv. nivosferoida tj. tijela, kojeg bi se površina uzimala kao osnovna ploha u višoj geodeziji i kartografiji.

Izvođenje raznih geodetskih radova i projektiranje geografskih karata unutar jedne države ili nekog većeg područja zahtijeva pored ostalog i poznavanje geografskih koordinata na jednoj unaprijed odabranoj mreži kontrolnih tačaka. Njihove geografske koordinate određuju se astronomskim putom a koordinate nižeg reda računaju se duž plohe odabranog nivosferoida. Pri tom se — radi kontrole — računaju i koordinate idućih kontrolnih tačaka. U početku se mislilo da je ploha nivosferoida stvarna nivo ploha, pa će se računate koordinate kontrolnih tačaka i one koje su na njima određene iz astronomskih mjerenja, podudarati.

No rad opisanom metodom kroz gotovo stotinu godina pokazao je protivno. Koordinate dobivene računom duž nivosferoida i one koje su bile određene astronomski nisu se slagale. U čemu leži uzrok?

Odrediti geografske koordinate na jednoj tački astronomskim putom znači fiksirati smjer sile teže na dotičnom mjestu u odnosu prema nebeskim tijelima tj. apsolutno. Smjer teže zato, jer se instrumenti s kojima mjerimo orijentiraju pomoću libele ili viska u nivo plohu odnosno u smjer normale na nivo plohu. Tako dobivene koordinate daju kut između ravnine ekvatora i vertikale. Međutim izračunate koordinate vrijede u odnosu prema normali na nivosferoid. Nepodudaranje jednih i drugih koordinata ukazuje na otklon spomenutih normala tj. na egzistenciju otklona viska iz čega slijedi dalje, da ploha nivosferoida nije stvarna nivo ploha. Već iz tadanjih mjerenja moglo se zaključiti na nepravilnost plohe geoida a do koje dolazi od nepravilne raspodjele masa u unutrašnjosti Zemlje i na njenoj površini.

3. Elipsoid referencije

Pored te spoznaje ostaje i dalje aktuelan pojam nivosferoida tj. pravilnog geometrijskog tijela, ali njegova površina ima od sada ulogu jedne plohe referencije, kojom se geodezija i dalje služi kao osnovom za izvođenje raznih radova, za koje ne može koristiti veoma složenu plohu geoida. Osim toga i istraživanje plohe geoida, na što se od polovine prošlog stoljeća svodi istraživanje oblika Zemlje, zahtijeva egzistenciju jednog takvog tijela, koje se od tada naziva i elipsoid referencije. Ali njega treba u jednom i drugom slučaju tako odabrati, da što manje odstupa od geoida, jer će — pored ostalog — i dimenzije Zemlje, koje možemo dati samo za sferoid biti realne, ako on zadovoljava tom uvjetu. Ploha geoida bit će stoga dijelom iznad a dijelom ispod elipsoida referencije a iznosi tih undulacija nigdje ne smiju biti znatni. To je razlog da je i u eri geoida od osobite važnosti poznavanje jednog elipsoida referencije.

Ali u toj eri spljoštenost nivosferoida odnosno elipsoida referencije ne izvodi se samo iz mjerenja luka meridijana nego i iz mjerenja iznosa teže (gravimetriski) a i iz posebnih atronomskih mjerenja.

Gravimetrijsko određivanje spljoštenosti osniva se na poznatom teoremu, kojeg je dao 1738. godine A. CLAIRAUT. Ispitujući uvjete za ravnotežu na površini tijela koje rotira CLAIRAUT je došao do zaključka, da u svakoj tački takve plohe komponente rezultantne sile, u odnosu prema osima pravokutnog koordinantnog sistema s ishodištem u središtu tijela, treba da se odnose kao parcijalne derivacije jedne funkcije koordinata tačaka što znači, da dotična površina treba da je svuda okomita na smjer djelujuće sile. Ta funkcija kasnije je nazvana potencijalna fukcija.

