# GRADSKE I RUDNIČKE TRIGONOMETRIJSKE MREŽE KAO NAKNADNO OPAŽANE MREŽE

Doc. Jovan STEVANOVIĆ, dipl. inž. — Bor*

Postojeća državna trigonometrijska mreža je namenjena opšte državnom premeru razmere 1:2500, iz čega proizilazi njena tačnost kao i druge karakteristike ove mreže. Međutim, u izvrsnim manjim područjima, kao što su gradovi, novo otvoreni rudnici i novo formirana velika industrijska preduzeća, u kojima intenzitet tehničke izgrađenosti zahteva planove razmere 1:500, nameće se potreba tačnije geodetske podloge no što je državna trijangulacija. Kako pak prateća izgradnja novo otvorenog rudnika, odnosno industrijskog preduzeća, vrlo brzo dotično područje pretvara u veće naselje sa svim karakteristikama grada, opravdano je razmatrati samo problematiku trigonometrijskih mreža gradova, pa zaključke proširiti na sve ostale naknadno opažene mreže.

Gradska trigonometrijska mreža, kao nosilac detalja u razmeri 1:500, a često i kao podloga za rešavanje različitih tehničkih problema analitičkim metodama, treba svakako da bude određena sa visokom tačnošću, a u zavisnosti od situacije, nekad i sa najvećom mogućom tačnošću, koja se pri datim uslovima može postići. Pravilnikom za gradski premer je, u skladu sa potrebama, reguilsano pitanje tačnosti gradskih trigonometrijskih mreža, a pri svemu tome je najvažnija činjenica da je granična vrednost velike poluose elipse grešaka, odnosno položajna greška u gradskoj trigonometrijskoj mreži, znatno smanjena u odnosu na položajne greške tačaka državne mreže.

S druge strane ovakva tačnija gradska mreža mora biti oslonjena na državnu mrežu. Grad se nalazi negde na državnoj teritoriji, u svim vidovima kontaktira sa svojom okolinom, pa je neophodno da se sa zadovoljavajućom tačnošću poznaje odnos grada i njegove okoline. Međutim, oslanjanje tačnije mreže, u ovom slučaju gradske mreže, na državnu mrežu, koja je, kao što smo videli, manje tačnosti, ni u kom slučaju nije jednostavan problem, a u našoj stručnoj geodetskoj javnosti sve više preovlađuje mišljenje da ne treba smatrati, da je on definitivno rešen postojećim pravilnikom za gradski premer.

Na osnovu iskustva stečenog na nizu opažanih i izravnatih gradskih trigonometrijskih mreža, uočeno je da pravilnikom predviđen način razvijanja i izravnavanja gradskih trigonometrijskih mreža, ne obezbeđuje onu tačnost koordinata

* *Rudarsko metalurški fakultet, Bor*

trigonometrijskih tačaka, koju bi bilo moguće postići na osnovu terenskih podataka, dobivenih savremenim metodama rada i instrumentima. Srednja greška pravca nakon izravnavanja je znatno veća no što bi trebalo očekivati s obzirom na kvalitet obavljenih terenskih merenja. Ovo se opravdano pripisuje, za ovu svrhu, nedovoljnoj tačnosti određivanja tačaka viših redova. Može se reći da tačnost sa kojom su određene koordinate tačaka viših redova, predstavlja neku vrstu barijere u postizanju veće tačnosti pri određivanju koordinata tačaka gradske trigonometrijske mreže, ako se razvijanje i izravnavanje obavlja postupkom koga predviđa pravilnik.

Druga strana problema je obimnost terenskih poslova, koje treba obaviti, pri vezivanju gradske trigonometrijske mreže za trigonometrijske tačke prvog i drugog reda, naročito kod manjih gradova.

U želji da se dođe do takvih metoda rada kod kojih neće greške državne trigonometrijske mreže uticati na kvalitete gradske mreže, odnosno sa kojima bi se radovi na gradskim mrežama sveli na manju meru, a samim tim i cene koštanja gradskih trigonometrijskih mreža snizile, u sledećem su razmatrane metode kojima bi se to moglo postići. Da bi prva od predloženih metoda imala teoretsko opravdanje, neophodno je bilo prvo razmotriti problem tačnosti određivanja trigonometrijskih tačaka raznih redva u državnoj mreži.

## *TAČNOST TRIGONOMETRIJSKIH MREŽA RAZNIH REDOVA*

Kao što je poznato merilo tačnosti izravnate mreže prvog reda je srednja greška pravca nakon izravnavanja, koju ćemo obeležiti sa m. Za razliku od mreže prvog reda, koja se izravnava kao sistem trouglova odjednom, tačke mreža ostalih redova se određuju umetanjem odnosno presecanjem. Pokazatelji tačnosti u ovakvim slučajevima su srednja greška merenog pravca nakon izravnavajna i srednje greške koordinata $m_x$ i $m_y$. Ne ulazeći u pojedinosti određivanja ovih grešaka možemo reći da srednja greška pravca zavisi od tačnosti uglovnih merenja, a $m_x$ i $m_y$ zavise od srednje greške pravca i od sklopa i broja pravaca od kojih se određuje tražena tačka. Ako su date tačke pravilno raspoređene po horizontu i ako se nalaze na jednakim udaljenjima od tražene tačke, biće $m_x = m_y$, pa će elipsa pogrešaka postati krug. Na osnovu srednjih grešaka $m_x$ i $m_y$ definiše se srednje položajna greška $m_p$:

$$m_p^2 = m_x^2 + m_y^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1$$

U literaturi možemo naći niz objašnjenja o računanju svih gore navedenih srednjih grešaka kao i izvesna tumačenja o suštini ovih grešaka. Međutim, mogu se postaviti niz pitanja koja se odnose na korišćenje ovih grešaka pri oceni tačnosti veličina koje dobijamo na osnovu koordinata trigonometrijskih tačaka, a to su dužina i direkcioni ugao između odnosnih tačaka, a posebno ako se radi o udaljenim tačkama raznih redova. Isto tako je interesantan odgovor i na pitanje u kakvom odnosu stoje, u smislu tačnosti određivanja, tačke nižih redova prema tačkama viših redova. Dali su tačke nižih redova određene sa tako malom tačnošću, zbog koje ne mogu biti korišćene za obavljanje tačnijih radova? Odgovori na ova pitanja bi uneli daleko više jasnosti u ovu problematiku tačnosti određivanja tačaka raznih redova, a u ovom radu su ti odgovori naročito interesantni, kao što smo već naveli, zbog problematike gradskih trigonometrijskih mreža.

## ANALIZA TAČNOSTI MREŽE PRVOG REDA

Da bi smo mogli što vidnije istaći razne elemente od kojih sve zavisi tačnost određivanja tačaka raznih redova, u sledećem razmatranju ćemo često koristiti predpostavke, koje možda nisu realne, ali koje će biti od koristi pri analiziranju problema tačnosti.

Kad se na osnovu tačaka prvog reda određuju tačke drugog reda predpostavlja se da su koordinate tačaka prvog reda zanemarljivo malo pogrešne u odnosu na merenja obavljena za određivanje tačke drugog reda, odnosno da so une bezpogrešne. Realno to nije tako pa ćemo u analizi problema prvo poći od predpostavke apsolutno tačnih koordinata tačaka prvog reda, a posle toga analiziraćemo realan slučaj, kod koga su tačke prvog reda određene sa odnosnim položajnim greškama.

### Slučaj ako su koordinate tačaka prvog reda apsolutno tačne

Ako su koordinate tačaka prvog reda apsolutno tačne, tada su vrednosti dužine i direkcionog ugla između dveju bilo kojih tačaka prvog reda dobivene preko koordinata apsolutno tačne.

Ako se na bazi merenja za koja predpostavljamo da su apsolutno tačno obavljena, sračuna tačka drugog reda, svakako će i njene koordinate biti apsolutno tačno određene. Vrednosti za dužinu i direkcioni ugao između ove tačke drugog reda i bilo koje tačke prvog reda biće isto tako apsolutno tačne, ako ih sračunamo preko koordinata. To isto važi i za dve bilo koje tačke drugog reda, ako su određene na osnovu apsolutno tačnih merenja.

Međutim, ako se na osnovu apsolutno tačno određenih tačaka prvog reda i na osnovu realnih uglovnih merenja, koja su svakako pogrešna za neku veličinu, sračuna tačka drugog reda, tada će ona biti određena sa srednjom greškom pravca, koju ćemo obeležiti sa m" i srednjim greškama koordinata $m''_x$ i $m''_y$, na osnovu kojih se može dobiti srednja položajna greška $m''_p =$. (Pošto ćemo razmatrati ove srednje greške za mreže raznih redova, to ćemo pored ustaljenih oznaka u literaturi, stavljati indekse koji se odnose na red mreže kojoj odnosna tačka pripada.)

Treba naglasiti da se formule kojima se dobijaju gore navedene srednje greške za slučaj određivanja tačke presecanjem odnose na ovaj poslednji razmatrani slučaj.

Ako se radi o dvema tačkama drugog reda na bilo kom rastojanju, koje su određene na osnovu realno pogrešnih uglovnih merenja, sa srednjim položajnim greškama $m_{pA}$ i $m_{pB}$, vrednosti za dužinu i direkcioni ugao, koje su dobivene na osnovu koordinata ovih tačaka A i B, biće poznate sa sledećim srednjim greškama:

$$m^2_{D_{A\cdot B}} = \frac{m^2_{pA} + m^2_{pB}}{2} \qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 2$$

$$m^2_{\nu^B_A} = \frac{\varrho^2}{D^2}\,\frac{m^2_{pA} + m^2_{pB}}{2} \qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 3$$

gde je D dužina između odnosnih tačaka.

