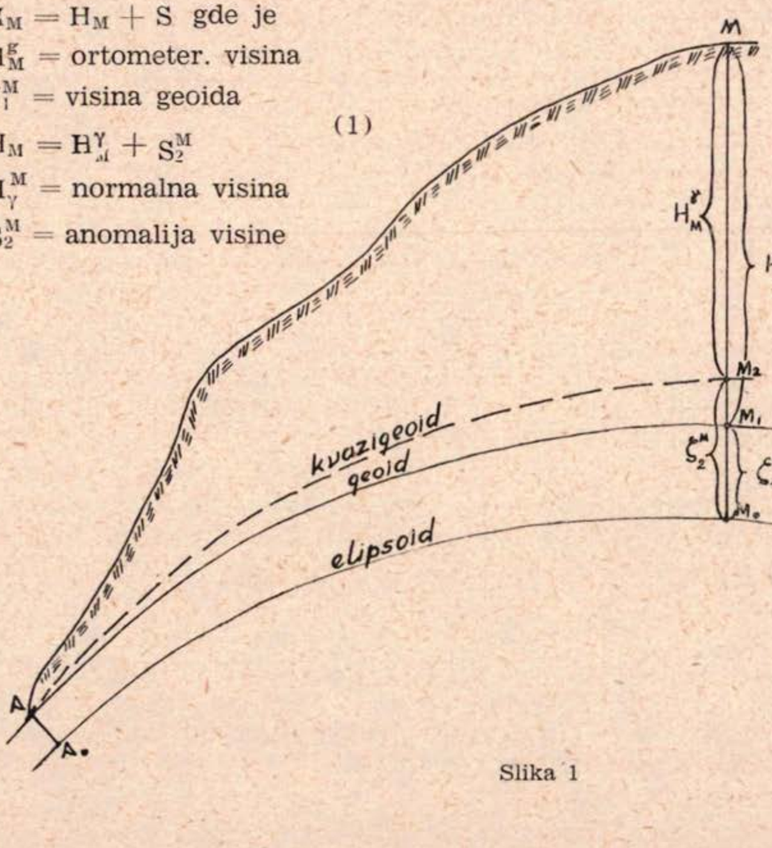
PRILOG ISPITIVANJU VISINA

Dragoljub ČUKIĆ, dipl. ing. — Beograd

Visine nivelmanskih repera imaju dvojaku namenu i to: za praktičnu upotrebu i za naučna istraživanja. Zavisno od namene su i zahtevi sa kojom tačnošću treba poznavati visinu repera. Visine za praktičnu primenu, uglavnom, ne iziskuju visoku tačnost, mada postoji niz tehničkih radova koji traže vrlo precizno merenje visinskih razlika i poznavanje relativnih visina. Visine, potrebne za naučno-istraživačke radove, moraju biti određene sa najvećim stepenom tačnosti. Poznato je da merena visina jedne tačke na zemljinoj površini nije jednoznačno određena, nego je zavisna od puta nivelanja, što je posledica neparalelnosti nivoskih površina, pa otuda proizlazi i potreba za izvesnim korekcijama merenih visina.

$$
\begin{aligned}
&H_M = H_M + S \quad \text{gde je} \\
&H_M^g = \text{ortometer. visina} \\
&S_1^M = \text{visina geoida} \\
&H_M = H_M^\gamma + S_2^M \qquad\qquad (1) \\
&H_\gamma^M = \text{normalna visina} \\
&S_2^M = \text{anomalija visine}
\end{aligned}
$$



Slika 1

Geodetska visina H je zbir vertikalnih otstojanja ζ od površine usvojenog elipsoida do površine geoida i H odgovarajuće tačke na zemljinoj površini. Otstojanje od usvojenog elipsoida do geoida zove se visina geoida, a otstojanje od geoida do tačke na zemljinoj površini zove se ortometrijska visina. Ako se računanja vrše na kvazigeoidu, onda se geodetska visina dobije kao zbir vertikalnih otstojanja od površine usvojenog elipsoida do površine kvazigeoida, što se zove anomalija visine i vertikalnog otstojanja od kvazigeoida do odgovarajuće tačke na Zemljinoj površini — što se zove normalna visina, vidi sl. 1.

