SREDNJA GREŠKA NEPOZNATIH KADA SE UZIMAJU U OBZIR GREŠKE DATIH VELIČINA PRI IZRAVNANJU METODOM POSREDNIH MERENJA

Dr Krunislav MIHAILOVIĆ, dipl. inž. — Beograd

Iz iskustva znamo da su greške datih veličina, često puta, mnogo veće od grešaka koje se javljaju u procesu merenja. Odnosno, greške datih veličina u odnosu na greške merenja mogu biti takve veličine koje s ene mogu zanemariti ukoliko želimo da dobijemo objektivnu ocenu tačnosti traženih veličina određenih iz izravnanja po metodi posrednih merenja.

Problem ocene tačnosti funkcija, kada se uzimaju u obzir greške datih veličina pri izravnanju po metodi najmanjih kvadrata razradio je još 1939. godine Pranis Pranjevič. Na bazi ove teorije pojavilo se niz radova u kojima je tretiran problem ocene tačnosti konačno usvojenih rezultata kada se uzimaju u obzir greške datih veličina u triangulaciji, poligonometriji i nivelmanu. Međutim, sa stanovišta stroge ocene tačnosti problem datih veličina ne može se izolovano posmatrati. Ovaj problem je u neposrednoj vezi sa zavisnošću koja je između ovih veličina uspostavljena u procesu ranijeg izravnanja. Naime, kroz prethodno izravnanje između datih veličina uspostavljena je stohastička, odnosno korelativna zavisnost. Ova se zavisnost može brojno izraziti preko koeficijenta korelacije, odnosno preko mešovitih koeficijenata težina.

Prema tome, kada se pri oceni tačnosti uzimaju u obzir greške datih veličina treba voditi računa i o njihovoj zavisnosti. Zbog toga, u ovome radu su pri oceni tačnosti izravnatih veličina po metodi posrednih merenja uzeti u obzir svi činioci, koji su bitni za objektivnu ocenu tačnosti. Pri tome, pretpostavljeno je, da su merenja međusobno nezavisna i da su oslobođena sistematskih grešaka.

Poznat je postupak na osnovu koga se tražene veličine pri posrednom izravnanju mogu izraziti u funkciji slobodnih članova. Radi jednostavnosti uzećemo dve nepoznate veličine.

$$-x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$$

$$-y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \qquad (1)$$

α_i i β_i su konstante koje se određuju po formuli:

$$\alpha_i = P_i a_i Q_{xx} + P_i b_i Q_{xy}$$

$$\beta_i = P_i a_i Q_{yx} + P_i b_i Q_{yy} \qquad (i = 1,2 \ldots n)$$

$$Q_{yx} = Q_{xy}$$

Pod uslovom da slobodni članovi sadrže samo greške merenja ocena tačnosti izravnatih veličina vrši se po poznatim formulama.

$$m_x = \mu \sqrt{\frac{1}{P_x}} = \mu \sqrt{Q_{xx}}$$

$$m_y = \mu \sqrt{\frac{1}{P_y}} = \mu \sqrt{Q_{yy}} \qquad (2)$$

gde je:

μ — srednja greška jedinice težine

P_x i P_y — težine izravnatih veličina $\varkappa$ i γ.

Međutim, slobodni članovi f_i nisu neposredno merene veličine. To su izvedene veličine koje su u funkciji merenih i datih veličina. Zbog toga, kroz slobodne članove dolaze do izražaja ne samo greške merenja nego i greške datih veličina.

Prema tome, umesto $f_1, f_2, \ldots \ldots f_n$ imaćemo $f_1', f_2', \ldots \ldots f_n'$. Ova promena slobodnih članova izazvaće promenu nepoznatih veličina x i y tj.

$$x \rightarrow x' \; ; \; y \rightarrow y'$$

te će jednačine (1) glasiti:

$$-x' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f'_i$$

$$-y' = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f'_i \qquad (3)$$

Konstante α_i i β_i ostaju nepromenjene.

Slobodni članovi mogu se u opštem obliku ovako definisati:

$$f'_i = F(l'_1, l'_2 \ldots . l'_n, \xi_1, \xi_2 \ldots . \xi_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \qquad (4)$$

gde su:

l'_i — veličine dobivene merenjem

ξ_i — date veličine.