Dužina i direkcioni ugao između bilo koje od ovih tačaka na primer tačke A i bilo koje tačke prvog reda, neka to bude tačka C, biće poznati sa srednjim greškama:

$$m^2_{D_{A\cdot C}} = \frac{m^2_{pA}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad 4$$

$$m^2 \nu_A^C = \frac{\rho^2}{D^2} \; \frac{m^2_{pA}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5$$

jer je položajna greška tačke C jednaka nuli.

**Slučaj ako su koordinate tačaka prvog reda realno pogrešne**

Naveli smo da je merilo tačnosti mreže prvog reda srednja greška pravca nakon izravnavanja koju smo obeležili sa m. Pošto se koordinate tačaka prvog reda računaju na osnovu izravnatih uglova koji su svakako pogrešni, to će i koordinate tačaka prvog reda biti pogrešne. Pri razmatranju ovako pogrešnih koordinata moramo razlikovati dva pojma:

1. Koordinate su pogrešne u odnosu na x i y osu. Pokazatelji tačnosti se odnose na dužine od apscisne odnosno ordinatne ose do odgovarajuće tačke. Ovako definisane srednje greške koordinata je teško sračunati, a one bi bile funkcije odnosnih koordinata.

2. Koordinate su pogrešne i definišu tačku negde u blizini stabilizovane tačke na rastojanju koje je okarakterisano položajnom greškom $m'_p$, ali pod uslovom da se koordinatni početak nalazi u bilo kojoj susednoj tački prvog reda.

Za nas je od najvećeg interesa ovaj drugi pojam ocene tačnosti u mreži prvog reda, jer je uglavnom preko njega vrši ocena tačnosti dužina u mreži prvog reda.

Posle ovako definisane položajne greške $m_p$, možemo prići oceni položajne greške odnosno tačnosti dužine i direkcionog ugla između bilo kojih tačaka prvog reda. Predpostavimo radi jednostavnosti razmatranja niz tačaka prvog reda, koje se nalaze na jednom pravcu, kako je dato na slici br. 1.




*Slika 1*

Sve tačke A, 1, 2,.....n neka su određene sa istim položajnim greškama $m'_p$. Prema svemu izloženom, tačka A je određena u odnosu na tačku 1 sa položajnom greškom $m'_p$, a tačka 1 u odnosu na tačku A opet sa $m'_p$, pa će s obzirom na jednačine 2. i 3. biti:

$$m_{D_{A1}} = m'_p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6$$

$$m v^1_A = \frac{\rho}{D_{12}} m'_p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7$$

Tačka 2 je u odnosu na tačku 1 određena sa položajnom greškom $m'_p$, a u odnosu na tačku A bi bila određena sa položajnom greškom:

$$m^2_{p2} = m'^2_p + m'^2_p = 2m'^2_p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8$$

Analogno lako dolazimo do zaključka da će tačka n biti određena u odnosu na tačku A sa položajnom greškom:

$$m^2_{p_n} = n m'^2_p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9$$

Tačka A bi u odnosu na tačku n bila određena sa tom istom položajnom greškom.

Ako predpostavimo da su dužine između tačaka prvog reda međusobno jednake, i ako njihovu vrednost obeležimo sa $d_1$, a dužinu između tačaka A i n sa D, biće:

$$D = n d_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10$$

odnosno

$$n = \frac{D}{d_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11$$

pa dobijemo zamenom u jednačini 9) da je položajna greška:

$$m^2_{p_n} = \frac{m'^2_p}{d_1} D \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 12$$

odnosno

$$m_{pn} = \frac{m'_p}{\sqrt{d_1}} \sqrt{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13$$

Opet s obzirom na jednačine 2) i 3) dobijemo:

$$m_{D_{An}} = \frac{m'_p}{\sqrt{d_1}} \sqrt{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 14$$

$$m v^n_A = \frac{\rho\, m'_p}{\sqrt{D}\,\sqrt{d_1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 15$$

Ako tačke nisu u pravcu, ocena tačnosti će biti svakako komplikovanja, ali u ovom radu zadovoljićemo se samo ovim orijentacionim razmatranjima.

## ANALIZA TAČNOSTI MREŽE DRUGOG REDA

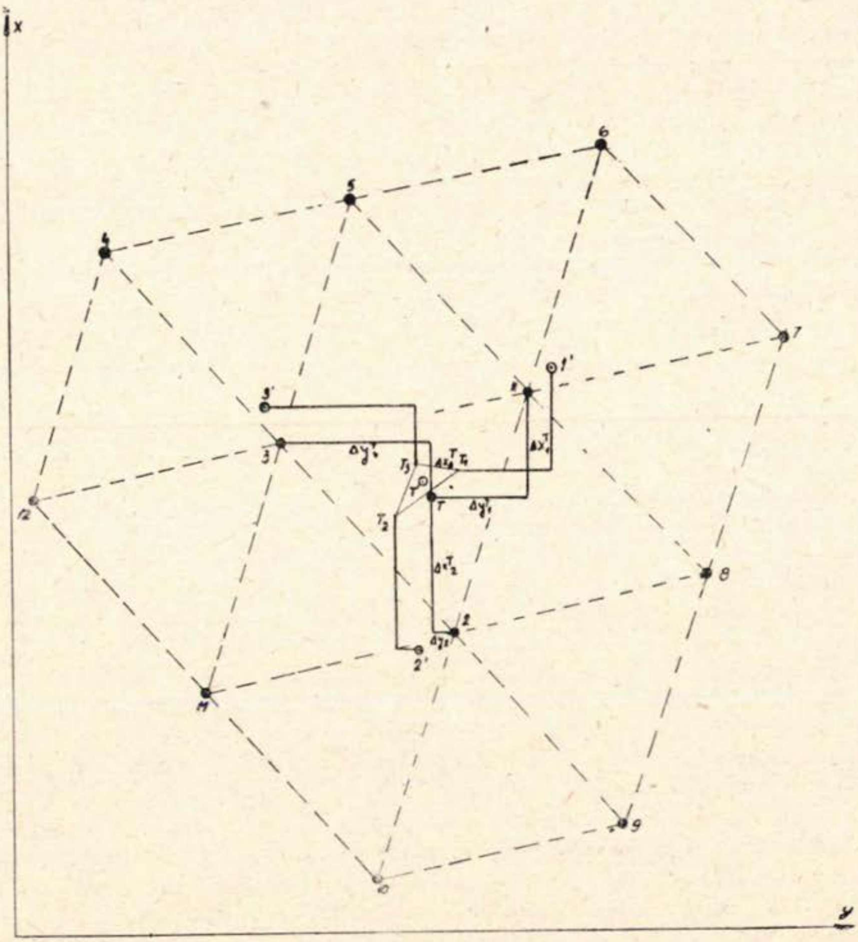
Mreža drugog reda se oslanja na realno pogrešnu mrežu prvog reda. Pri analizi možemo razmatrati dva slučaja:

1. Mjerenja potrebna za određivanje tačke drugog reda su apsolutno tačno obavljena
2. Merenja su opterećena odnosnim greškama

### Slučaj apsolutno tačnih mjerenja

Neka su tačke prvog reda određene sa srednjim položajnim greškama $m'_p$. Na osnovu ovih tačaka i apsolutno tačnih merenja dobićemo koordinate tačke drugog reda sa izvesnom tačnošću. Svakako je interesantne da ustanovimo u kakvom odnosu stoji položajna greška tačke drugog reda u odnosu na položajne greške tačaka prvog reda, pa da iz toga izvučemo zaključak o uticaju grešaka datih tačaka na tačnost novoodređene tačke.

*Slika 2*



Svakako je ovaj slučaj apsolutno tačnih merenja nerealan slučaj, te se kao takav ne može na jednostavan način razmatrati kroz prizmu postojećih mogućnosti ocene tačnosti, pa ćemo ga, radi pojednostavljivanja problema, razmatrati u dva vida.

a) Neka su date tačke prvog reda 1,2,..... 12, i neka su sve određene sa istim položajnim greškama.