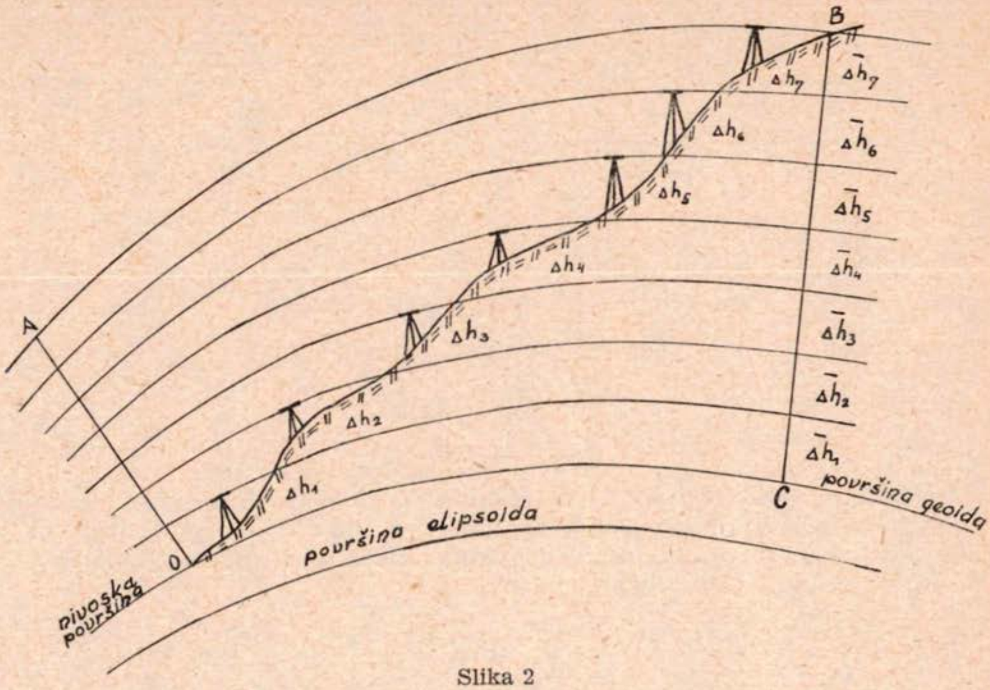
Visina geoida kao i anomalija visine dobijaju se astrogeodetskim kao i gravimetrijskim metodama; ortometrijske visine se dobijaju, kada se merenim visinama dodaju ortometrijske popravke, a normalne, kada se merenim visinama dodaju odgovarajuće popravke (popravke za normalne visine). Kod nas je nulta nivoska površina ona, koja leži 3,352 m. ispod normalnog repera u Trstu i praktično, ona se poklapa sa površinom geoida od koje bi se trebale računati ortometrijske visine. Ortometrijske popravke se unose za sve visine repera koji su obuhvaćeni nivelmanom visoke tačnosti i preciznim nivelmanom.

Računanjem ortometrijskih visina na osnovu merenih vrednosti sile teže, bavili su se razni autori i uglavnom, polazili od raznih pretpostavki o rasporedu gustina u gornjim delovima Zemljine kore. Osnovni nedostatak ovih pretpostavki bio je u tome, što se nikada za visinu tačke nisu dobile iste vrednosti i što su se znatno razlikovale među sobom (vidi tabelu na str. 149 u drugoj knjizi »Viša geodezija« prof. ing. Svečnikova).

Do sada su kod nas, kao ortometrijske upotrebljavane tzv. normalne ortometrijske popravke, tj. popravke sračunate u normalnom polju Zemljine teže. Ovo najviše zbog nepostojanja gravimetrijskih merenja na reperima duž nivelmanskih vlakova ili nepostojanja gravimetrijskih karata anomalija sile teže, na terenima kuda se protežu vlaci navedenih vrsta nivelmana. Danas su na dobrom delu vlakova vršena gravimetrijska merenja i na većem delu uglavnom postoje gravimetrijske karte, pa se više ne možemo zadovoljiti ovakvom popravkom, nego bi se trebalo pozabaviti pitanjem izbora sistema visina kod nas, odnosno koje i kakve popravke usvojiti, a da bi visine bile prikladne i za praktične i za naučne svrhe.

Neka je na sl. 2 prikazan profil dela OB Zemljine površine, tj. put nivelanja koji ne ide po paraleli. Ako sa Δh obeležimo visinske razlike dobijene merenjem na nivelmanskim stranicama, onda je merena visina $H_{mj} = \sum_{O}^{B} \Delta h$. Ako bi se nivelanje vršilo jedanput nivoskom površinom od tačke 0 do tačke C i dalje po vertikali od C do B, dobila bi se jedna visina, a drugi put po vertikali od O do A i dalje nivoskom površinom od A do B, dobila bi se druga visina. U prvom slučaju visina je određena odreskom CB, a u drugom slučaju odreskom 0A. Razlika nastaje zbog neparalelnosti nivoskih površina.

Uzmimo da je g merena vrednost sile teže na stajalištu letava (sl. 2), $\bar{g}$ vrednost sile teže na odgovarajućim nivoskim površinama. Onda je:



Slika 2

$$
\begin{aligned}
g_1 \Delta h_1 &= \bar{g}_1 \bar{\Delta} h_1 \\
g_2 \Delta h_2 &= \bar{g}_2 \bar{\Delta} h_2 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
g_n \Delta h_n &= \bar{g}_n \bar{\Delta} h_n \\
\hline
\sum_{(OB)} g_i \Delta h_i &= \sum_{(CB)} \bar{g}_i \bar{\Delta} h_i
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Odavde vidimo da je $g\Delta h$ = konstantna veličina za jednu nivosku površinu.