Funkciju (4) možemo prikazati u linearnom obliku.

$$f'_i = f_{oi} + C_{i1} l_1 + C_{i2} l_2 + \ldots + C_{ir} l_r +$$

$$g_{i1} \xi_1 + g_{i2} \xi_2 + \ldots + g_{is} \xi_s \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{5}$$

gde je:

$$f_{oi} = F(l_{o1}, l_{o2}, \ldots l_{or} \xi_{o1}, \xi_{o2} \ldots \xi_{os})$$

$$l'_i = l_{oi} l_i, \quad \xi'_i = \xi_{oi} + \xi_i$$

Koeficijenti C_{ir} i C_{is} prestavljaju parcijalne izvode funkcije f_i' po argumentima l_{oi}, odnosno ξ_{oi}.

U formuli (5) označimo sa

$$f_i = C_{i1} l_1 + C_{i2} l_2 + \cdots + C_{ir} l_r$$

deo koji zavisi od tačnosti izvršenih merenja.

Uvrstimo (6) u (5) i izostavimo konstantu f_{oi} koja nema nikakvog uticaja na dalju ocenu tačnosti.

$$\begin{array}{l|c|c}
f'_1 = f_1 + g_{11} \xi_1 + g_{12} \xi_2 + \ldots + g_{1s} \xi_s & \alpha_1 & \beta_1 \\
f'_2 = f_2 + g_{21} \xi_1 + g_{22} \xi_2 + \ldots + g_{2s} \xi_s & \alpha_2 & \beta_2 \\
 & & \\
f'_n = f_n + g_{n1} \xi_1 + g_{n2} \xi_2 + \ldots + g_{ns} \xi_s & \alpha_n & \beta_n
\end{array}$$

Ako ove jednačine respektivno pomnožimo sa α_i, a zatim ih sumiramo, dobićemo:

$$-x' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f'_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_{i1} \xi_1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_{i2} \xi_2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_{is} \xi_s$$

Kada to isto ponovimo sa β_i, dobićemo:

$$-y' = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f'_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i g_{i1} \xi_1 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i g_{i2} \xi_2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n} \beta_i g_{is} \xi_s$$

Uvedimo skraćenice:

$$\alpha'_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_{i1}, \quad \alpha'_2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_{i2}, \ldots \alpha'_s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_{is}$$

$$\beta'_1 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i g_{i1}, \quad \beta'_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i g_{i2}, \ldots \beta'_s = \sum_{i=1}^{n} \beta_i g_{is}$$

Uzimajući ovo u obzir imamo:

$$
\begin{aligned}
-x' &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i \xi_i \\
-y' &= \sum_{i=1}^{h} \beta_i f_i + \sum_{i=1}^{n} \beta'_i \xi'_i
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Srednja greška nepoznate x' i y', biće:

$$
\begin{aligned}
m^2_{x'} &= \sum_{i=1}^{n} \alpha^2_i m^2_{fi} + \sum_{i=1}^{s} \alpha'^2_i m^2_{\xi_i} + 2 \sum_{i<j} \alpha'_i \alpha'_j r_{ij} m_{\xi_i} m_{\xi_j} \\
m^2_{y'} &= \sum_{i=1}^{n} \beta^2_i m^2_{fi} + \sum_{i=1}^{s} \beta'^2_i m^2_{\xi_i} + 2 \sum_{i<j} \beta'_i \beta'_j r_{ij} m_{\xi_i} m_{\xi_j}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Izrazimo srednje greške m_{fi} i $m_{\xi i}$ preko poznatih relacija.

$$
m^2_{fi} + \mu^2_1 \cdot \frac{1}{P_i} \qquad m\zeta = \mu^2_\xi \cdot \frac{1}{P_{\xi i}} = \mu^2_\xi Q_{\xi_i \xi_i}
\tag{9}
$$

gde su*

- μ_1 — srednja greška jedinice težine izvršenih opažanja u cilju određivanja x' i y'.
- μ_ξ — srednja greška jednice težine izvršenih opažanja u cilju određivanja datih veličina ξ_i.
- P_i — težine merenih veličina.
- $P_{\xi i}$— težine datih veličina. Uvrstimo (9) u (8)