Odredivši tu funkciju uz pretpostavku da je masa u unutrašnjosti Zemlje raspodijeljena u obliku sferoidalnih homogenih slojeva, kojima se gustoća od sloja do sloja mijenja po proizvoljnom zakonu (također i diskontinuirano) utvrdio je, da površina nivosferoida može biti ploha ravnoteže tijela koje rotira, zatim odredio u prvoj približnosti zavisnost između njegove spljoštenosti α, centrifugalne akceleracije $\omega^2 a$ na ekvatoru (ω je kutna brzina rotacije Zemlje, a ekvatorijalni polumjer) i raspodjele akceleracije teže s geografskom širinom φ. Ti izrazi, kako ih je dao CLAIRAUT glase:

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2} \frac{\omega^2}{g_e}, \text{ i} \tag{1}$$

$$g_\varphi = g_e \, (1 + \beta \sin^2 \varphi). \tag{2}$$

Iz izraza (2) dobije se uz $\varphi = 0^0$ i $\varphi = 90^0$ ovo značenje koeficijenta β:

$$\beta = \frac{g_p - g_e}{g_e}$$

gdje je g_p i g_e akceleracija teže na polu i ekvatoru.

Clairautov teorem omogućuje dakle iz brojnih mjerenja iznosa teže na površini Zemlje odrediti prema (2) koeficijent β i g_e a iz izraza (1) spljoštenost α. Odatle se vidi da spljoštenost α i koeficijent β nisu dvije nezavisne veličine.

4. Anomalije teže

Kako je već spomenuto istraživanje oblika Zemlje svodi se danas na određivanje odstupanja plohe geoida u odnosu prema jednom odabranom elipsoidu referencije.

Viša geodezija rješava taj problem iz poznavanja smjera teže na kontrolnim tačkama. Već spomenutim astronomskim mjerenjima fiksira se na njima smjer teže apsolutno a iz poznatog rastojanja među tim tačkama može se odrediti zakrivljenost nivo plohe u različitim smjerovima i tako dobiti jedan dio plohe geoida. Ta metoda je u biti geometrijska. Ona se može primijeniti samo na kopnu a i otklon viska daje relativno, jer na početnoj tački mora pretpostaviti podudaranje vertikale i normale na elipsoid referencije.

Teorija oblika Zemlje međutim rješava taj problem fizikalno pri čemu umjesto smjera teže koristi njen iznos. Iz upoređenja jedne teoretskim putem dobivene raspodjele iznosa teže, koja vrijedi za elipsoid referencije i stvarne raspodjele dobivene mjerenjem, može se zaključiti na odstupanje geoida od nivosferoida. Nužno je pri tom naglasiti, da odstupanje na jednom mjestu zavisi o izmjerenim vrijednostima iznosa teže na cijeloj Zemlji. Stoga ta fizikalna metoda, koja se zove i gravimetrijska ima veliku prednost pred geometrijskom, jer je današnji napredak esperimentalne fizike i tehnike omogućio mjerenje iznosa teže na moru i time uključio u to istraživanje i ostalih 70% zemljine površine, koji je pokriven vodom.

Osnovna veličina u toj metodi jest anomalija teže tj. diferencija mjerene vrijednosti iznosa teže reducirane na srednju razinu mora i normalne vrijednosti, koja se odnosi na površinu elipsoida referencije. Bitno je dakle raspolagati s takvim normalnim vrijednostima teže, koje će biti nezavisne o raspodjeli masa u unutrašnjosti Zemlje, jer će samo tada nehomogenost Zemljine mase doći do izražaja u anomalijama teže, koje uzrokuju i iz kojih se određuje odstupanje geoida od sferoida.

5. Stokesov teorem

Krajem 18. stoljeća otkrili su P. S. LAPLACE i A. M. LEGENDRE mnoge karakteristike potencijalne funkcije i iz njih utvrdili osnovna geometrijska i mehanička svojstva nivo plohe. Istražujući vezu između teže i oblika Zemlje nastojali su primjenom svojih otkrića osloboditi Clairautova izvođenja i rezultate od pretpostavke, prema kojoj unutrašnji slojevi Zemlje treba da su sferoidalnog oblika; dovoljno je pretpostaviti da su oni kuglasti.