Smatrajući da je Δh elementarno mala veličina dh, možemo pisati:

$$\int_{(OB)} g\,dh = \int_{(CB)} \bar{g}\,dh$$

Na desnoj strani jednačine, mesto podintegralne vrednosti g može se staviti ispred integrala njena srednja vrednost d_m na odresku vertikale CB (saglasno teoremi Lagranža o srednjoj vrednosti). Onda je:

$$\int_{(CB)} \bar{g}\,dh = \bar{g}_m \int_{(CB)} dh = \bar{g}_m H_r^B$$

Iz napred navedenih jednakosti dobijemo da je:

$$\int\limits_{(OB)} g dh = \bar{g}_m H_r^B$$

$$H_r^B = \frac{1}{\bar{g}_m^B} \int\limits_{(OB)} g dh \tag{3}$$

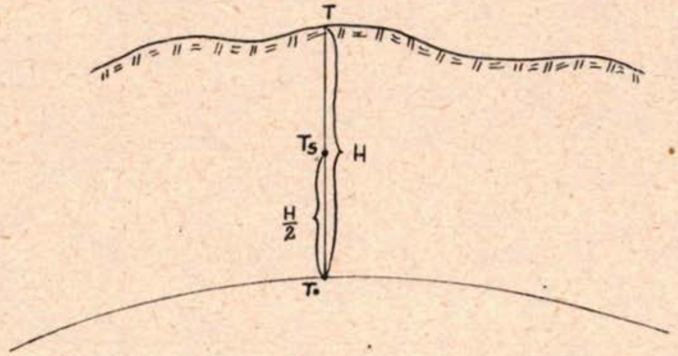
To je ortometrijska visina tačke B, koja ne zavisi od puta nivelanja. Rastojanje od geoida do neke nivoske površine nije svuda isto, nego zavisi od vrednosti g i $\bar{g}_m$, pa su onda i ortometrijske visine različite za istu nivosku površinu.

Normalne ortometrijske popravke, koje su usvojene kod nas, računaju se pod pretpostavkom postojanja normalnog polja sile teže. Formula po kojoj se računaju ove popravke je:

$$C_H = \beta H_m \Delta \cos 2\varphi \tag{4}$$

Iz formule se vidi da je popravka funkcija samo visine i širine tačke, a da je zanemaren uticaj prave vrednosti sile teže.

Srednju vrednost g_m na odresku vertikale tražene tačke nemoguće je tačno odrediti. Ona se, kao što je rečeno, uzima pod izvesnim pretpostavkama o rasporedu i gustini mase na traženoj vertikali. Helmert je predložio sledeći način za računanje g_m:



Slika 3

Neka je g_m vrednost sile teže u tački Ts, tj. u sredini vertikale ToT (vidi sl. 3). Svođenje sile teže na geoid izvodi se po sledećoj formuli:

$$g_0 = g + \Delta g — \Delta g' \tag{5}$$

g = sila teže u tački T

Δg = Fajeova popravka

$\Delta g'$ = popravka za Bugeov sloj

Helmert je, za vrednost sile teže na sredini vertikale, u tački Ts uzeo, da otpada uticaj sloja Zemljine kore između geoida i spoljne površine Zmlje, jer se uticaj slojeva ispod Ts do geoida i onih iznad

Ts do površine poništavaju, pa prema tome za tačku u sredini sloja koristio je samo Fajeovu popravku. Onda je:

$$\bar{g}_m = g_0 - \frac{\Delta g}{2}$$

$$\bar{g}_m = g + \Delta g - \Delta g' - \frac{\Delta g}{2}$$

$$\bar{g}_m = g + \frac{\Delta g}{2} - \Delta g' \tag{6}$$

$$\Delta g = \frac{2H}{R} g$$

$$\Delta g' = \frac{3\,\Theta\, H}{2\Theta_m R} \cdot g$$

H = ortometrijska visina tačke T
R = srednji poluprečnik Zemlje
Θ = prosečna gustina sloja iznad geoida u okolini gravimetrijske tačke
Θ_m = prosečna gustina Zemlje.
Zamenom dobijemo:

$$\bar{g}_m = g + \frac{H}{R} g \left(1 - \frac{3\,\Theta}{2\,\Theta_m}\right)$$

$$1 - \frac{3\Theta}{2\Theta_m} = \varkappa \tag{7}$$

$$\bar{g}_m = g + \frac{Hg}{R} \varkappa$$

$\frac{\varkappa g}{R}$ se uzima kao konstantna veličina za jedan poligon ili za određeni deo mreže.

Nithamer, za računanje prosečne vrednosti sile teže, ovoj formuli dodaje još topografsku popravku. Postoji još niz predloga za računanje prosečnog ubrzanja, koji su uglavnom osnovali na hipotetičnim pretpostavkama o rasporedu i uticaju Zemljinih masa.

Radovi Molodenskog omogućili su udovoljenje drugog sistema visina — normalne visine, koje su oslobođene gornjeg nedostatka. Uzimanje kvazigeoida, kao površine na kojoj se računaju normalne visine, izbegnut je uticaj hipotetičnog g_m. Normalne visine dobijemo, kada u formuli (3) zamenimo $\bar{g}_m^B$ sa $\bar{\gamma}_m^B$

$\bar{\gamma}_m^B$ je vrednost normalne sile teže na polovini visine odgovarajuće tačke.

$$\bar{\gamma}_m^B = \gamma_0^B - 0{,}3086 \frac{H_{mj}}{2} = \gamma_0^B - 0{,}1543\, H_{mj}$$

γ_0^B = vrednost normalne sile teže na usvojenom elipsoidu za odgovarajuću tačku B

H_{mj} = merena visina tačke B

0,3086 = normalni vertikalni gradijent sile teže (Fajeov).

