RAZVOJ METODA ASTRONOMSKO-GRAVIMETRISKOG NIVELMANA

Dr Aleksandar ŽIVKOVIĆ, dipl. inž. — Beograd*

Do 1934/35. godine za određivanje oblika geoida postojala su principijelno dva različita postupka. Jedan je geometrijski a drugi fizički. Prvi je u literaturi poznat kao »astronomski nivelman« a drugi kao gravimetrijska metoda za određivanje undulacija geoida.

U prvom postupku za određenu početnu tačku iz astronomskih i geodetskih merenja na gornjoj površini Zemlje određuje se uzajamni odnos između geoida i usvojenog referenc elipsoida. Ovako dobivene geoidne visine imaju relativan karakter jer su zavisne od dimenzija usvojenog elipsoida i njegove orijentacije u početnoj tački. Primena ove metode uglavnom je ograničena na manje teritorije. Gotovo nepremostive teškoće se javljaju pri primeni ove metode, kada je potrebno odvojene mreže kontinenata povezati u jednu celinu. Ove teškoće se javljaju zbog toga što se geodetska i astronomska merenja beznadežno zaustavljaju na obalama mora i okeana te ova ogromna prostranstva ostaju ne premerena, te tako onemogućavaju pomenuto povezivanje. S druge strane, samo na osnovu astronomsko-geodetskog materijala gotovo je nemoguće utvrditi položaj realnog težišta Zemlje. Fizička metoda nam omogućava da sve mreže sveta povežemo u jednu celinu kao i da utvrdimo položaj težišta elipsoida u odnosu na položaj realnog težišta Zemlje. Pri ovoj metodi neophodno je poznavati anomalije teže preko cele Zemljine površine; a oblik geoida dobija se kao celina, drugim rečima geoidne undulacije dobivene na ovaj način su apsolutnog karaktera.

Iz gore izloženog je jasno da se u praktičnoj primeni oba postupka nailaze na velike teškoće, naročito to važi za gravimetrijsku metodu koja je zbog nedovoljne gravimetrijske ispitanosti Zemlje naročito okeana i slabo naseljenih mesta gotovo ne primenljiva.

Sovjetski naučnik Krasovski došao je još 1934. godine na ideju da kombinacijom oba ova postupka iskoristi njihove dobre strane i otkloni njihove nedostatke. Razrada same metode je delo danas širom sveta poznatog sovjetskog naučnika Molodenskog.

Suština ideje sastoji se u sledećem. Primenom astronomsko geodetskih odstupanja vertikala treba ograničiti obim primene gravimetriskog materijala, pošto bi se preko njih izrazio uticaj dalekih zona

* građevinski Fakultet — geodetski odsek

sa jedne strane a sa druge strane postojanje karte anomalija teže za ispitivano područje kružnih zona, trebalo bi da omogući da se sa znatno manjim brojem astronomskih tačaka izađe na kraj. Ovaj problem je Molodenski rešio na sledeći način. On smatra da se astronomska odstupanja vertikala ϑ_a u jednoj tački A, $\vartheta_a(A)$, od gravimetriskih odstupanja vertikala ϑ_g u istoj tački A, $\vartheta_g(A)$, mogu da razlikuju u teorijskom smislu samo za komponentu veličine ugla $\Delta\vartheta(A)$ između normale referenc elipsoida i gravimetriskog normalnog sferoida, tj. treba da postoji jednakost da je:

$$\vartheta_g(A) \equiv \vartheta_g(A) + \Delta\vartheta(A) \qquad (1)$$

S druge strane on smatra da se komponenta gravimetriskog odstupanja vertikala u nekoj tački A sastoji iz dva dela, i to:

$$\vartheta_g(A) = \vartheta_g(A\Sigma) + \vartheta_g(A\Sigma') \qquad (2)$$

gde:

$\vartheta_g(A\Sigma)$ — označava gravimetrisku komponentu odstupanja vertikala sa područja Σ gde su anomalije teže dobro proučene i

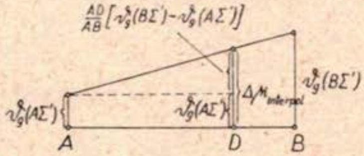
$\vartheta_g(A\Sigma')$ — označava gravimetrisku komponentu odstupanja vertikala sa područja Σ' a koje se nalazi izvan područja Σ, i predstavlja uticaj dalekih zona, pa je njen uticaj na $\vartheta_g(A)$ u odnosu na uticaj $\vartheta_g(A\Sigma)$ prilično mali.