Na sl. br. 2 su sa 1, 2, i 3 obeležene stabilizovane tačke, a sa 1,' 2' i 3 tačke koje su definisane koordinatama. Treba odrediti koordinate tačke T. Predpostavićemo da su direktno merene koordinatne razlike:

$$\Delta X_1^T,\ \Delta Y_1^T,\ \Delta X_2^T,\ \Delta Y_2^T,\ \Delta X_3^T,\ \Delta Y_3^T.$$

S obzirom na osnovnu predpostavku smatramo da su ove koordinatne razlike apsolutno tačno izmerene. Ako na osnovu koordinata tačke 1 sračunamo koordinate tačke T, dobićemo tačku $T_1$, koja u odnosu na stvarni položaj tačke T odstupa za istu vrednost i u istom smeru, kao što 1' odstupa u odnosu na tačku 1. Pošto su koordinate tačke 1 određene sa srednjom položajnom greškom $m'_p$, to bi i koordinate, koje definišu $T_1$, bile određene sa srednjom greškom $m'_p$. Ako ne bi imali više elemenata za određivanje tačke T, tačkom $T_1$ bi ona bila određena u odnosu na sve susedne tačke oko tačke 1, pa i u odnosu na tačke 2 i 3 sa istom položajnom greškom kao i tačke prvog reda. Međutim ako na koordinate tačke 2 dodamo koordinatne razlike, dobićemo tačku $T_2$, odnosno preko tačke 3 dobićemo tačku $T_3$. Sve što smo rekli za tačku $T_1$ odnosi se i na tačke $T_2$ i $T_3$. Svakako će biti najlogičnije da se za definitivne koordinate usvoje one, koje su aritmetička sredina koordinata tačaka $T_1$, $T_2$ i $T_3$, a koje bi definisale tačku T'. Srednja greška svakog pojedinog određivanja je $m'_p$, pa, ne ulazeći dublje u ovu problematiku, možemo reći da bi srednja položajna greška tačke T', po pravilu aritmetičke sredine, bila:

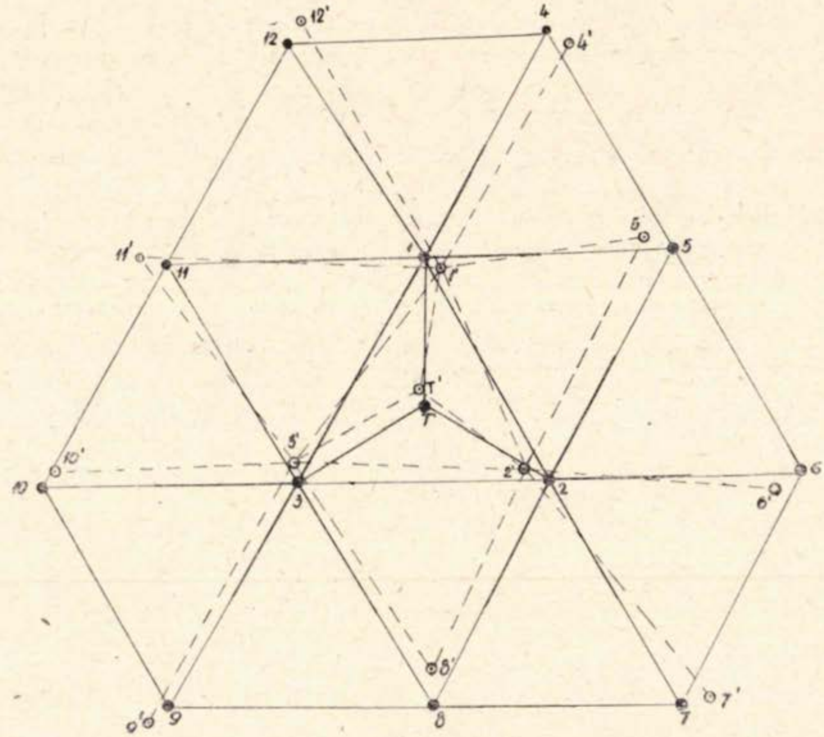
$$M_{pT} = \frac{m'_p}{\sqrt{3}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 16$$

Ostaje nam još da objasnimo smisao ove položajne greške $_{pT}$, pošto smo ranije istakli relativnost ovako definisanih položajnih grešaka $m'_p$. Tačka T je dobila definitivne koordinate koje definišu tačku T'. Ova tačka odstupa od tačke T za vrednost koja je okarakterisana pložajnom greškom $m_{pT}$, ako bi koordinatni početak bio u bilo kojoj tački 1, 2 i 3, odnosno u nekoj od susednih tačaka datih na slici. Kao što vidimo, položajna greška $m_{pT}$ je manja od položajnih grešaka tačaka prvog reda u odnosu na rastojanja, koja su veća od dužina strana prvog reda.

Nije nam zadatak da detaljno analiziramo ovaj slučaj, jer se, bar do sada, nisu koordinate trigonometrijskih tačaka određivale na ovaj način, ali nam on na najjednostavniji način ukazuje da će novoodređena tačka biti znatno tačnije određena no date tačke, ako su greške merenja zanemarljive i ako se tom prilikom koristi veći broj datih tačaka.

b) Neka su opet date tačke određene sa položajnom greškom $m'_p$. Na osnovu datih tačaka i uglovnih merenja, koja su po predpostavci obavljena apsolutno tačno, treba odrediti tačku T. Na slici br. 3 su istiniti položaji datih tačaka obeleženi sa 1,2,.......12, a tačke koje su definisane odnosnim koordinatama sa 1',2',...,,,12, Na tačkama 1, 2, 3 i T su opažani pravci, koji kao apsolutno tačni udovoljavaju svim potrebnim fizičkim uslovima. Na osnovu ovih pravaca treba uobičajenim postupkom, na osnovu koordinata datih tačaka, sračunati koordinate tačke T i izvršiti ocenu tačnosti ovih koordinata.

Srednja greška merenog pravca u ovom slučaju je jednaka nuli. Međutim, ako postoji potpuna usaglašenost merenih pravaca sa stvarnim položajem tačaka, svakako neće mereni pravci biti u skladu sa tačkama koje su definisane koordinatama datih tačaka. Ako se na problem gleda kroz prizmu određivanja tačaka




*Slika 3*

presecanjem, i pored toga što je realna greška merenog pravca jednaka nuli, zbog činjenice da su koordinate datih tačaka polazni podaci sa kojima operišemo, možemo smatrati da su tačke 1', 2', ... te tačke koje su u datom slučaju interesantne, a da su mereni pravci u odnosu na ove tačke pogrešni. Može se, na primer, stvar tretirati u obliku da su i instrumenat i signali bili ekscentrični za vrednosti okarakterisane srednjom greškom $m'_p$, pa da su zbog toga i opažani pravci uslovno pogrešni za veličinu, koja proizlazi iz ove ekscentričnosti. Na ovja način biće apsolutno tačno opažani pravci na kraju ocenjeni, kao da su mereni sa srednjom greškom, koja je posledica pogrešnosti koordinata datih tačaka.

Tačka T biće izravnata na osnovu spoljnih i unutrašnjih pravaca. Kako se pri orijentisanju pravaca koriste više datih tačaka, biće spoljni pravci znatno tačniji od bilo kog direkcionog ugla između datih tačaka. Nije tako jednostavno analizirati konačnu ocenu tačnosti ovog slučaja, ali se svakako može tvrditi da će tačka T biti određena sa većom tačnošću, no što su određene date tačke. U slučaju razmatranom pod a) to je bilo sasvim očigledno, a u ovom slučaju, zobg komplikovanije prirode problema, nije moguće problem interpretirati u jednostavnoj formi, a detaljna analiza bi nas odvukla od centralnog problema koga razmatramo. Prema ovome i ako nismo dali nikakav izraz, kojim bi se moglo kvantitetno proceniti položajna greška novoodređene tačke, smatram da možemo tvrditi, s obzirom da se ona određuje na osnovu niza prekobrojnih podataka, da će ona biti određena tačnije od datih tačaka. Efekat ovih prekobrojnih podataka je povećanje tačnosti definitivnih koordinata, a to znači izvesno eliminisanje grešaka koordinata datih tačaka.

## Slučaj pogrešnih uglovnih merenja

Postojeće formule za ocenu tačnosti prilikom određivanja tačaka presecanjem, odgovaraju slučaju apsolutno tačnih koordinata datih tačaka i realno pogrešnim uglovnim merenjima. Međutim, kako taj slučaj u praksi nije zastupljen, možemo odmah podvući da su srednje greške $m$, $m_x$ i $m_y$, koje dobijamo nakon izravnavanja tačke, komponentalno složene iz dela koji je prouzrokovan netačnošću datih koordinata i dela koji je prouzrokovan greškama merenja, kjoa su obavljena za određivanje nove tačke. Deo položajne greške prouzrokovan netačnošću datih koordinata biće, pri korišćenju tri ili više datih tačaka, manji no što su položajne greške datih tačaka. Ovo smanjenje zavisi od broja datih tačaka korišćenih za određivanje nove tačke, a što je više datih tačaka korišćeno za orijentisanje pravaca, odnosno što je više datih tačaka od kojih se određuje nova tačka, biće i ovo smanjenje položajne greške novoodređene tačke veće.

Rezultujuća položajna greška, čija se vrednost dobija pri izravnavanju tačke, zavisi od obeju gornjih grešaka. Minimalna vrednost rezultujuće greške biće u slučaju da su pravci apsolutno tačno opažani i tada je novoodređena tačka određena tačnije od datih tačaka. Međutim, kako su mereni pravci svakako pogrešni, to će i rezultujuća greška biti uvek veća od svoje minimalne vrednosti. U zavisnosti od povećanja grešaka merenja, rezultujuća položajna greška novoodređene tačke može biti manja od položajnih grešaka datih tačaka, jednaka položajnim greškama datih tačaka ili već od njih.

Poseban problem ovog slučaja je ocena tačnosti dužine i direkcionog ugla između datih i novoodređene tačke. Na prvi pogled pošto imamo položajne greške $m'_p$ i $m''_p$ potrebno je samo da primenimo jednačine 2. i 3. Ali ovde se mora imati u vidu okolnost da se koordinate novoodređene tačke određuju na osnovu koordinata datih tačaka, pa je položajna greška $m''_p$ delom posledica pogrešnosti koordinata datih tačaka. Novoodređene koordinate su u korelaciji sa datim koordinatama, pa zbog toga ne smemo, pri oceni tačnosti dužine i direkcionog ugla, koristiti gore navedene položajne greške bez izvesnog predhodnog razmatranja problema.