Pa će formula za normalnu visinu tačke B glasiti:

$$H_q^B = \frac{1}{\gamma_m^B} \int_{OB} g\, dh \tag{8}$$

Na površini okeana $\int_{OB} g\, dh$ je ravan nuli, pa se, posmatrajući formulu za ortometrijsku i normalnu visinu, vidi da se površine kvazigeoida i geoida poklapaju, pošto su pomenute visine jednake nuli.

Koristeći formule za normalnu i ortometrijsku visinu, možemo doći do njihove razlike.

$$H_q^B = \frac{1}{\gamma_m^B} \int_{OB} g dh$$

$$H_r^B = \frac{1}{g_m^B} \int_{(OB)} g\, dh$$

$$\frac{H_r - H_q}{H_q} = \frac{\bar{\gamma}_n - \bar{\gamma}^m}{\bar{g}_m} \tag{9}$$

$$H_r - H_q = \frac{\bar{\gamma}_n - \bar{g}_m}{\bar{g}_m} H_q$$

Ova razlika predstavlja odstupanje između geoida i kvazigeoida. Ona se ne može tačno odrediti zbog nepoznavanja tačne vrednosti g_m, ali možemo naći njene približne vrednosti. Ako je $g_m - \gamma_m = 100$ mgal, a visina tačke H = 1500 m, onda je Hq — Hr = 0,153 m, a ako je $g_m - \gamma_m = 50$ mgal i H = 500, razlika je bila Hq—Hr = 0,025 m. S obzirom na postojanje velikih anomalnih područja i velikih visina u našoj zemlji, iz navedenih primera se vidi, da otstupanja između kvazigeoida i geoida mogu biti znatna.

Dok je specifičnost greške ortometrijske popravke u nepoznavanju prave vrednosti g_m, dotle je specifičnost greške popravke za normalnu visinu u netačnom određivanju normalnog ubrzanja sile teže γ, koje se računa po formuli:

$$\gamma = \gamma_0 (1 + \beta \sin^2\varphi - \beta_1 \sin^2 2\varphi) \tag{10}$$

γ_0 = ekvatorijalna gravimetrijska konstanta čija je vrednost

po Helmertu = 978030 mgal (iz 1901—1909)
po Heiskanenu = 978049 mgal (iz 1928 — upotrebljava se u formulama za sferoide: međunarodni, Heiskanena, Besela i Krasovskog)
po Kauli = 978044 mgal — (dato 1961 godine na osnovu satelitskih podataka)

Jedan deo greške popravke za normalnu visinu uslovljen je netačnošću poznavanja vrednosti ekvatorijalne konstante i računa se ovako:

$$H_q^B = \frac{1}{\gamma_n^B} \int_{(OB)} g dh = \frac{1}{\gamma_m^B + \Delta_1 \gamma} \int_{(OB)} g dh$$

γ_m bi bila pogrešna vrednost ekvatorijalne gravimetrijske konstante. $\Delta_1\gamma$ je greška zbog netačnosti te konstante. Razlika ekvatorijalne konstante po Heiskanenu i na osnovu satelitskih merenja je oko 5 mgal. Njen uticaj na normalnu visinu ćemo izvesti na sledeći način:

$$H_q^B = \frac{1}{\gamma_m^B \left(1 + \frac{\Delta_1 \gamma}{\gamma_m^B}\right)} \int_{(OB)} g dh = \frac{1}{\gamma_m^1} \left(1 - \frac{\Delta_1 \gamma}{\gamma_m^B}\right) \int_{(OB)} g dh =$$

$$= \bar{H}_q^B - \frac{\Delta_1 \gamma H_q^B}{\gamma_m^B}$$

ovde je $\bar{H}_q^B$ — bespogrešna vrednost normalne visine. Odavde izlazi da je:

$$\Delta_1 H_q^B = - \frac{\Delta_1 \gamma}{\gamma_m^B} H_q^B \approx - H_p^B \, \underline{\underline{5}} \cdot 10^{-6} \qquad (11)$$

Ako se uzme da je H_q^B = 1500 m ta greška će iznositi 7,5 mm, a ako je H_q^B = 500 m greška je 2,5 mm. Razlika u širinama može iznositi, zbog orijentacije elipsoida do 10″.

$\Delta_2 H_q^B = - \frac{\Delta_2 \gamma H_q^B}{\gamma_n}$ je greška normalne sile teže zbog različite orijentacije.

Diferenciranjem formule za normalnu vrednost sile teže po γ daće nam približnu vrednost $\Delta_2\gamma$

$$\begin{aligned} &\Delta\varphi = \gamma_0 \beta \sin 2\varphi \, \Delta\varphi \\ &\text{za } \varphi = 45^0 \text{ i } \Delta\varphi = 10'' \\ &\Delta_2 H_q^B = - H_q^B \cdot 0{,}25 \cdot 10^{-6} \end{aligned} \qquad (12)$$

Ova je potpuno zanemarljiva, jer je 20 puta manja od prve, koja je takođe po svojoj veličini zanemarljiva, jer je znatno manja od grešaka merenja.