Neka su gravimetriska odstupanja vertikala u tačkama A i B sračunata samo na osnovu lokalnog gravimetriskog premera na području Σ i neka su ona $\vartheta_g(A\Sigma)$ i $\vartheta_g(B\Sigma)$. Postavlja se sada pitanje kako ćemo da odredimo gravimetrisko odstupanje vertikala u nekoj proizvoljnoj tački D a koja se nalazi između tačaka A i B.

Obrazujmo razlike:

$$\vartheta_g(A) - \vartheta_g(A\Sigma) \qquad \text{i} \qquad \vartheta_g(B) - \vartheta_g(B\Sigma)$$

u tačkama A i B. Dobivene razlike nisu ništa drugo do uticaj dalekih zona u ovim tačkama. S obzirom da su ovo male veličine možemo predpostaviti da se one pri prelazu od tačke A na tačku B linearno menjaju. Drugim rečima ovde možemo da primenimo sličan postupak koji je primenio Nithammer na meridijanu sv. Gothardt prilikom interpolacije odstupanja vertikala za međutačke iz razlika »opažanih i sračunatih« odstupanja iz uticaja masa, tj. imamo:



$$\vartheta_1(D\Sigma') = \vartheta_g(A\Sigma') + \frac{AD}{AB}\left[\vartheta_g(B\Sigma') - \vartheta_g(A\Sigma')\right] + \vartheta_g(D\Sigma) + \Delta\vartheta(D) \qquad (3)$$

S obzirom na ono što je rečeno za (1) i (2) imamo:

$$\vartheta_g(A\Sigma') = \vartheta_g(A)\,\vartheta_g(A\Sigma) = \vartheta_a(A) - \Delta\vartheta\,(A) - \vartheta_g(A\Sigma)$$

$$\vartheta_g(B\Sigma') = \vartheta_g(B) - \vartheta_g(B\Sigma) = \vartheta_a(B) - \Delta\vartheta\,(B) - \vartheta_g(B\Sigma)$$

pa jednačina (3) dobija oblik:

$$\vartheta_i\,(D\Sigma) = \left[\frac{DB}{AB}\vartheta_a(A) + \frac{AD}{AB}\vartheta_a(B)\right] +$$

$$+\left[\vartheta_g(D\Sigma) - \frac{DB}{AB}\vartheta_g(A\Sigma) - \frac{AD}{AB}\vartheta_g(B\Sigma)\right] +$$

$$+\left[\triangle\vartheta\,(D) - \frac{DB}{AB}\triangle\vartheta\,(A) - \frac{AD}{AB}\triangle\vartheta\,(B)\right] \qquad (4)$$

U izrazu (4) su svi članovi sa izuzetkom poslednjeg poznati. Ovaj poslednji član kod odstojanja AB od 100—200 km ima neznatnu vrednost i stoga može da se zanemari.

Ako se sada predpostavi da se uticaji dalekih zona menjaju linearno ne samo između dve astronomske tačke već takođe u čitavom području σ onda te uticaje možemo da predstavimo jednom linearnom funkcijom od koordinata x i y tj. (φ i λ), atko imamo da je:

$$\vartheta_g\,(M\Sigma') + \triangle\vartheta\,(M) = Ax + By + C \qquad (5)$$

gde su:
A, B i C konstantne veličine.