Na osnovu ranijih izlaganja, došli smo do zaključka da su posledice pogrešnosti koordinata datih tačaka, gledano kroz prizmu ocene tačnosti određivanja tačaka presecanjem, uglavnom takve, kao da su samo uglovi pogrešni i zbog grešaka merenja i zbog grešaka datih koordinata.. Rekli smo da se može smatrati da su uglovi mereni, ne između stabilizovanih tačaka, već između tačaka definisanih odnosnim datim koordinatama. Greške datih koordinata su, postupkom ocene tačnosti kod presecanja, metamorfisane u greške merenja uglova, pa se može smatrati da se ocena tačnosti vrši na osnovu tačaka definisanih koordinatama, koje su u odnosu na sebe same bezpogrešne. Pod ovim uslovima se može vršiti ocena tačnosti dužine i direkcionog ugla između novoodređene tačke i date tačke definisane koordinatama, jednačinama 2. i 3, smatrajući da su tačke definisane koordinatama bespogrešne. Međutim, dužina i direkcioni ugao između realne stabilizovane tačke i novoodređene tačke biće pogrešni još i zbog nepoklapanja tačke definisane datim koordinatama i odnosne stabilizovane tačke. Znamo da je ova greška $m_p$, ali pod ranije određenim uslovima. Sada ona zbog navedene korelacije neće ostati ista, već će biti nešto smanjena. Obeležimo sa $\overline{m}'_p$ ovu novu vrednost položajne greške datih tačaka, koja će da izražava nepoklapanje koordinata datih tačaka sa stabilizovanim tačkama, ali ne u odnosu na ostale date tačke prvog reda, već u odnosu na novoodređenu tačku. Sada možemo pisati, koristeći jednačine 2. i 3., da je:

$$m^2_{d2} = \frac{\overline{m}'^2_p + m''^2_p}{2} \quad . \; . \; . \; . \; , \; . \; . \; . \; , \; , \quad 18$$

$$m^2_{\nu^1_T} = \frac{\overline{m}'^2_p + m''^2_p}{2} \frac{\rho^2}{d^2_2} \quad . \; . \; . \; . \; , \; . \; . \; . \; , \; , \quad 17$$

Drugi deo problema bi se sastojao u tome da odredimo čemu je jednaka ova vrednost $\overline{m}'_p$. Treba odmah podvući da ne raspolažemo pogodnim načinom, kojim bi mogli da odredimo položajnu grešku date tačke u odnosu na novoodređenu. Zbog toga ćemo proceniti vrednost $\overline{m}'_p$ na osnovu izvesnih okolnosti, koje proizilaze iz prirode problema, premda odmah naglašavamo da ova procena neće bazirati na strogim dokazima, pa kao takva neće ni biti strogo realna. Pre svega, položajna greška date tačke prvog reda u odnosu na traženu tačku može biti samo manja od položajne greške date tačke u odnosu na ostale date tačke. Jedino ako bismo iskoristili vrlo mnogo datih tačaka, faktor korelacije bi se smanjio, pa bi se moglo smatrati da je $\overline{m}'_p = m'_p$. Međutim, sa manjim brojem tačaka korišćenih pri određivanju nove tačke, faktor korelacije je znatan, pa je $\overline{m}'_p$ svakako manje od $m'_p$. Kako je brojna vrdnost položajne greške novoodređene tačke u našoj državnoj mreži uglavnom nešto manja od brojne vrednosti položajnih grešaka datih tačaka, to ćemo smatrati da je položajn agreška $\overline{m}'_p$ približno jednaka položajnoj greški novoodređene tačke $m''_p$. Strogo uzevši ova jednakost neće postojati, ali u nedostatku drugih mogućnosti za određivanje vrednosti za $m'_p$, a zbog neophodne potrebe da poznajemo, kako položajnu grešku novoodređene tačke u odnosu na date tačke, tako i položajnu grešku date tačke u odnosu na novoodređenu, usvojićemo za dalja razmatranja ovu jednakost. S obzirom na ovo dobijamo da je:

$$m_{d_2} = m''_p \qquad \ldots\ldots\ldots, \quad 19$$

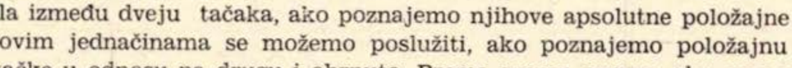
$$m = \frac{\rho}{d_2} m''_p \qquad \ldots\ldots\ldots, \quad 20$$

## TAČNOST MREŽA OSTALIH REDOVA

Sve što smo naveli za realnu mrežu drugog reda, tj. za mrežu drugog reda koja se oslanja na realno pogrešnu mrežu prvog reda, odnosi se i na mreže ostalih redova. Tačke mreže ostalih redova odredjuu se presecanjem. Merilo tačnosti njihovog određivanja je položajna greška. Na osnovu obrazloženja u prethodnom odeljku smatraćemo da su date tačke poznate sa istom položajnom greškom u odnosu na novoodređenu tačku, sa kojom je novoodređena tačka oderđena u odnosu na date tačke. Opet napominjemo da ovakva postavka ne bazira na strogom dokazu, već na izvesnim razmatranjima, koja kao takva omogućuju ovakvu postavku, ali ne isključuju i drugu mogućnost. Međutim, kako cela ova ovde razmatrana problematika realne ocene tačnosti između udaljenih tačaka raznih redova, predstavlja jako delikatno područje za razmatranje, a kako je cilj ovog rada ukazivanje da nije opravdano smatrati da su tačke nižih redova određene sa tako slabom tačnošću, zbog koje ne mogu da budu korišćene za izvesne tačnije radove, to ćemo se u ovom slučaju zadovoljiti sa gornjim obrazloženjem.

## TAČNOST DUŽINE I DIREKTNOG UGLA IZMEĐU UDALJENIH TAČAKA RAZNIH REDOVA

Jednačinama 2. i 3. možemo dobiti srednju grešku dužine odnosno direkcionog ugla između dveju tačaka, ako poznajemo njihove apsolutne položajne greške. Istim ovim jednačinama se možemo poslužiti, ako poznajemo položajnu grešku jedne tačke u odnosu na drugu i obrnuto. Prema svemu ovome, ako smo u stanju da odredimo položajnu grešku tačke A, koja pripada nekom redu, u odnosu na tačku bilo kog reda B, kao i položajnu grešku tačke B u odnosu na tačku A, tada nam nije teško da izračunamo sa kojom će se srednjom greškom dobiti dužina i direkcioni ugao između tačaka A i B. Pretpostavimo na sl. br. 4 niz trigonometrijskih tačaka raznih redova koje se, radi jednostavnosti razmatranja, nalaze na jednom pravcu.




*Slika 4*

Tačke 1, 2 i 3 pripadaju prvom redu, 4 i 5 drugom redu, 6 i 7 trećem redu, a 8 četvrtom redu. S obzirom na sve ranije rečeno možemo pisati:

$$m^2_{p8.6} = m^2_{p8.7} + m^2_{p7.5} + m^2_{p5.1} + m^2_{p1.2} + m^2_{p2.3} + m^2_{p3.4} + m^2_{p4.6} \quad . \quad . \quad 21$$

odnosno:

$$m_{p6.8} = m_{p8.6} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad . \quad , \quad 22$$

S obzirom na to koje tačke pripadmaju kom redu, a uz pretpostavku da su sve tačke istog reda određene sa istim srednjim položajnim greškama, možemo pisati:

$$m^2_{p8.6} = 2m'^2_p + 2m''^2_p + 2m'''^2_p + m''''^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad . \quad , \quad 23$$

a u opštem slučaju:

$$m^2_{pAB} = n_1 m'^2_p + n_2 m''^2_p + n_3 m'''^2_p + n_4 m''''^2_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 24$$

gde je sa $n_1$ obeležen ukupan broj strana prvoga reda između tačaka A i B, sa $n_2$ ukupan broj strana drugoga reda itd. Ako dužinu strane prvog reda obeležimo sa $d_1$, a ukupnu dužinu strana između tačaka prvog reda sa $D_1$, dužinu strane drugog reda sa $d_2$, a ukupnu dužinu strana drugog reda sa $D_2$, dužinu strane trećeg reda sa $d_3$, a ukupnu dužinu strana trećeg reda sa $D_3$ i na kraju, dužinu rstane četvrtog reda sa $d_4$, a dužinu strana četvrtog reda između odnosnih tačaka sa $D_4$, imaćemo da je:

$$n_1 = \frac{D_1}{d_1}$$

$$n_2 = \frac{D_2}{d_2}$$

$$n_3 = \frac{D_3}{d_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad . \quad , \quad 25$$

$$n_4 = \frac{D_4}{d_4}$$

pa zamenom u jednačinu 24. dobijamo:

$$m^2_{pA.B} = \frac{m'^2_p}{d_1} D_1 + \frac{m''^2_p}{d_2} D_2 + \frac{m'''^2_p}{d_3} D_3 \frac{m''''^2_p}{d_4} D_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 26$$

Pošto je $m_{pBA} = m_{pAB}$ nije teško dobiti da je:

$$m_{dA.B} = m_{pA.B} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad , \quad . \quad . \quad . \quad 27$$

$$m\nu^B_A = \frac{\rho}{D_{A.B}} m_{pA.B} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad , \quad . \quad . \quad . \quad 28$$

## USLOV JEDINSTVENE TAČNOSTI TRIGONOMETRIJSKIH TAČAKA SVIH REDOVA

Posmatrajući jednačinu br. 26 koja izražava položajnu grešku jedne tačke bilo kog reda u odnosu na neku drugu, možemo uočiti da bi, u slučaju da postoji jednakost:

$$\frac{m_p'^2}{d_1} = \frac{m_p''^2}{d_2} = \frac{m_p'''^2}{d_3} = \frac{m_p''''^2}{d_4} = k^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 29$$

mogli izvući $k^2$ ispred zagrade, čime dobijamo:

$$m^2_{pA.B} = k^2 (D_1 + D_2 + D_3 + D_4) = k^2 D_{A.B} \quad \ldots \ldots \quad 30$$

jer je:

$$D_{A.B} = D_1 + D_2 + D_3 + D_4 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 31$$

Na osnovu ovoga zaključujemo da položajna greška između dveju tačaka, pod pretpostavkom da položajne greške odnosnog reda i odgovarajuće dužine stoje u odnosima iskazanim jednačinom br 29, ne zavisi od reda tačaka preko kojih su te dve krajnje tačke povezane, već isključivo od rastojanja između njih. Zbog ovoga možemo smatrati da uslovi iskazani jednačinom br. 29 predstavljaju uslove jedinstvene tačnosti jedne trigonometrijske mreže kao celine, a konstanta bi izražavala kvalitet te trigonometrijske mreže.