Iz formule za normalnu visinu vidi se, da su normalne visine tačaka koje leže na jednoj nivoskoj površini i na istoj širini, na vodenim površinama jezera iste, a da duž meridijana imaju najveću razliku.

Formulu za normalnu visinu (8) je kandidat tehničkih nauka V. F. Jermejev preobrazio u sledeći oblik:

$$H_q^B = \frac{1}{\gamma_m^B} \int_{(OB)} g\,dh = \frac{1}{\gamma_n^B} \int_{(OB)} (g - \bar{\gamma}_n^B + \bar{\gamma}_n^B - \gamma + \gamma)\,dh$$
$$H_q^B = \int_{(OB)} dh + \frac{1}{\bar{\gamma}_m^B} \int_{(OB)} (\gamma - \bar{\gamma}_n^B)\,dh + \frac{1}{\bar{\gamma}_m^B} \int_{(OB)} (g - \gamma)\,dh \qquad (13)$$

gde je γ = normalna vrednost sile teže odgovarajućeg repera na visini H iznad elipsoida.

Prvi član predstavlja sumu visinskih razlika dobijenih merenjem, tj. merenu visinu Hm, drugi član predstavlja popravku za neparalelnost nivoskih površina normalnog polja, a treći član popravku zbog uticaja anomalija sile teže.

$$\int_{(OB)} (\gamma - \bar{\gamma}_m^B)\,dh = \int_{(OB)} (\gamma_0 - \gamma_0^B)\,dh,$$

gornja formula dobija sledeći oblik:

$$H_q^B = \int_{(OB)} dh + \frac{1}{\gamma_m} \int_{(OB)} (\gamma_0 - \gamma_0^B)\,dh + \frac{1}{\gamma_m} \int_{(OB)} (g - \gamma)\,dh \qquad (14)$$

Jermejev je dalje izveo formulu za praktično računanje i to u obliku razlike normalnih visina između dve tačke, tako da se popravka visinske razlike dveju normalnih visina računa po formuli:

$$H_q^{n+1} - H_q^n = \Delta h_{n,n+1} - \frac{1}{\gamma_m}\left(\gamma_0^{n+1} - \gamma_0^n\right) H + \frac{1}{\gamma_m}\left(g - \gamma\right)_m \Delta h_{n,n+1} \qquad (15)$$

gde je:

$\Delta h_{n,n+1}$ = visinska razlika među reperima n i n+1

$(g-\gamma)_{n+1}, (g-\gamma)_n$ = anomalija sile teže na reperima n i n+1

$(g-\gamma)_m$ = srednja anomalija sile teže među reperima n i n+1

$\gamma_0^{n+1}; \gamma_0^n$ = normalna vrednost sile teže na elipsoidu koja se uzima po φ repera n i n+1

γ = normalna vrednost sile teže odgovarajuće tačke na visini H

Hm = srednja visina među reperima n i n+1

Ranije smo našli razliku između ortometrijske i normalne visine — formula (9) — iz koje sledi da je ortometrijska visina jednaka:

$$H_r = H_q^B - \frac{g_m - \gamma_m}{g_m} H_q \tag{16}$$

Uočljivo je da je prelaz sa normalne visine na ortometrijsku takođe relativno lak.

Ako u formuli (3) zamenimo g_m sa γ_{45} dobićemo dinamičku visinnu:

$$H_q^B = \frac{1}{\gamma_0^{45^0}} \int_{(OB)} gdh \tag{17}$$

Kod ovih visina je osnovno preimućstvo u odnosu na druge, da sve tačke koje su na jednoj nivoskoj površini imaju istu visinu. Odnos između dinamičke i normalne visine dobija se na sledeći način:

$$\frac{Hd}{Hq} = \frac{\gamma_m}{\gamma_{45^0}}; \quad \frac{Hd - H_q}{H_q} = \frac{\gamma_m - \gamma_{045^0}}{\gamma_{045^0}}; \quad Hd = H_q + H_q \frac{\gamma_m - \gamma_{045^0}}{\gamma_{045^0}} \tag{18}$$

Odavde se vidi da se dinamičke visine mogu lako računati na osnovu normalnih. Ova formula podešena za tablična računanja izgleda ovako:

$$Hd = H_q - {}_qH_q \tag{19}$$

gde je:

$$q = 1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_{045_0}} + \frac{0{,}0003086}{2\gamma_{045_0}} H_0 \tag{20}$$

Prelaz od normalnih visina na dinamičke računa se vrlo jednostavno pomoću tablica sastavljenih za koeficijenat q po argumentima φ i H. Dinamičke visine bile bi potrebne kod izvođenja većih građevinskih i hidrotehničkih radova.