Možemo se uveriti da ako uzmemo u obzir da je:

$$\vartheta_g\,(M\Sigma') + \triangle\vartheta\,(M) = \vartheta_a\,(M) - \vartheta_g\,(M\Sigma)$$

tada je desna strana jednačine (5) poznata za sve tačke sa poznatim ϑ_a. Sa tri tačke na kojima su poznata astronomska odstupanja vertikala a koja ne leže na istoj pravoj moguće je odrediti nepoznate konkonstante A, B i C. U koliko bi broj tačaka sa poznatim astronomskim odstupanjima vertikala bio veći dobili bismo prekobrojan broj jednačina tako da bi koeficijenti A, B i C mogli da budu određeni po metodi najmanjih kvadrata iz jednačina oblika:

$$Ax + By + C = \vartheta_a\,(M) - \vartheta_9\,(M\Sigma) \qquad (6)$$

Iz svega što je gore rečeno jasno proizlazi da je mogućnost dobijanja oblika geoida jednovremenom primenom astronomsko-geodetskog i gravimetrijskog materijala time ostvarena.

Sa interpolovanim vrednostima za odstupanja vertikala treba sada ući u poznatu jednačinu za određivanje izdizanja geoida iznad usvojenog elipsoida. Ali umesto da za svaku proizvoljnu tačku D na liniji AB sračunavamo interpolovanu vrednost odstupanja vertikala, možemo da sprovedemo numeričku integraciju po formuli:

$$\Delta N = \int_A^B \vartheta_i (D\Sigma) \cdot dl \tag{7}$$

Tako ćemo vrednost ovoga integrala neposredno da sračunamo preko ϑ_a (A) i ϑ_a (B) i preko rasporeda anomalija teže u području Σ. U ovom integralu D je varijabilna tačka koja prolazi sve vrednosti od A do B, a dl je linearni elemenat duži AB.

Posle zamene jednačine (3) u jednačinu (7) i isprovedene integracije dobijamo izraz

$$\Delta N = l/\vartheta_g (A\Sigma') + \vartheta_9 (B\Sigma')/ + \Delta N_\Sigma + \Delta N_\varrho \tag{8}$$

gde je:

ΔN_Σ — geoidna visinska razlika tačaka A i B, sračunata na osnovu anomalija teže na području

ΔN_ϱ — visinska razlika između referenc elipsoida i gravimetriskog normalnog sferoida na dužini AB.

Jednačina (8) s obzirom na (1) i (2) može da bude napisana i u obliku:

$$\Delta N = [\vartheta_a (A) - \vartheta_g (A\Sigma) - \Delta\vartheta(A) + \Delta\, \vartheta_a (B) - \vartheta_g (B\Sigma) - \Delta\vartheta(B)] \cdot l + \Delta N_\Sigma$$

$$+ \Delta^{``}{}_s = [\vartheta_a (A) + \vartheta_a (B)]\, l + \{\Delta N_\Sigma - l\, [\vartheta_g (A\Sigma) + \vartheta_9 (B\Sigma)]\} + \{\Delta N_\varrho$$

$$- l\, [\Delta\vartheta(A) + \Delta\vartheta(B)]\} \tag{9}$$

U prvom članu jednačine (9) koristi se rezultat uobičajenog »astronomskog nivelmana« sa linearnom interpolacijom astronomsko geodetskih odstupanja vertikala. Drugi član, koji zavisi od rasporeda teže, predstavlja gravimetrisku popravku za astronomski nivelman. Treći član sadrži razliku dve veličine, i on je toliko mali da može da bude u daljem zanemaren.

Sada posmatrajmo drugi član koji smo nazvali gravimetriska popravka za atronomski nivelman i koju označimo sa $\overline{\Delta N}$

$$\overline{\Delta N} = \Delta N_\Sigma - l/\vartheta_g \left(A\Sigma\right) + \vartheta_g \left(\ \Sigma\right) / \tag{10}$$

U ovoj jednačini zamenimo sada prvi član sa razlikom visina N u tačkama A i B sračunatih po Stoksovoj formuli a u drugom članu zamenimo izraze za odstupanja vertikala odgovarajućom formulom za njihovo sračunavanje po Vening—Majnesu. Ovako dobijen izraz je vrlo komplikovan i nepodesan za matematičko iskorištavanje jer u njemu figurišu dva polarna koordinatna sistema sa polovima u tačkama A i B.