Uvjet za dobivanje Clairautovog teorema bez ikakvih pretpostavki o raspodjeli masa u unutrašnjosti Zemlje dao je engleski fizičar G. STOKES u svom teoremu, kojeg je objavio 1849. godine. Njegov teorem glasi: ako neko tijelo rotira oko čvrste osi konstantnom kutnom brzinom ω a njegova površina jest nivo ploha i ona obuhvata cijelu masu M koja privlači, tada je na njenoj površini i u cijelom izvanjem području jednoznačno određena potencijalna funkcija teže i njene prve derivacije bez obzira na to, kako je masa unutar nivo plohe raspoređena. Drugim riječima unutar nivo-plohe može postojati beskonačno mnogo raspodjela zadane mase M a na nivo plohi i u cijelom izvanjem području odgovarat će samo jedna raspodjela teže. Uvjet je dakle da nivo ploha obuhvata cijelu masu M.

Dokaz teorema u elementarnom obliku prikazan je u [3], [4] a svodi se na to da se pokaže, da dvjema raspodjelama zadane mase M zadovoljava samo jedna potencijalna funkcija privlačenja a time i jedna raspodjela teže.

Stokesov teorem daje dakle principijelnu mogućnost odrediti raspodjelu teže na zadani oblik nivo plohe i poznatu ukupnu masu, koja treba da je unutar nivo plohe. Međutim obrat tog teorema, prema kome bi jednoj raspodjeli teže kao funkciji geografske širine i dužine odgovarao samo jedan oblik nivo plohe ne može se dokazati, pa je stoga i nemoguće čisto teoretski iz poznate raspodjele teže na površini tijela — koja treba da je nivo ploha — jednoznačno zaključiti na njen oblik. U rješenju tog drugog zadatka sastojalo bi se određivanje oblika geoida kao cjeline iz poznate raspodjele teže; kako vidimo to nije moguće.

Ali iz poznate raspodjele iznosa teže na površini može se zaključiti na prostornu raspodjelu odstupanja plohe geoida u odnosu prema nivosferoidu, ako to odstupanje nije znatno. Princip je ovaj:

— uz uvjet koji zahtijeva Stokesov teorem tj. da je sva masa koja privlači unutar nivo plohe odrede se normalne vrijednosti teže za površinu jednog nivosferoida, koji ne odstupa znatno od geoida; u tom slučaju normalne vrijednosti neće zavisiti o raspodjeli mase unutar Zemlje,

— ako se mjerene vrijednosti iznosa teže, naravno pošto su prethodno izvršene potrebne redukcije, podudaraju s normalnim, tada bi to bio dokaz da se ploha geoida podudara s plohom nivosferoida.

Iskustvo je međutim pokazalo, da anomalije teže nisu nula ali i da — uz realno odabrane normalne vrijednosti i izostatski reducirane mjerene vrijednosti — nisu velike, pa odatle slijedi da odstupanje postoji ali i da nije veliko. Stoga je moguće izvesti odgovarajuću diferencijalnu jednadžbu, čije rješenje daje vezu između spomenutog odstupanja i anomalija teže i time omogućuje ispitati plohu geoida gravimetrijskom metodom.

6. Stokesov problem i normalne vrijednosti teže

Određivanje potencijalne funkcije privlačenja uz zadani oblik nivo plohe i mase zove se Stokesov problem. U ovom slučaju nužno ga je riješiti za nivosferoid male spljoštenosti. Izvod te potencijalne funkcije prilično je dugotrajan i ne može se ovdje iznositi jedino ćemo spomenuti, da se ona određuje iz izraza za potencijal privlačenja homogenog sferoida primjenom Mac Laurinovog teorema o privlačenju sufokusnih sferoida (vidi na pr. u [3]).

Deriviranjem takve potencijalne funkcije po koordinatama tačke na površini nivosferoida dobiva se ovaj izraz za normalne vrijednosti teže u zavisnosti o geografskoj širini φ:

$$\gamma_\varphi = \gamma_e (1 + \sin^2\varphi - \beta_1 \sin^2 2\varphi) \tag{3}$$

i ova veza između koeficijenata β i β_1 sa spljoštenosti α:

$$\beta = \frac{5}{2} q - \alpha - \frac{17}{14} q \alpha \qquad \text{i} \qquad \beta_1 = \frac{1}{8} \alpha^2 + \frac{1}{4} \alpha \beta \tag{4}$$

gdje je $q = \dfrac{\omega^2 a}{\gamma^e}$

Vidimo da su ti izrazi potpuno identični s izrazima (1) i (2) tj. predstavljaju Clairautov teorem ali još i s članovima, koji sadrže male veličine drugog reda.