Koristeći formulu za razliku normalnih visina, izvršili smo računanja tih razlika na tri poligona u našoj zemlji. Poligon br. 1 se proteže na vrlo interesantnom području sa geodetskog stanovišta. Visine repera kreću se u rasponu od 1 m do 1018 m, a anomalije sile teže $g - \gamma$ između + 57 mgal do —82 mgal. Zbog ovog je poligon karakterističan za izučavanje popravki za visinu. Na njemu su na svim reperima vršena gravimetrijska merenja a takođe postoje i karte Bugeovih anomalija. Vlaci se prostiru duž jadranske obale kao i preko planinskih prevoja. Drugi poligon se nalazi na području gde se visine kreću od 2 m do 954 m, a $g - \gamma$ od —10 mgal do +83 mgal. Ovde su popravke za normalnu visinu mnogo manje, pored ostalog i za to, jer anomalije $g - \gamma$ imaju manje razlike i skoro se čitavim poligonom nalaze u stalnom ravnomernom porastu odnosno opadanju (takoreći imaju sistematski karakter). Ovo nije slučaj kod prvog poligona, što će se videti iz tabele br. 3. U trećem poligonu nadmorske visine repera se kreću od 2 m do 920 m, a anomalije $g - \gamma$ od —48 mgal do +67 mgal.

U tabeli br. 1 dat je pregled zatvaranja poligona po vlacima, na osnovu normalne ortometrijske popravke i popravke za normalnu visinu — popravke Molodenskog. Tabela br. 2 data je radi zgodnijeg upoređivanja normalnih ortometrijskih popravki i popravke Molodenskog u odnosu na visine i vrednosti gravimetrijskih anomalija. Posmatrajući tabelu br. 2, uočavamo da je u prvom poligonu razlika između popravke Molodenskog i normalne ortometrijske popravke dosta velika, dok je u druga dva znatno manja. U prvom poligonu g—γ dostiže razliku između maksimalne i minimalne vrednosti 139 mgal, u drugom —93 mgal a u trećem —115 mgal. Popravke Molodenskog nisu velike u poređenju sa normalnim ortometrijskim, ali ipak njihovim upoređivanjem u tabeli br. 1, vidi se da se njihove vrednosti, za pojedine vlakove razlikuju i po veličini i po predznaku. Verovatno bi greška nezatvaranja poligona u našoj mreži nešto drugačije izgledala, ako bi se uzele umesto normalnih ortometrijskih popravki, popravke Molodenskog.

Ranije smo napomenuli, da postoje područja gde imamo gravimetrijske karte Bugeovih anomalija, a nemamo merene veličine sile teže na reperima. Postavlja se pitanje sa kakvom ćemo tačnošću dobiti popravke za normalnu visinu ako koristimo te karte. U tabeli br. 3, date su popravke za normalne visine na čitavom poligonu, a po pojedinim delovima, računate u tri varijante. Po prvoj varijanti računate su popravke kada je uzimana vrednost sile teže g merena na svim reperima. Po drugoj varijanti došli smo do vrednosti sile teže g na reperima na sledeći način:

Tablica 1

Vlak br.	Dužina km	Visinska razlika m	Norm. ort. popravka mm	Popravka Molodenskog mm	$H+C_H$ m	$H+C_M$ m
			Poligon br. 1			
I	36,0	139,37160	—2,20	+ 0,33	139,36940	139,37193
II	78,9	358,66110	—3,90	+ 8,11	358,65720	358,66921
III	58,1	×422,40440	+8,30	+33,32	×422,41270	×422,43772
IV	248,0	79,56280	+3,00	+ 3,60	79,56580	79,56640
	421,0	× 9,99990	+5,20	+45,36	0,00510	0,04526
			Poligon br. 2			
I	28,1	203,04168	— 1,34	— 4,92	203,04302	203,03676
II	70,7	×607,27248	+10,03	+ 3,69	×607,28251	×607,27617
III	139,8	490,40546	—10,83	—12,94	490,39463	190,39252
IV	40,1	43,69925	— 7,40	— 7,30	43,69185	43,69195
V	75,0	×655,58105	+16,40	+17,72	×655,59745	×655,59877
	353,7	× 9,99992	+ 9,54	— 3,75	0,00946	× 9,99617
			Poligon br. 3			
I	107,8	312,40630	+ 4,60	—13,08	312,41090	312,39322
II	65,6	92,04285	+ 8,20	+ 9,73	92,05105	92,05258
III	53,1	48,46735	+ 4,90	+10,27	48,47225	48,47762
IV	128,4	×547,02351	— 6,90	+ 8,65	×547,01661	×547,03216
	354,9	× 9,94001	+10,80	+15,57	× 9,95081	× 9,95558

Tablica 2

Poligon br.	Dužina km	H metara od—do	mgala od—do	Nor. ort. p. C mm H	Popr. Molod C mm M
I	421	1—1018	—82—+57	+ 5,20	+45,36
II	354	2— 954	—10—+83	+ 9,54	— 5,37
III	355	2— 920	—48—+67	+10,80	+15,57

$$g' = A_B + \gamma_0 - \Delta g_F + \Delta g_S$$

$$g' = A_B\, \gamma_0 - 0{,}3086\, H + 0{,}0419\, \sigma H \tag{21}$$

gde je Δ_B = Bugeova anomalija uzimana sa karte do na 0,1 mgal

Δg_F = Fajeova popravka

Δg_S = 0,0419 σ H — popravka za sloj.. Za σ je uzimana vrednost 2,67 cm³/gr za područje na kome leži ovaj poligon. U trećoj varijanti je g dobijeno na sledeći način:

$$g' = A_B + \gamma_0 - \Delta g_E + \Delta g_S - \Delta g_C \tag{22}$$

gde je Δg_c = popravka za reljef.