Nastaje sada pitanje, koji koordinatni sistem je najcelishodnije da se uvede kod integracije. Posle niza istraživanja kaže Molodenski, izbor je pao na jedan krivoliniski koordinatni sistem. On se sastoji iz sistema konfokalnih elipsi i hiperbola, u odnosu na polove A i B. Kao što je poznato u ovom koordinatnom sistemu koordinatni elementi sačinjavaju jedan ortogonalan sistem.

Interesantno je sada videti šta o ovome problemu kaže Arnold [2]. Jednim elegantnim izvodom Arnold nas vodi do onog istog rezultata koji nam je pokazao Molodenski. Naime on određuje jedanput geoidne undulacije iz astronomskih odstupanja vertikala λ_e u odnosu na referenc elipsoid i u pravcu geoidnog profila, po formuli:

$$\triangle N_e = - \int_A^B \lambda_e \, dS \tag{11}$$

a drugi put iz gravimetrijskih odstupanja vertikala λ_g, koja se odnose na opšti Zemljin elipsoid :

$$\triangle N_g = - \int_A^B \lambda_g \, dS \tag{12}$$

pa zatim zadržavajući samo formalno istu tačnost, postavlja jednakost:

$$\triangle N_e = - \int_A^B \lambda_g \, dS + \int_A^B \left(+ \lambda_g - \lambda_e \right) dS \tag{13}$$

ili

$$\triangle N_e = \triangle N_g + \int_A^B \left(+ \lambda_g - \lambda_e \right) dS \tag{14}$$

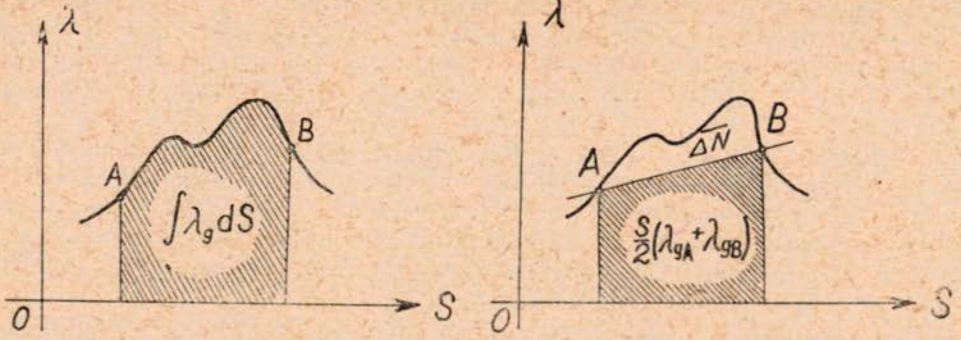
Integrand ($\lambda_g - \lambda_e$)menja se duž duži AB = S vrlo malo, tako da možemo približno da stavimo:

$$\triangle N_e = \triangle N_g + \frac{1}{2} S / \left(\lambda_g - \lambda_e \right)_A + \left(\lambda_g - \lambda_e \right)_B /$$

ili

$$\triangle N_e = \triangle N_g + \frac{1}{2} S \left(\lambda_{gA} + \lambda_{gB} \right) - \frac{1}{2} S \left(\lambda_{eA} + \lambda_{eB} \right) \tag{15}$$

Ovaj izraz je potpuno indentičan sa izrazom (9) koji je izveo Molodenski.