Izrazi za koeficijente β i β_1 dobiveni su ovdje teoretskim putom na osnovu Stokesovog teorema pa je dovoljno poznavati spljoštenost α Zemlje i akceleraciju teže na ekvatoru, da se odmah odredi formula za normalne vrijednosti teže na njenoj površini kao nivosferoidu.

U toku druge polovice prošlog i početkom ovog stoljeća bilo je utvrđeno nekoliko elipsoida referencije a i nekoliko formula za normalne vrijednosti teže. Dimenzije elipsoida referencije razlikovale su se nešto u veličini ekvatorijalnog polumjera a i spljoštenosti α a formule za normalne vrijednosti teže u veličini γ_e i vrijednostima koeficijenata β i β_1.

Da bi sve države kod geodetskih radova koristile isti elipsoid referencije preporuča se korištenje internacionalnog elipsoida referencije, kojeg je izveo HAYFORD iz geodetskih mjerenja u U.S.A. 1910. godine a prihvatio ga je internacionalni kongres Unije za geodeziju i geofiziku u Madridu 1924. godine. Dimenzije tog elipsoida jesu ove:

$$a = 6\ 378\ 388 \text{ m} \qquad \alpha = \frac{1}{297} = 0{,}003\ 367\ 0.$$

Analogno se i kod određivanja odstupanja geoida od sferoida gravimetrijskom metodom preporuča korištenje internacionalne formule za normalne vrijednosti teže, koja je prihvaćena kao internacionalna na kongresu iste Unije u Stockholmu 1930. godine a koja glasi:

$$\gamma_\varphi = 978{,}049\,(1 + 0{,}005\ 288\ 4 \sin^2\varphi - 0{,}000\ 005\ 9 \sin^2 2\varphi) \text{ cm } s^{-2}$$

Prvi član u toj formuli izveo je HEISKANEN 1928. godine [2] pomoću Clairautovog teorema na temelju podataka o izmjerenim vrijednostima iznosa teže na nekoliko tisuća gravimetrijskih stanica. Na mjerene vrijednosti teže primijenio je izostatičku redukciju a za koeficijent β dobio je pri tom vrijednost 0,005 289. Koeficijente za drugi i treći član izračunali su SOMIGLIANA i CASSINIS 1930. godine [1] za spljoštenost internacionalnog elipsoida referencije $(\alpha = \frac{1}{297})$ na temelju Stokesovog teorema i rješenja Stokesovog problema.

Potrebno je još istaknuti da spljoštenost α elipsoida referencije i vrijednosti koeficijenata β i β_1 nisu nezavisne. Ako promijenimo vrijednosti spomenutih koeficijenata mijenja se i spljošnost nivosferoida i obratno. Zbog te zavisnosti moglo bi se na prvi pogled zaključiti da u tom cijelom istraživanju postoji jedan »circulus«, budući da se iz mjerenja teže na Zemlji zaključuje na njenu spljoštenost, iz nje izvodi formula za normalne vrijednosti teže u odnosu prema kojoj se dobivaju anomalije teže a koje dalje služe za određivanje odstupanja geoida od nivosferoida. No normalne vrijednosti teže ne smiju znatno odstupati od stvarnih pa ih je i potrebno odrediti izjednačenjem mjerenih vrijednosti, kako bi one predstavljale zaista realne srednje odn. normalne vrijednosti teže za Zemlju kao cjelinu. U anomalijama teže doći će do izražaja nehomogenost masa u unutrašnjosti Zemlje a o kojoj i zavisi odstupanje plohe geoida od elipsoida referencije.

Osim toga anomalije teže zavise samo o formuli za normalne vrijednosti teže i nezavisne su o dimenzijama elipsoida referencije. Stoga i odstupanje geoida od sferoida neće zavisiti o njegovim dimenzijama kad se ono određuje gravimetrijskom metodom. Budući da se i na otklon viska može zaključiti iz određenog odstupanja i ta veličina neće zavisiti o dimenzijama elipsoida referencije tj. gravimetrijskom metodom dobiva se otklon viska apsolutno.