Popravka za reljef u trećem slučaju nije računata za sve tačke — repere, već samo za one na međusobnom otstojanju od oko 10 km. Ova popravka se odnosi na gravimetrijske tačke koje su obično bile u neposrednoj blizini repera, a u nekim slučajevima i na putu nivelanja između dva repera. Popravka za reljef na pojedinim reperima je računata tako, da svi reperi između dve gravimetrijske tačke imaju iste popravke (ovo svakako ne odgovara pravom stanju, ali smo ovaj način izabrali da bi se izbegla obimna računanja na određivanju tih popravki). Recimo, ako je gravimetrijska tačka br. 24 imala popravku za reljef 2 mgal, a tačka br. 25 — 9 mgal, onda su svi reperi između njih dobili popravku za reljef od 7 mgal.

U našem slučaju daćemo srednje greške ovako dobijenih popravki za reljef, u odnosu na njihove prave vrednosti, za tri sektora vlaka od po trideset repera, u poligonu br. 1. Prave vrednosti Δg_c dobili smo oduzimanjem računate vrednosti g' po drugoj varijanti — formula (21) od merenog g. U prvom sektoru Δg_c se kreće u granicama od 5,2 mgal do 3,4 mgal. Kod prvog sektora, srednja greška ± 0,7 mgal. Prvi i drugi sektor nalaze se na strmom terenu, gde su popravke za reljef znatne vrednosti, a treći na terenu gde su popravke za reljef male. U skladu sa ovim su i srednje greške dobijenih popravki. Prema tome, ako bismo hteli, gravimetrijske anomalije na reperima imati u granicama od 1 mgal, što nam omogućavaju čitanja sa karata Bugeovih anomalija, to bi u strmim terenima morali vršiti naknadna računanja popravki za reljef na karakterističnim reperima. Razumljivo je da bi se ti reperi nalazili na prelazima iz ravničarskog u strmiji teren i obratno.

Uzimajući u obzir gornje vrednosti srednjih grešaka popravki za reljef koje utiču na vrednosti anomalija g—γ, izračunaćemo koliko dobijamo pogrešne visinske razlike kod računanja normalnih visina i to po formuli:

$$\varepsilon = \frac{\delta\,(g-\gamma)\,\Delta h}{\gamma} \tag{23}$$

Tablica 3

Od repera do repera	D km	(g—γ) mgal na *I* reperu II reperu	Hm na I reperu II reperu
1	2	3	4
1— 2	44,1	—71,1 do —29,8	1,3— 8,5
2— 3	7,7	—29,8 do — 9,0	8,5— 186,6
3— 4	6,3	— 9,0 do —16,0	186,6— 82,7
4— 5	9,0	—16,0 do — 7,0	82,7— 137,9
5— 6	5,7	— 7,0 do —16,4	137,9— 60,0
6— 7	11,7	—16,4 do —21,1	60,0— 12,9
7— 8	20,2	—21,1 do +18,1	12,9— 353,1
8— 9	38,8	+18,1 do —23,9	353,1— 295,3
9—10	32,8	—23,9 do +57,3	295,3—1012,2
10—11	3,0	+57,3 do +42,2	1012,2— 897,6
11—12	7,2	+42,2 do +54,0	897,6—1018,2
12—13	19,2	+54,0 do +20,1	1018,2— 853,0
13—14	82,6	+20,1 do —82,5	853,0— 27,5
14—15	3,9	—82,5 do —59,9	27,5— 179,8
15—16	7,4	—59,9 do —49,2	179,8— 212,6
16—17	8,1	—49,2 do —55,6	212,6— 101,5
17—18	4,0	—55,6 do —66,5	101,5— 11,2
18—19	12,1	—66,5 do —35,6	11,2— 239,0
19—20	9,9	—35,6 do —66,5	239,0— 10,8
20—21	16,7	—66,5 do +22,3	10,8— 806,5
21—22	23,5	+22,3 do —47,0	806,5— 3,2
22—23	13,8	—47,0 do —33,3	3,2— 186,6
23—24	4,1	—33,3 do —24,6	186,6— 11,4
24—25	6,3	—24-6 do —37,0	11,4— 148,9
25—26	15,4	—37,0 do —43,5	148,9— 2,7
26—27	4,4	—43,5 do —21,9	2,7— 177,0
27—28	3,4	—21,9 do —37,2	177,0— 8,9
28—29	12,3	—37,2 do —28,1	8,9— 214,8
29—30	9,8	—28,1 do —71,1	214,8— 1,3

Visinska razlika na prvom sektoru iznosi 33 m, a greška razlike normalne visine računata po ovoj formuli:

$$\varepsilon = \frac{2{,}2 \times 33.000}{980 \quad 4000} = 0{,}1 \text{ mm, za drugi sektor, gde je}$$

$\Delta h = 214$ m, $\delta(g—\gamma) = 3{,}6$ mgal, ε je 0,8 mm, i kod trećeg sektora $\Delta h = 402$ m, $\delta(g—\gamma) = 0{,}7$ mgal, ε je 0,3 mm. Ako uzmemo jedan ekstremni primer, gde bi Δh iznosila 1.000 m, a $\delta(g—\gamma) = 3{,}6$ mgal, onda bi greška u računanju popravki za normalne visine, iznosila 3,7 mm. Kao što se vidi i ovaj usvojeni ekstremni slučaj, skoro bi se mogao zanemariti u odnosu na greške nivelanja i eventualne lošije komparacije letava.