Arnold dalje postupa isto kao i Molodenski, stavlja naime da je

$$\overline{\Delta N} = \Delta N_g + \frac{1}{2} (S y_{gA} + y_{gB}) \tag{10a}$$

pa izraz za ΔN_g izražava kao razliku geoidnih undulacija u A i B tj. stavlja da je:

$$\Delta N_g = N_B - N_A$$

Dalje se $\frac{1}{2}$ S uzima za jedinicu dužine, a veličine N i λ_g zamenjuju odgovarajućim izrazima Stoksa i Vening—Majnesa pa se posle sređivanja dobija:

$$\overline{\Delta N} = \frac{1}{2 G \pi} \iint_F \Delta g \left[\frac{1}{\psi_B R} - \frac{1}{\psi_A R} - \frac{\cos \alpha}{(\psi_A R)^2} - \frac{\cos \beta}{(\psi_B R)^2} \right] dF \tag{16}$$

Već smo videli da je za integraciju ovoga izraza Molodenski preporučio da se uvede jedan sistem konfokalnih elipsi i hiperbola, u odnosu na polove A i B. Međutim Arnold u ovom slučaju predlaže da koordinantni sistem sačinjavaju dva snopa ortogonalnih krugova. On ukazuje dalje da će izborom konfokalnih elipsi i hiperbola za koordinatni sistem, postojeći površinski elementi biti delimično ograničeni hiperbolama a delimično elipsama i da ekstremne veličine radijus vektora ove ograničavajuće linije imaju odnos 1:2, kod krugova naprotiv iznosi ovaj odnos 1:1. [3].

Kod računanja gravimetriskih popravki ΔN za astronomski nivelman primenićemo sličan postupak kao kod računanja gravimetriskih odstupanja vertikala. Na anomalne karte biće postavljena oleata sa izvučenom mrežom. Za svaki površinski element mreže biće interpolovana srednja anomalija. Mreža na oleati treba da bude tako iscrtana, da svaki površinski elemenat na ΔN izvrši isti uticaj. Dakle za sabiranje se koriste samo interpolovane anomalne vrednosti Δg i suma se pomnoži sa jednim određenim faktorom, za dobijanje vrednosti ΔN.

U 1958. godini [4], Arnold daje poboljšanje svoje već ranije izvedene formule:

$$\overline{\Delta N} = -\frac{1}{2} S \left[(\lambda_i)_A + (\lambda_i)_B \right] + \Delta N_{b \cdot 1 \cdot 1} + \frac{1}{2} S \left[({}_1\Theta_s)_A + ({}_1\Theta_s) + \right.$$
$$\left. + \Delta \Omega - \frac{1}{2} S \left[\left(\tau^n_s\right)_A + \left(\tau^n_s\right)_B \right] + \frac{1}{2} S \left[\sum_2^3 ({}_1\Theta_s)_A + \sum_2^3 ({}_1\Theta_s)_B \right] \right. \quad (17$$

Prvi član na desnoj strani jednačine (17) predstavlja uobičajenu formulu za astronomski nivelman, drugi i treći član predstavljaju gravimetrisku popravku astronomskom nivelmanu, dok 4, 5 i 6 član predstavljaju odgovarajuće popravke zapreciznu teoriju geoidnih undulacija i odstupanja vertikala.

Treba naglasiti da se kod primene jednačine (17) koriste anomalije slobodnog vazduha, što predstavlja veliku prednost u odnosu na ranije izvedene formule.

LITERATURA

1. Molodenski, M. S.: Bestimmung der Gestalt des Geoids unter gemeinsamer Anwendung astronomisch geodätischer Lotabweichung und Schwerstörungen. Der Baltischen Geodätischen Kommission Helsinki 1937
2. Arnold, K.: Beiträge zur Gravimetrischen Geodäsie Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Potsdam 1956, Nr. 11
3. Arnold, K.: Über die Verbesserung astronomischer Nivellements durch Auswertung von Schwermessungen. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Reihe B — Heft Nr. 42 München 1957
4. Arnold, K.: Zur Theorie der gravimetrische Verbesserung astronomischer Nivellement Gerl. Beitr. zur Geophysik, Band 67 Leipzig 1958
5. Arnold, K.: Die Co-Geoid der Freiluftreduktion Gerl. Beitr. zur Geophysik, Band 66, Leipzig 1957