7. Osnovna diferencijalna jednadžba gravimetrije

Označimo li s W potencijalnu funkciju privlačenja koja je dobivena rješenjem Stokesovog problema za nivosferoid male spljoštenosti koji rotira, tada je njegova površina S normalna nivo ploha, na kojoj vrijedi jednadžba

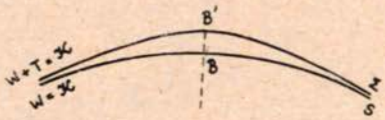
$$W = K,$$

gdje je K jedna konstanta. Parcijalne derivacije tog normalnog potencijala po koordinatama tačaka površine elipsoida referencije daju normalne vrijednosti teže γ_0 na njegovoj površini. Kako smo već spomenuli one ne zavise o raspodjeli masa unutar te nivo plohe.

Međutim mjerene vrijednosti teže koje, pošto je izvršena izostatska redukcija na srednju razinu mora, označujemo s g_0, jesu parcijalne derivacije jedne tačnije površine tzv. r e g u l a r i z i r a n o g geoida, budući da se spomenutom redukcijom djelovanje masa iznad razine mora premješta unutar nivo plohe tj. geoida. Takvu potencijalnu funkciju izrazit ćemo kao sumu normalnog potencijala W i jednog dodatnog potencijala T (potencijala poremećenja), koji potječe od raspodjele masa unutar Zemlje a koja i uzrokuje odstupanje plohe geoida od nivosferoida. Za plohu Σ geoida vrijedit će tada jednadžba

$$W + T = K,$$

u kojoj je K ista konstanta kao prije.



sl. 1

Sl. 1 prikazuje konturu plohe nivosferoida S i geoida Σ, kojeg je ploha u tački B uzdignuta od plohe elipsoida referencije za dužinu $BB' = N$. Vrijednost normalnog potencijala smanjuje se na dužini BB' za K-(K-T) tj. za vrijednost potencijala poremećenja, pa otuda slijedi u prvoj približnosti ova linearna veza između veličina N i T:

$$N = \frac{T}{\gamma} \tag{5}$$

Izraz (5) zove se Brunsova jednadžba ili teorem i pokazuje, da je odstupanje N istog reda veličine kao i potencijal poremećenja T.

Anomaliju teže $g_0 - \gamma_0$ možemo dakle izraziti kao diferenciju parcijalnih derivacija stvarnog i normalnog potencijala po normalama na geoid odn. nivosferoid ovako:

$$g_0 - \gamma_0 = -\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_\Sigma + \left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)_S - \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\Sigma \qquad (6)$$

Parcijalne derivacije uzete su s negativnim predznakom, jer normale imaju pozitivan smjer od unutra prema van. Desna strana izraza (6) pokazuje da se mjerene vrijednosti odnose na plohu Σ (geoid) a normalne vrijednosti teže na plohu S (nivosferoid). Osim toga i normale na jednu i drugu plohu ne podudaraju se. Može se pokazati da se razlika među normalama (otklon viska), kad se veličina N određuje iz anomalija teže, može zanemariti ali činjenicu što se mjerene i normalne vrijednosti teže odnose na različite plohe treba uzeti u obzir, tj. normalne vrijednosti teže treba s nivosferoida reducirati na geoid.

Spomenuta redukcija provede se tako da se prvi član izraza (6) razvije u Taylorov red tj.

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_\Sigma = \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_S + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial n^2}\right)_S N + \cdots$$

a druga derivacija normalnog potencijala izvede se iz izraza za potencijal privlačenja kugle polumjera R. Tada je

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_\Sigma \doteq \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_S + 2\frac{N\gamma}{R}$$

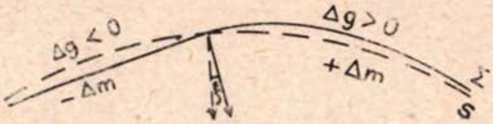
Uvrštenjem dobivenog izraza u izraz (6) i primjenom Brunsove jednadžbe (5) dolazimo do ove osnovne diferencijalne jednadžbe gravimetrije:

$$g_0 - \gamma_0 = -\frac{2T}{R} - \frac{\partial T}{\partial \varrho} \qquad (7)$$

U toj jednadžbi derivacija potencijala T poremećenja uzeta je, umjesto po normali, duž polumjera ϱ a budući da je taj potencijal malen, nije od bitnog značenja na koju se plohu on odnosi, pa je ispuštena oznaka Σ.