Tablica 3

Normalne popravke I verzija	II verzija	III verzija	I—III verzija mm	Normalna ortometr C	Razlika I verzije i norm. ortom. I—C mm
5	6	7	8	9	10
—0,00048	—0,00034	—0,00042	—0,06	± 0,00	— 0,48
—0,00539	—0,00421	—0,00539	± 0,00	—0,30	— 5,09
+0,00173	+0,00127	+0,00168	+0,05	—0,30	+ 2,03
—0,00145	—0,00130	—0,00151	+0,06	—0,50	— 0,95
+0,00111	+0,00094	+0,00120	—0,09	—0,30	+ 1,41
+0,00114	+0,00092	+0,00115	—0,01	—0,20	+ 1,34
—0,00342	—0,00266	—0,00387	+0,45	—1,10	— 2,32
—0,00154	—0,00181	—0,00167	+0,13	—1,00	— 0,54
+0,00888	+0,01263	+0,00926	—0,38	—0,90	+ 9,78
—0,00556	—0,00600	—0,00586	+0,30	—0,30	— 5,26
+0,00724	+0,00746	+0,00740	—0,16	+1,20	+ 6,04
—0,00995	—0,01011	—0,01005	+0,10	—2,40	— 7,55
+0,04843	+0,04414	+0,04876	—0,33	+6,90	+41,53
—0,01186	—0,01176	—0,01191	+0,05	+0,10	—11,96
—0,00162	—0,00157	—0,00162	± 0,00	+0,10	— 1,72
+0,00722	+0,00685	+0,00723	—0,01	+0,40	+ 6,82
+0,00635	+0,00584	+0,00649	—0,14	± 0,00	+ 6,35
—0,01293	—0,01162	—0,01263	—0,30	+0,60	—13,53
+0,01422	+0,01332	+0,01409	+0,13	+0,70	+13,52
—0,02099	—0,01470	—0,02052	—0,47	+2,60	—23,59
+0,02222	+0,01573	+0,02112	+1,10	+1,70	+20,52
—0,00933	—0,00933	—0,00933	± 0,00	—0,30	— 9,03
+0,00956	+0,00956	+0,00956	± 0,00	—0,20	+ 9,76
—0,00712	—0,00712	—0,00712	± 0,00	± 0,00	— 7,12
+0,00695	+0,00626	+0,00696	—0,01	—0,05	+ 7,00
—0,00702	—0,00610	—0,00703	+0,01	—0,01	— 7,01
+0,00634	+0,00529	+0,00617	+0,17	—0,01	+ 6,35
—0,00898	—0,00712	—0,00859	—0,39	—0,05	— 8,93
+0,01159	+0,00820	+0,01063	+0,96	—0,02	+11,61

Iz tabele 3, rubrika 8, vidi se da suma grešaka na čitavoj dužini poligona iznosi 1,16 mm. U istoj rubrici može se pratiti uticaj ove greške duž čitavog poligona. Samo na dva mesta ova greška dostiže veličinu vrednu pažnje, i to kada je $\Delta h = 803$ m, $d = 24$ km, onda je $\varepsilon = 1,1$ mm, i drugi slučaj, kada je $\Delta h = 214$ m, $d = 10$ km, a $\varepsilon = 1,0$ mm. Iz ove tabele se da zaključiti, da se možemo zadovoljiti sa kartama Bugeovih anomalija iako smo svesni da nam greška $\delta(g-\gamma)$ iznosi više od 1 mgal (u našem slučaju čak 3,6 mgal na delu vlaka). Greške zbog nepoznavanja popravke za reljef ne utiču sistematski na rezultate popravke, za normalnu visinu, nego kao što se na primeru vidi, imaju tendenciju kompenziranja. Računanja po drugoj varijanti, tj. bez vođenja računa o popravci za reljef, po našem mišljenju trebalo bi, ako je to moguće, izbegavati. Razlika između prve i druge varijante, na celom poligonu, iznosi 2,7 mm. Ona je mala, ali na nekim sektorima dostiže priličnu vrednost, pa bi verovatno njenim zanemarivanjem, došlo do većih neslaganja na čvornim reperima.

LITERATURA:

1. Jermejev V. F.: Teorija ortometrijskih, dinamičkih i normalnih visina, Tr. CNIIGAiK, br. 86, 1951. godine.
2. Jermejev V. F. i Zvonov T. I.: O sistemu visina nivelmanske mreže, Tr. CNIIGAiK, br. 96, 1953. godine.
3. Entin I. I. Nivelman visoke tačnosti, Tr. CNIIGAiK, br. 111, 1956. godine.
4. Zakatov P. S.: Kurs više geodezije, Moskva 1964. godine.
5. Svečnikov N.: Viša geodezija, II knjiga, Beograd 1955. godine.
6. Čubranić N. Viša geodezija, I deo, Zagreb 1954. godine.