Ako na osnovu podataka publikovanim u »Referatu o osnovnim geodetskim radovima«, Beograd, 1953 god., o položajnim greškama i prosečnim dužinama strana za mreže raznih redova, sračunamo odnose $m_p \sqrt{d}$ dobijamo vrednosti date u sledećoj tabeli:

| Mreža | Prosečna dužina strane d | $m_p$ | $k = \frac{m_p}{\sqrt{d}}$ | $m_p$ D = 30 km |
|---|---|---|---|---|
| Osnovna mreža 2 reda | 18 km | 9,2 cm | 2,16 | 11,8 cm |
| Popunjavajuća mreža 2 reda | 13 » | 6,4 » | 1,78 | 9,8 » |
| Osnovna mreža 3 reda | 10 » | 6,6 » | 2,09 | 11,5 » |
| Popunjavajuća mreža 3 reda | 5 » | 5,6 » | 2,50 | 13,7 » |
| Mreža 4 reda | 1,8 » | 4,3 » | 3,21 | 17,6 » |

Na osnovu ove tabele možemo zaključiti, da za osnovnu i popunjavajuću mrežu drugog reda, kao i za osnovnu mrežu trećeg reda, postoje uslovi jedinstvene tačnosti, jer se odnosi $m_p/\sqrt{d}$ malo međusobno razlikuju. Popunjavajuća mreža trećeg reda ima nešto manju tačnost, dok je mreža četvrtog reda svakako najslabijeg kvaliteta. Pošto, pri razvijanju, opažanju i izravnavanju mreža raznih redova, uslov jedinstvene tačnosti uopšte nije postavljan, na osnovu gornje tabele može se konstatovati iznenađujuće poklapanje odnosa $m_p/\sqrt{d}$ a iz toga izvući zaključak da ne postoji naročito velika razlika u tačnosti za mreže raznih redova u našoj zemlji.

U zadnjoj koloni je sračunata položajna greška jedne tačke u odnosu na drugu, koja je 30 km udaljena od nje, preko strana odnosnog reda. Na osnovu ovih podataka zaključujemo, da se položajna greška između dveju tačaka četvrtog reda, dobivena preko tačaka četvrtog reda, ne razlikuje tako drastično od položajne greške dobivene preko tačaka drugog reda.

## *NAČINI RAZVIJANJA I IZRAVNAVANJA GRADSKIH TRIGONOMETRIJSKIH MREŽA*

U uvodu su istaknute primedbe koje se odnose na pravilnikom predviđen način razvijanja i izravnavanja gradskih trigonometrijskih mreža. Kasnije je, približnom analizom tačnosti određivanja trigonometrijskih tačaka raznih redova, konstantovano da se za našu državu može smatrati da su tačke svih redova određene približno sa istom tačnošću, sa izuzetkom tačaka trećeg popunjavajućeg i četvrtoga reda čija je tačnost nešto manja. Međutim, za izvesne manje reone, u kojima su tačke mreže trećeg popunjavajućeg i četvrtog reda određene nešto tačnije od navedenog proseka, može se smatrati da postoji jedinstvena tačnost određivanja tačaka svih redova, ako tu tačnost merimo jedinstvenim merilom.

U slučaju da je u jednoj trigonometrijskoj mreži zastupljena jedinstvena tačnost određivanja tačaka svih redova, možemo se zapitati da li je neophodno da se za tačnije radove moraju koristiti samo tačke viših redova, odnosno zašto se ne bi koristile i tačke nižih redova. Ako imamo razvijenu, izopažanu i izravnatu mrežu četvrtog reda u reonu jednog grada, zašto se ne bi mogla gradska trigonometrijska mreža osloniti na ove tačke četvrtog reda, odnosno na sve tačke bez obzira na red. Svakako da odgovor na ovo pitanje zahteva ogdovore i na niz drugih pitanja, odnosno konkretan predlog, kako u tom slučaju treba obaviti razvijanje, opažanje i izravnavanje gradske trigonometrijske mreže.

Kada se radi o predlozima, koji će u sledećem biti izloženi, odmah na početku treba istaći dve mogućnosti:

1. U odnosnom području je razvijena mreža četvrtog reda. Mreže trećeg i četvrtog reda su zadovoljavajućeg kvaliteta. U ovom slučaju se može gradska mreža izravnati na osnovu postojećih tačaka u okviru reona grada.

2. U odnosnom području je mreža četvrtog reda lošeg kvaliteta, ili mreža nije razvijena, pa se svakako mora poći od mreža viših redova. U ovom slučaju se mora, pri razvijanju mreže, postupiti po pravilniku za gradski premer, ali izravnavanje mreže treba obaviti tako da tačnost određivanja tačaka prvog i drugog reda ne utiče na kvalitet gradske mreže.

I u jednom i u drugom slučaju, potrebno je da međusobni odnos trigonometrijskih tačaka bude određen sa najboljom mogućom tačnošću s obziorm na date uslove rada. Razlozi ove potrebe su istaknuti u uvodu, a da bi se udovoljilo ovoj potrebi, treba definitivni međusobni odnos tačaka gradske mreže u proširenom građevinskom reonu odrediti nezavisno od datih tačaka. Ovo se može postići tako što će se mreža u proširenom građevinskom reonu izravnati kao slobodna mreža. Ovo se mora imati u vidu još pri rekognosciranju i pravljenju plana opažanja, da bi se u ovoj gradskoj mreži ostvarile takve veze, koje bi nakon izravnavanja, uz kvalitetna terenska merenja, obezbedile zadovoljavajuću tačnost određivanja međusobnog položaja ovih tačaka. Da bi rastojanja između trigonometrijskih tačaka bila izražena sa zadovoljavajućom tačnošću u metarskom sistemu, odnosno da bi se eliminisala mogućnost da eventualna sistematska greška dužine državne trigonometrijske mreže dođe do izražaja u gradskoj mreži, može se izmeriti u okviru gradske mreže jedna ili dve osnovice. Svakako ako se izmere dve osnovice, pri izravnavanju gradske mreže kao slobodne mreže, treba u izravnavanje uključiti i osnovički uslov.

Na osnovu svega proizilazi da bi izravnavanje gradske mreže trebalo podeliti u dve faze. Prva faza je određivanje definitivnog međusobnog odnosa tačaka gradske mreže, izravnavajući je kao slobodnu mrežu. Ova faza je zajednička za oba napred navedena slučaja, a pošto je postupak izravnavanja slobodne mreže dovoljno poznat, na njemu se nećemo zadržavati.

Kada se radi o drugoj fazi izravnavanja, tu moramo praviti razliku s obzirom na napred navedene dve mogućnosti, pa ćemo razmatrati sledeće dve mogućnosti uklapanja slobodno izravnate gradske mreže u državnu mrežu.

## UKLAPANJE SLOBODNE MREŽE U DRŽAVNI KOORDINATNI SISTEM KORISTEĆI KOORDINATE SVIH TAČAKA KOJE SU RANIJE ODREĐENE

Ako je ranije razvijena i izravnata mreža četvrtog reda zadovoljavajućeg kvaliteta, još prilikom rekognosciranja gradske trigonometrijske mreže, potrudićemo se da u novoj mreži bude zastupljeno što više ranije određenih tačaka. U ovom slučaju gradska trigonometrijska mreža treba da pokriva samo odnosno područje interesantno za perspektivni razvoj grada, a opažanjem treba da se povežu smo tačke na tom području. Nakon opažanja i svih potrebnih predradnji, treba, kao što je rečeno, izravnati odnosnu mrežu kao slobodnu mrežu.

Posle ovoga treba ovakvoj mreži sračunati koordinate to jest uklopiti je u državnu mrežu koristeći koordinate svih tačaka, koje su zajedničke za državnu i novoformiranu gradsku trigonometrijsku mrežu. Ovo uklapanje treba obaviti uz dva uslova:

1. Slobodno izravnata mreža ne sme pretrpeti nikakve deformacije, to jest dužine i uglovi, sračunati na osnovu novodobivenih koordinata, moraju biti jednaki odnosnim dužinama i uglovima slobodne mreže, ako je merena osnovica, odnosno mora postojati samo jednakost uglova a proporcionalnost strana, ako nije merena osnovica.