Tom diferencijalnom jednadžbom povezuje se anomalija teže s potencijalom poremećenja. Njena desna strana ima dva člana: prvi uzima u obzir činjenicu, što se g_0 i γ_0 odnose na različite plohe i uključuje u sebi promjenu normalne vrijednosti teže pri prijelazu sa sferoida na geoid a drugi predstavlja silu, izraženu potencijalom poremećenja. Oba člana su istog reda veličine i nijedan se ne smije zanemariti.

Ukoliko bi se drugi član u izrazu (7) zanemario tada bi — s obzirom na jednadžbu (5) — odstupanje N geoida od elipsoida referencije bilo proporcionalno anomaliji teže na d o t i č n o m mjestu i u



sl. 2

području gdje je anomalija teže pozitivna ploha geoida bi bila ispod plohe nivosferoida i obratno. Međutim kako se vidi iz sl. 2 pozitivnim anomalijama treba da odgovara uzvišenje a negativnim sniženje plohe geoida u odnosu prema plohi nivosferoida. Naime višak mase $+\Delta m$ uzrokuje pozitivne a manjak mase $-\Delta m$ negativne anomalije teže i oba faktora djeluju tako, da je normala na geoid otklonjena od normale na nivosferoid u istom smjeru na pr. za kut ξ. To je jedino moguće, ako je u području s $\Delta g > O$ ploha geoida iznad a u području s·$\Delta g < O$ ispod plohe nivosferoida.

8. Stokesova formula

Zbog nehomogenosti strukture nevidljivih masa i njihove nepravilne raspodjele ne može se u osnovnoj diferencijalnoj jednadžbi ispustiti drugi sumand što znači, jednadžbu treba integrirati. Njeno rješenje daje potencijal T poremećenja u zavisnosti o anomalijama teže i primjenom izraza (5) dobiva se ovaj izraz za odstupanje N:

$$N = \frac{1}{4\pi\gamma R} \int \Delta g F(\psi) d\sigma \tag{8}$$

To rješenje dao je G. STOKES 1849. godine i ta formula zove se Stokesova formula. Integral je plošni i odnosi se na kuglu, jer je i potencijal poremećenja određen primjenom kuglinih funkcija. Njeno rješenje može se dobiti i primjenom tzv. Poissonovog integrala, koji omogućuje iz poznate potencijalne funkcije na površini kugle odrediti njenu vrijednost u tačkama u unutrašnjosti kugle ili izvan nje [3]. R je srednji polumjer nivosferoida a γ srednja vrijednost normalne teže. $F(\psi)$ je jedna funkcija središnjeg kuta ψ između tačke na kojoj se želi odrediti veličina N i svih ostalih tačaka površine kugle.

Stokesova formula vrijedi uz ove uvjete:

— izvan geoida ne smije biti masa koja privlači što znači da mjerene vrijednosti iznosa teže treba reducirati tako, da se djelovanje masa koje su izvan njega uključi unutar geoida tj. treba provesti izostatsku redukciju,

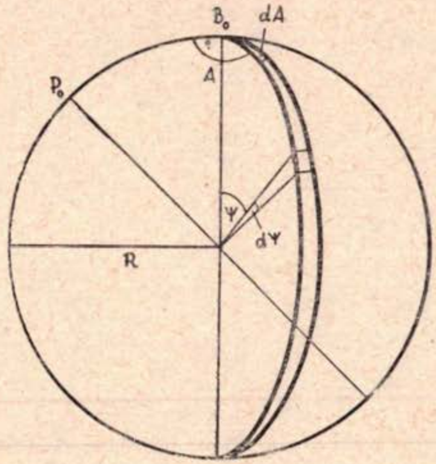
— težišta nivosferoida i geoida treba da se podudaraju, jer je pod tim uvjetom izveden izraz za potencijal poremećenja,

— volumen nivosferoida treba da je jednak volumenu geoida što znači, da suma svih pozitivnih i negativnih odstupanja treba da je nula, i

— nivosferoid i geoid treba da rotiraju oko iste osi.