$$
\begin{aligned}
m^2_{x'} &= \mu^2_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha^2_i}{P_i} + \mu^2_\xi \sum_{i=1}^{s} \alpha'^2_i Q_{\xi_i \xi_i} + 2 \mu^2_\xi \sum_{i<j} \alpha'_i \alpha'_j Q_{\xi_i \xi_j} \\
m^2_{y'} &= \mu^2_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta^2_i}{P_i} + \mu^2_\xi \sum_{i=1}^{s} \beta'^2_i Q_{\xi_i \xi_i} + 2 \mu^2_\xi \sum_{i<j} \beta'_i \beta'_j Q_{\xi_i \xi_j}
\end{aligned}
$$

odnosno

$$
\begin{aligned}
m^2_{x'} &= \mu^2_1 \left(Q_{xx} + \frac{\mu^2_\xi}{\mu^2_1} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} \alpha'_i \alpha'_j Q_{\xi_i \xi_j} \right) \\
m^2_{y'} &= \mu^2_1 \left(Q_{yy} + \frac{\mu^2_\xi}{\mu^2_1} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} \beta'_i \beta'_j Q_{\xi_i \xi_j} \right)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Očigledno vrednosti u zagradi pretstavljaju recipročne vrednosti težina izravnatih (traženih) veličina x' i y'.

---

*Pretpostavljamo da je m_f m_1

$$\frac{1}{P_{x'}} = Q_{x'x'} = Q_{xx} + \frac{\mu_\xi^2}{\mu_1^2} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} \alpha'_i \alpha'_j Q_{\xi_i \xi_j}$$

$$\frac{1}{P_{y'}} = Q_{y'y'} = Q_{yy} + \frac{\mu_\xi^2}{\mu_1^2} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} \beta'_i \beta'_j Q_{\xi_i \xi_j} \qquad (11)$$

Kada se zanemaruje korelativna zavisnost između datih veličina onda se koeficijenti težina određuju po formuli:

$$\frac{1}{Px'} = Q_{x'x'} = Q_{xx} + \frac{\mu_\xi^2}{\mu_1^2} \sum_{i=1}^{s} \alpha'^2_i \, Q_{\xi_i \xi_i}$$

$$\frac{1}{Py'} = Q_{y'y'} = Q_{yy} + \frac{\mu_\xi^2}{\mu_1^2} \sum_{i=1}^{s} \beta'^2_i \, Q_{\xi_i \xi_i}$$

Ili, ako zanemarimo greške datih veličina onda imamo:

$$\frac{1}{P_{x'}} = \frac{1}{P_x} = Q_{x'x'} = Q_{xx}$$

$$\frac{1}{P_{y'}} = \frac{1}{P_y} = Q_{y'y'} = Q_{yy}$$

Odnosno, dobijamo indetične vrednosti za koeficijente težina kao u slučaju kada su slobodni članovi sadržali samo greške merenja.

Kada uvrstimo (11) u (10)dobijamo srednje greške traženih veličina x' i y'.

$$m_{x'} = \mu_1 \sqrt{Q_{x'x'}}$$

$$m_{y'} = \mu_1 \sqrt{Q_{y'y'}} \qquad (12)$$

Na osnovu izloženog, nije teško primetiti, da se suština ocene tačnosti (kada se uzimaju u obzir i greške datih veličina kao i njihova korelativna zavisnost, svodi na određivanje koeficijenata težina $Q_{x'x'}$ i $Q_{y'y'}$. Upravo, treba odrediti takve koeficijente težinakoji se odnose na prave vrednosti izravnatih veličina x' i y'. Za njihovo određivanje potrebno je:

1. Srednja greška jednice težine μ_ξ koja karakteriše tačnost merenih veličina na osnovu kojih su određene date veličine. Ona se uzima iz elaborata osnovne (date) mreže.

2. Srednja greška jednice težine μ_1 koja karakteriše tačnost izvršenih merenja u cilju određivanja traženih veličina.

3. Koeficijent težina $Q_{\xi_i \xi_j}$ koji se uzimaju iz prethodnog izravnanja u kome su ustanovljene vrednosti datih veličina.

4. Konstante $\alpha_i, \beta_i, \alpha'_i$ i β'_i određuju se na izloženi način.

I ako je određivanje srednjihgrešaka izravnatih veličina prikazano za slučaj kada imamo dve tražene veličine, ova se teorija, po analogiji, može primeniti na proizvoljan broj nepoznatih veličina.