2. Nove koordinate treba tako odrediti da slobodno izravnata mreža dobije što bolju orijentaciju u državnom koordinatnom sistemu, odnosno da se detalj, koji se oslanja na nju, što bolje prilagodi detalju okoline grada, koji se oslanja na državnu mrežu, a to će se postići, ako se nove koordinate odrede na osnovu starih koordinata uz uslov da suma kvadrata otstupanja novih i starih koordinata bude minimalna, odnosno da bude:

$$\Sigma dy^2_i + \Sigma dx^2_i = \min. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 32$$

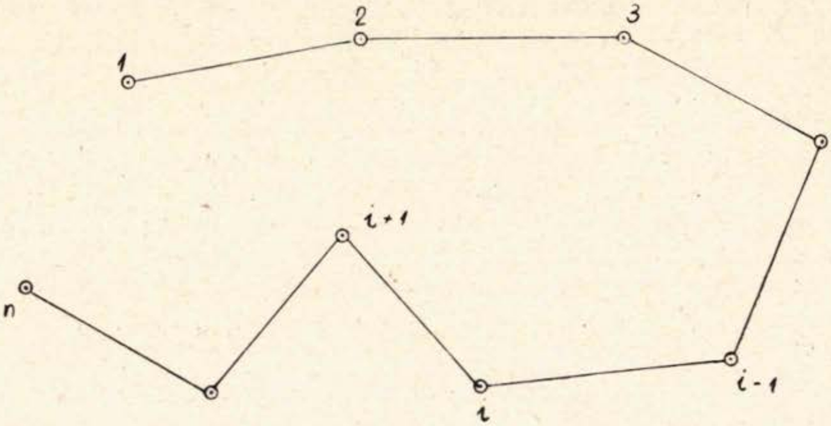
gde su $d^2_{yi}$ i $d^2_{xi}$ priraštaji starih koordinata, odnosno odstupanje novih od starih koordinata.

Da bi se udovoljilo prvom uslovu, potrebno je postaviti niz uslovnih jednačina nepromenljivosti strana i niz uslovnih jednačina nepromenljivosti uglova. Ako u mreži ima n tačaka sa poznatim koordinatama, treba postaviti

$$N = 2n - 3 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 33$$

uslovnih jednačina. Da bi objasnili način formiranja ovih uslovnih jednačina, predpostavimo niz tačaka 1, 2,... i ... n, nove gradske mreže, koje su ranije bile određene kao tačke bilo kog reda, uključujući i četvrti red, odnosno čije koordinate poznajemo.

Stare koordinate ovih tačaka nisu određene sa dovoljnom tačnošću i zato ćemo ih smatrati kao privremene koordinate. Na osnovu ovih koordinata možemo naći




*Slika 5*

privremene direkcione uglove: $u^2_1$, $u^3_2$, ...... $u^i_{i-1}$, $u^{i+1}_i$ .... a zatim dužine: $d_{12}$, $d_{23}$, ...... $d_{i-1.i}$, $d_{i \cdot i+1}$ .... Treba naglasiti da gornji indeksi za direkcione uglove, koje smo obeležili sa »u«, ne označavaju stepene. Na osnovu direkcionih uglova, može se u tački »i« dobiti ugao:

$$\alpha'_i = u^{i-1}_i - u^{i+1}_i \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 34$$

Na osnovu definitivnih pravaca $A_i$ po izravnavanju, može se u tački »i« dobiti definitivna vrednost ugla:

$$\alpha_i = A^{i-1}_i - A^{i+1}_i \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 35$$

Ugao $\alpha_i$ mora pretrpeti popravku, da bi njegova vrednost, dobivena na osnovu privremenih direkcionih uglova, bila jednaka definitivnom uglu $\alpha_i$ to jest mora biti:

$$\alpha_i = \alpha' + d\alpha'_i \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 36$$

odnosno:

$$\alpha'_i \quad \alpha_i + d\alpha'_i = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 37$$

U ovoj jednačini je razlika:

$$\alpha'_i - \alpha_i = f\alpha_i \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 38$$

poznata i predstavlja slobodni član uslovne uglovne jednačine tačke »i«, koja sada glasi:

$$f\alpha_i + d\alpha'_i = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 39$$

Ovde se $d'_{\alpha i}$ može dobiti diferenciranjem jednačine br. 34, tako da na kraju dobivamo definitivnu uslovnu jednačinu, za ugao u tački »i«, u obliku:

$$f\alpha_i - b_{i-1.i}\, dy_{i-1} + (b_{i-1 \cdot i} + b_{i \cdot i+1})\, dy_i - b_{i \cdot i+1}\, dy_{i+1} - a_{i-1 \cdot i}\, dx_{i-1} +$$
$$+ (a_{i-1 \cdot i} + a_{i \cdot i+1}) dx_i - a_{i \cdot i+1}\, dx_{i-1} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 40$$

gde koeficijenti a i b imaju isti smisao i računaju se na isti način, kao faktori a i b u trig. obrascu br. 10, pri određivanju tačaka presecanjem, samo sa suprotnim znakom.

Istim putem, na osnovu državnih koordinata tačaka »i« i »i+1«, možemo dobiti dužinu $d_{i \cdot i+1}$, a na osnovu slobodno izravnate mreže ova dužina dobija svoju definitivnu vrednost $D_{i \cdot 1+1}$. Privremena dužina $d_{i \cdot i+1}$ treba da pretrpi promjenu $dd_{i \cdot i+1}$ i da bude nakon uklapanja jednaka definitivnoj dužini $D_{i \cdot i+}$ to jest mora biti:

$$d_{i \cdot i+1} + dd_{i \cdot i+1} = D_{i \cdot i+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 41$$

odnosno:

$$d_{i \cdot i+1} - D_{i \cdot i+1} + dd_{i \cdot i+1} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 42$$

Analogno i ovde imamo da je:

$$d_{i \cdot i+1} - D_{i \cdot i+1} = fd_{i \cdot i+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 43$$

gde su $d_{i \cdot i+1}$ i $D_{i.i+1}$ poznate veličine, a $fd_{i \cdot i+1}$ predstavlja slobodni član uslovne jednačine strane, koja sada glasi:

$$fd_{i \cdot i+1} + dd_{i \cdot i+1} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 44$$

Preko izraza za stranu $d_{i \cdot i+1}$

$$d^2_{i \cdot i+1} = (y_{i+1} - y_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 45$$

diferenciranjem dobijamo $dd_{i \cdot i+1}$, a nakon zamene u gornju jednačinu dobijamo definitivnu uslovnu jednačinu strane.

$$fd_{i \cdot i+1} + \sin u_i^{i+1}\, dy_{i+1} - \sin u_i^{i+1}\, dy_i + \cos u_i^{i+1}\, dx_{i+1} -$$
$$- \cos u_i^{i+1}\, dx_i = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 46$$

Ako u slobodnoj mreži o kojoj je reč, nije merena osnovica, tada početnu dužinu slobodne mreže treba odrediti na osnovu poznatih koordinata trigonometrijskih tačaka. Za razliku od malopređašnjeg problema, ovde treba dobiti nove koordinate tačaka uz uslov da ne dođe do bilo kakve uglovne deformacije slobodno izravnate mreže, a da se dužine odrede koristeći sve tačke sa poznatim koordinatama, isto uz uslov minimuma kao malo pre. U ovom slučaju, uslovne uglovne jednačine imaju isti oblik kao i u prethodnom slučaju.

Što se tiče uslovnih jednačina strana, tu nam nisu poznate definitivne dužine D. Ove dužine treba odrediti na osnovu poznatih koordinata sledećim postupkom:

1. Usvojićemo jednu stranu kao osnovnu. Dužinu ove strane možemo dobiti iz koordinata. Neka su u pitanju tačke P i Q i dužina između njih $d_{QP}$.

2. Koristeći ovu dužinu i uglove izravnate mreže, sinusnom teoremom, dobićemo dužine $D'_{i \cdot i+1}$ Ovo bi bile dužine koje ne pripadaju kategoriji definitivnih dužina D, ali pošto nisu dobivene iz koordinata, ne bismo ih mogli uvrstiti ni u kategoriju privremenih dužina d. Ove dužine bi u stvari bile poludefinitivne dužine i zato su obeležene sa D'. Ako bi dužina $d_{PQ}$ bila definitivna, tada bi i sve ostale dužine bile definitivne. Ali ako se dužina $d_{PQ} = D'_{PQ}$ promeni nakon izravnavanja

za $\Delta$ D, tada će se sve ostale dužine promeniti za $k_{i \cdot i+1} \cdot \Delta D$ gde je $k_{i \cdot i+1}$ količnik svih proizvoda sinusa u imenitelju i broitelju, korišćenih da se sa srtane $D'_{PQ}$ dođe do strane $D'_{i \cdot i+1}$, ili što je isto:

$$k_{i \cdot i+1} = \frac{D'_{i \cdot i+1}}{D'_{PQ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 47$$

Ovu promenu poludefinitivne dužine $\Delta D$ mi ne znamo. Ona će se odrediti tek nakon uklapanja. Zato je, pored svih ostalih, ona jedna nova nepoznata. Sada bi slobodni član neke uslovne jednačine strane izgledao:

$$fd^{i}{}_{\cdot i+1} = d_{i \cdot i+1} - D_{i \cdot i+1} = d_{i \cdot i+1} - (D'_{i \cdot i+1} + k_{i \cdot i+1} \Delta D) =$$
$$= f'_{i \cdot i+1} - k_{i \cdot i+1} \Delta D \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 48$$
$$f'_{i \cdot i+1} = d_{i \cdot i+1} - D'_{i \cdot i+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 49$$