Za praktičnu primjenu Stokesova formula izrazuje se dvostrukim integralom i to tako da se plošni element $d\sigma$ izrazi sfernim koordinatama na kugli σ polumjera R. Ako je B_0 tačka u kojoj treba odrediti veličinu N, tada su sferne koordinate neke tačke B na površini kugle sferna udaljenost ψ i azimut A. Iz sl. 3 se vidi da je $d\sigma = R^2 \sin\psi \, dA$ pa uz tu supstituciju Stokesova formula glasi:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \triangle g \, F(\varphi) \sin\varphi \, d\psi \, dA$$



sl. 3

Budući da se prostorna raspodjela teže ne može predočiti jednim matematičkim izrazom u obliku funkcije od ψ i A ili geografskih koordinata, to se prednja formula rješava numeričkom integracijom. Vrijednosti funkcije $F(\psi)$ izračunate su i dane u tablicama. Kako one ne zavise o azimutu, može se površina kugle razdijeliti u prstenaste zone s polom u tački B_0 i sfernim polumjerima od $\psi = O$ do $\psi = \pi$. Za svaku zonu odredi se srednja vrijednost anomalije Δg i dobiveni produkti zbroje. Suma svih produkata dat će to tačniju vrijednost za veličinu N što je površina svake zone manja tj. što se na veći broj zona podijeli površina kugle. Spomenuta formula i opisani postupak pokazuju, da je za određivanje odstupanja geoida od elipsoida referencije nužno poznavati anomalije teže na cijeloj zemlji.

9. Zaključak

Gravimetrijska metoda određivanja oblika Zemlje osniva se na Stokesovom teoremu, rješenju Stokesovog problema i integraciji diferencijalne jednadžbe gravimetrije. Sve je to teoretski riješio Stokes već polovicom prošlog stoljeća. No metoda je došla do praktične primjene tek u ovom stoljeću, kad je u prvom redu VENING MEINESZ uspio konstruirati uređaj s njihalima za mjerenje iznosa teže na moru i time dobiti podatke o anomalijama teže i u području oceana a punu primjenu nalazi metoda tek u današnje vrijeme, jer je razvoj gravimetara omogućio udobno izvršenje gravimetrijskog premjera Zemlje iz kojeg se dobivaju podaci o anomalijama teže. Današnja svjetska mreža za gravimetrijski premjer Zemlje ima oko 30 stanica prvog reda, na kojima se vrše apsolutna mjerenja teže, dok se na oko 1500 stanica nižeg reda do tih vrijednosti dolazi na temelju relativnih mjerenja.

Iz naprijed izloženog vidi se, da se danas poznavanje oblika Zemlje, koji je definiran geoidom, svodi na poznavanje prostorne raspodjele veličine N. Nanesemo li dobivene vrijednosti odstupanja na elipsoid referencije ili na kartu koja prikazuje dio njegove površine i spoje mjesta jednakog odstupanja, dobiva se topografija plohe geoida u odnosu prema elipsoidu referencije. To je jedini način na koji možemo danas prikazati geoid a time i oblik Zemlje.

Dosadašnji rezultati istraživanja plohe geoida uvjerili su nas o njenoj nepravilnosti ali su i pokazali, da odstupanja geoida od nivosferoida nisu velika, iznose do 150 m. Ta spoznaja daje nam danas jasan odgovor na pitanje, zašto su razna a veoma tačna gradusna mjerenja dala nešto različite vrijednosti za spljoštenost i dimenzije Zemlje. Naime undulacije geoida jesu nepravilne pa i gradusna mjerenja, koja su izvršena u različitim područjima Zemlje daju nešto različite polumjere zakrivljenosti stvarne nivo plohe tj. one, koje ima ploha geoida u dotičnom području.

LITERATURA

1. Cassinis G.: Sur l'adoption d'une formule internationale pour la pesanteur normale, Bulletin geodesique, Nr. 26, 1930;

2. Heiskanen W. A.: Ist die Erde ein dreiachsiges Ellipsoid, Gerlands Beitrage zur Geophysik, Vol. 19, 1928;

3. Mihailov A. A.: Kurs gravimetrii i teorii figuri Zemlji, Moskva 1939;

4. Rudzki M. P.: Physik der Erde, Leipzig 1911