Bilo koja uslovna jednačina strane bi dobila oblik:

$$\sin u_i^{i+1} dy_{i+1} - \sin u_i^{i+1} dy_i + \cos u_i^{i+1} dx_{i+1} - \cos u_i^{i+1} dx_i + f'_{i \cdot i+1} -$$
$$- k_{i \cdot i+1} \Delta D = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 50$$

Specijalno jednačina strane između tačaka P i Q bi bila:

$$\sin u_P^Q dy_Q - \sin u_P^Q dy_P + \cos u_P^Q dx_Q - \cos u_P^Q dx_P - \Delta D = 0 \quad \ldots\ldots \quad 51$$

jer je za ovu jednačinu $k_{PQ} = 1$, a $f'_{PQ} = d_{PQ} - D'_{PQ} = 0$, pošto je $d_{PQ} = D'_{PQ}$

Možemo zapaziti da se nepoznata $\Delta D$ u bilo kojoj jednačini može eliminisati pomoću jednačine br. 51, čime dobijamo definitivni oblik uslovne jednačine strane:

$$\sin u_i^{i+1} dy_{i+1} - \sin u_i^{i+1} dy_i + \cos u_i^{i+1} dx_{i+1} - \cos u_i^{i+1} d_i - k_{i \cdot i+1} \sin u_P^Q dy_Q +$$
$$+ k_{i \cdot i+1} \sin u_P^Q dy_P - k_{i \cdot i+1} \cos u_P^Q dx_Q + k_{i \cdot i+1} \cos u_P^Q dx_P + f'_{i \cdot i+1} = 0 \quad \ldots \quad 52$$

Posle ove eliminacije je broj uslovnih jednačina strana svakako smanjen za jednu jednačinu, što je u skladu sa poznatom činjenicom da manje fizičkih uslova prouzrokuju manji broj uslovnih jendačina.

Posle formiranja ovih jednačina treba, u principu istim postupkom kao pri izravnavanju slobodne mreže, odrediti popravke $d_{yi}$ i $d_{xi}$, a zatim, dodajući ove popravke na državne koordinate, dobiti definitivne koordinate gradske trigonometrijske mreže. Ako u mreži ima tačaka, koje nisu bile ranije određene u okviru državne mreže, treba im sračunati koordinate koristeći malo čas određene definitivne koordinate gradske mreže i izravnate uglove u slobodnoj mreži.

Svakako se pri obradi podataka i izravnavanju mora voditi računa o potrebnim detaljima, kaoje propisuje pravilnik za gradski premer.

Prednosti ovakvog načina izravnavanja bi bile sadržane u sledećem:

1. Tačnost tačaka bilo kog reda državne mreže nije od uticaja na tačnost sa kojom je određen međusobni položaj tačaka gradske trigonometrijske mreže.

2. Ako je merena osnovica, dužine u gradskoj mreži biće date u metrima, što ne mora biti slučaj sa mrežama, koje se oslanjaju na prvi i drugi red, u koliko postoji sistematska greška dužine u državnoj mreži.

3. Nova gradska mreža biće u celini maksimalno prilagođena mreži četvrtog reda vangradskog reona a samim tim i položaj grada vangradskom detalju, za razliku od pravilnikom predviđenog načina, kojim se postiže tačnije određivanje položaja grada u odnosu na neki drugi grad, odnosno na druge udaljene objekte.

4. Ekonomičnost predloženog načina je naročito važan moment s obzirom da treba obaviti daleko manje terenskih radova no pri vezivanju za tačke viših redova. Kad se o tome doda da vizure u gradskoj mreži obično nisu tako dugačke što olakšava rad na terenu, onda će svakako cena koštanja gradske mreže biti znatno snižena, što je u našim sadašnjim uslovima vrlo važna okolnost. Gradske mreže su neophodne nizu manjih gradova koji, ili ne raspolažu dovoljnim sredstvima, ili ne postoji dovoljno razumijevanja za poslove ovakve vrste od strane odgovarajućih službi. Detaljno snimanje i razvijanje poligonometrijske mreže je očigledno potrebno i niz službi pri komunama imaju razumevanja za ove poslove, ali kad se radi o trigonometrijskoj mreži, koja nije, manje stručnim službama, tako ubedljivo potrebna kao detaljno snimanje, razumevanja obično nema, a naročito ako se radi o velikim izdacima za gradsku trigonometrijsku mrežu, te u takvoj situaciji, navedena ekonomičnost ima svoju dvostruku važnost.

Da bi nastojala jedinstvenost izvođenja za ovaj i sledeći predložen način, u predhodnom je obrađen postupak uklapanja gradske mreže u državnu mrežu metodom izravnavanja uslovnih merenja. Međutim, ako se uklapanje obavlja metodom izravnavanja posrednih merenja (1), kancelarijski radovi se znatno smanjuju, te se ekonomičnost ovog predloženog načina još više povećava.

## UKLAPANJE SLOBODNE MREŽE NA OSNOVU OPAŽANIH PRAVACA

Ako na odnosnom području nije razvijena mreža četvrtog reda, odnosno ako je mreža četvrtog reda lošeg kvaliteta, tada se, kao što smo rekli, mora poći od mreža viših radova. I ovde će se, na osnovu ostvarenih veza između novih tačaka, izvršiti izravnavanje mreže novih tačaka kao slobodne mreže. Posle ovoga treba ovim novim tačkama odredite definitivne koordinate u državnom koordinatnom sistemu. Na osnovu koordinata datih tačaka i opažanih pravaca, prvo treba odrediti privremene koordinate onih tačaka, koje su direktno povezane sa datim tačkama. Popravke ovih privremenih koordinata treba odrediti, u ovom slučaju, uz sledeća dva uslova:

1. Slobodno izravnata mreža, isto kao i u predhodnom slučaju, ne sme pretrpeti nakakve deformacije.

2. Definitivne koordinate treba odrediti na osnovu opažanih pravaca uz uslov da bude suma kvadrata popravaka pravaca minimalna, to jest:

$$\Sigma vv = \min \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad 53$$

Što se tiče prvog uslova, o njemu nije potrebno nikakvo posebno razmatranje. Uslovne jednačine uglova i strana treba formirati na isti način kao u predhodnom odeljku preko jednačina br. 40 i 46, odnosno preko jednačine br. 52 ako nije merena baza.

Da bi se udovoljilo drugom uslovu treba postupiti skoro na isti način kao prilikom izravnavanja gradske mreže postupkom koga predviđa pravilnik pri više trigonometrijskih tačaka odjednom. Predhodno se mora na datim tačkama obaviti orijentisanje pravaca. Na osnovu privremenih koordinata treba sračunati privremene direkcijone uglove. Koristeći orijentisane pravce i privremene direkcijone uglove treba formirati jednačine grešaka za spoljne pravce uobičajenim postupkom.

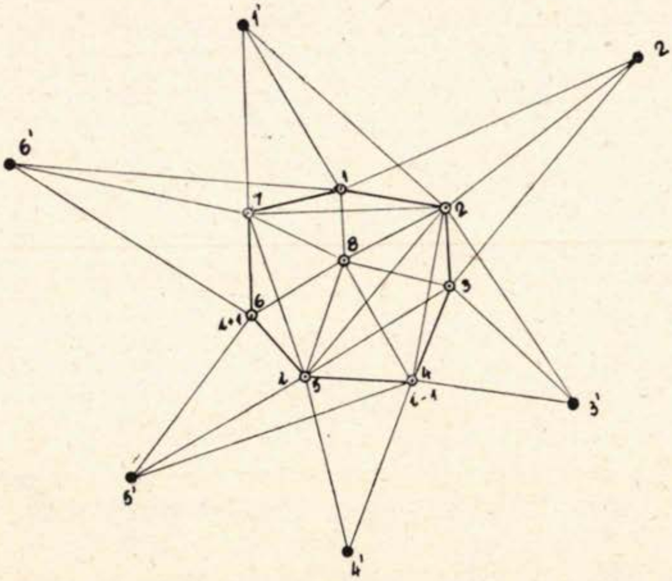
S obzirom da se prilikom ovog izravnavanja izravnava jedna fiksna figura od više tačaka, a ne više tačaka odjednom, postpuak formiranja jednačina grešaka unutarnjih pravaca se nešto razlikuje od postupka pri izravnavanju više tačaka odjednom. Iz specifične prirode problema izravnavanja figure od više tačaka proizlaze i sledeće specifičnosti o kojima treba voditi računa pri formiranju jednačina grešaka unutarnjih pravaca:

1. Za izravnavanje slobodne mreže su korišćeni svi pravci koji povezuju nove tačke. Na osnovu njih, nakon izravnavanja, su dobivene definitivne vrednosti dužina i uglova između novih trigonometrijskih tačaka. Međutim, sada pri ovom izravnavanju treba koristiti merene a ne izravnate pravce. Izravnati pravci su iskorišćeni za formiranje uslovnih jednačina.

2. Od svih merenih pravaca sa jedne nove tačke prema ostalim novim tačkama, za ovo izravnavanje biće korišćeni samo pravci prema susednim najbližim tačkama za koje su sračunate privremene koordinate. Dijagonalni pravci slobodne mreže i pravci prema centralnim tačkama pri ovom izravnavanju neće biti korišćeni u koliko i centralne tačke nisu direktno vezane vizurama sa datim tačkama, te su im kao takvim sračunate privremene koordinate.

Prema svemu, treba formirati jednačine grešaka unutarnjih pravaca samo za pravce sa novih prema susednim novim i prema datim tačkama. Formiranje jednačina grešaka se obavlja podpuno istim postupkom kao pri izravnavanju više tačaka odjednom.

Navedimo, radi ilustracije ovog izlaganja, na slici br. 6 jednu ovakvu mrežu. 1'2'......6' su date tačke. Nove tačke gradske mreže su obeležene brojevima 1, 2,....8. Ove nove tačke povezane odgovarajućim vizurama na osnovu kojih se formiraju uslovne jednačine i izravnava slobodna mreža. Posle ovog izravnavanja, uglovi i strane poligona 1, 2, .... 7 su definitivno određene. Iste ove tačke 1, 2, ....7 su povezane sa datim tačkama pa im se računaju privremene koordinate.




*Slika 6*

Da bi se sačuvala nepromenljivost uglova i strana navedenog poligona, treba formirati za ovaj slučaj 11 uslovnih jednačina ako je merena osnovica, odnosno 10 ako nije merena osnovica. Pri formiranju jednačina grešaka unutarnjih pravaca za tačku »i«, treba uzeti u obzir pravce prema datim tačkama, pravac prema tački »i—1« i prema tački »i+1«.

Za razliku od uklapanja slobodne mreže na osnovu datih koordinata, ovaj slučaj je nešto komplikovaniji s obzirom da se radi o posrednom izravnavanju u kombinaciji sa nizom uslovnih jednačina. Pošto ovakav naičn izravnavanja nije tako široko publikovan u literaturi na našem jeziku, izložićemo nešto detaljnije postupak određivanja popravaka dy i dx. U predhodnom smo izneli kako se mogu formirati uslovne jednačine odnosno kako treba formirati jednačine grešaka. Pre no što pređemo na izlaganje kako se vrši izravnavanje u ovom slučaju, moramo naći mogućnost da navedene jednačine grešaka i uslovne jednačine pišemo u opštem obliku. I u jednačinama grešaka i u uslovnim jednačinama npezonate su $dy_i$ i $dx_i$. Neki koeficjenti uz ove nepoznate su u navedenim jednačinama jednaki nuli, ali bez obzira na to obeležićemo uopšteno sve koeficijente jednačine grešaka prvog pravca sa $a_1$, $b_1$, $c_1$, itd., drugog pravca sa $a_2$, $b_2$, $c_2$,.. i tako dalje za sve pravce. Slobodne članove u jednačinama grešaka obeležićemo sa $f_1$, $f_2$ i tako dalje. Predpostavićemo da u mreži ima n tačka sa privremeno određenim koordinatama, a da je opažano ukupno m jednostranih pravaca na osnovu kojih se izravnava figura. S obzirom na ovo dobijamo:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= a_1dx_1+b_1dy_1+c_1dx_2+d_1dy_2+\ldots\ldots+r_1dx_n+s_1dy_n+f_1 \\
v_2 &= a_2dx_1+b_2dy_1+c_2dx_2+d_2dy_2+\ldots\ldots+r_2dx_n+s_2dy_n+f_2 \\
v_m &= a_mdx_1+b_mdy_1+c_mdx_2+d_mdy_2+\ldots\ldots+r_mdx_n+s_mdy_n+f_m
\end{aligned}
\quad . \quad . \quad . \quad 54
$$

Koeficijente uslovnih jednačina obeležićemo na isti način sa velikim slovima: $A_1$, $B_1$,....$S_1$, $F_1$, za prvu uslovnu jednačinu, $A_2$, $B_2$,....$S_2$, $F_2$, za drugu i tako dalje gde su sa $F_i$ obeleženi slobodni članovi uslovnih jednačina. Ranije je navedeno da bi smo imali N-uslovni jednačina. S obzirom na ovo, uslovne jednačine bi u opštem obliku izgledale:

$$
\begin{aligned}
&A_1dx_1+B_1dy_1+C_1dx_2+D_1dy_2+\ \ldots R_1dx_n+S_1dy_n+F_1=0 \\
&A_2dx_1+B_2dy_1+C_2dx_2+D_2dy_2+\ldots\ldots+R_2dx_n+S_2dy_n+F_2=0 \quad . \quad . \quad 55 \\
&A_N\,dx_1+B_N\,dy_1+C_N\,dx_2+D_N\,dy_2+\ldots\ldots+R_N\,dx_n+S_N\,dy_n+F_N=0
\end{aligned}
$$

Sada je zadatak da se odrede nepoznate $dx_i$ i $dy_i$ uz napred navedeni uslov minimuma, a da budu zadovoljene sve uslovne jednačine. Kao i obično, formiraćemo funkciju E i tražiti njen minimum.

$$
\begin{aligned}
E = \varepsilon vv &+ 2K_1(A_1dx_1+B_1dy_1+\ldots\ldots+F_1)+2K_2(A_2dx_1+B_2dy_1+\ldots+F_2)+\ldots \\
&\ldots+2K_N(A_N\,dx_1+B_N\,dy_1+\ldots+F_N)
\end{aligned}
$$

Ova funkcija imaće svoj minimum za one vrednosti nepoznatih za koje su parcijalni izvodi po svim nepoznatima jednaki nuli. Parcijalni izvod po $dx_1$ bi bio:

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta E}{\delta dx_1} &= 2a_1(a_1dx_1+b_1dy+\ldots+f_1)+2a_2(a_2dx_1+b_2dy_1+\ldots+f_2)+ \\
&+2a_m(a_mdx_1+b_mdy_1+\ldots+f_m)+2K_1A_1+2K_2A_2+\ldots.+2K_N\,A_N=0 \quad . \quad . \quad 57
\end{aligned}
$$

Nakon množenja i sumiranja dobijamo prvu, a analogno i ostale, ukupno 2n jednačina u kojima su nepoznate popravke dx i dy i korelate K. Kako imamo 2n+N nepoznatih, to malo čas navedenom broju od 2n jednačina moramo, da bi smo imali dovoljan broj jednačina, priključiti i N uslovnih jednačina. S obzirom na sve ovo dobijamo sledeći sistem:

$$[aa]\,dx_1 + [ab]\,dy_1 + [ac]\,dx_2 + [ad]\,dy_2 + \ldots + [as]\,dy_n + A_1K_1 + A_2K_2 + \ldots A_N K_N + [af] = 0$$

$$[ab]\,dx_1 + [bb]\,dy_1 + [bc]\,dx_2 + [bd]\,dy_2 + \ldots + [bs]\,dy_n + B_1K_1 + B_2K_2 + \ldots B_N K_N + [bf] = 0$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$[as]\,dx_1 + [bs]\,dy_1 + [cs]\,dx_2 + ([ds]\,dy_2 + \ldots + [ss]\,dy_n + S_1K_1 + S_2K_2 + \ldots S_N K_N + [sf] = 0$$

$$A_1dx_1 + B_1dy_1 + C_1dx_2 + D_1dy_2 + \ldots S_1dy_n + \qquad F_1 = 0$$

$$A_2dx_1 + B_2dy_1 + C_2dx_2 + D_2dy_2 + \ldots + S_2dy_n + \qquad F_2 = 0$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$A_N\,dx_1 + B_N\,dy_1 + C_N\,dx_2 + D_N\,dy_2 + \ldots + S_N\,dy_n + \qquad F_N = 0$$

Matrica koeficijenata ovog sistema je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu, pa se ovaj sistem može, u principu, lako rešiti postupkom koji je i do sada praktikovan. S obzirom da se radi o velikom broju jednačina, samo rešavanje predstavljaće jako obiman posao, koji se može deobom na grupe pri rešavanju svesti na manju meru, ali mi se u to nećemo sada upuštati.

Rešenjem ovog sistema dobijamo popravke, pa dodajući ih na odgovarajuće privremene koordinate dobijamo definitivne koordinate gradske trigonometrijske mreže. Za centralne tačke sračunaćemo koordinate na osnovu definitivnih uglova iz slobodne mreže i ovih definitivnih koordinata.

Ovakvim postupkom dobićemo koordinate tačaka gradske trigonometrijske mreže, koje će, kao što je već rečeno, definisati međusobni položaj tačaka gradske mreže sa tačnošću, koja ne zavisi od tačnotsi koordinata datih tačaka. Terenski deo radova u ovom slučaju biće skoro isti kao pri postupku koga predviđa pravilnik, dok bi kancelarijski radovi bili znatno obimniji. Iz ovoga proizilazi da bi, u odnosu na pravilnikom predviđen način, ovo bio manje ekonomičan ali kvalitetniji način.

### *GRADSKA TRIGONOMETRIJSKA MREŽA BORA*

Kao primer izravnanvanja gradske trigonometrijske mreže prvim načinom, za slučaj kada je gradska teritorija prekrivena mrežom četvrtog reda zadovoljavajućeg kvaliteta, navešćemo gradsku trigonometrijsku mrežu Bora. Na slici 6 je data skica ove mreže. Mreža se sastoji od 12 tačaka od kojih su 10 bile ranije određene kao tačke trećeg i četvrtog reda, ili kao zamena tačkama koje su uništene pri otkopavanju. Punim kružićima su obeležene tačke sa datim koordinatama. U gradu su merene dve osnovice na osnovu kojih su, preko osnovičkih mreža datih na skici, sračunate odgovarajuće strane u mreži. Prosečna dužina strane u mreži iznosi 1,62 km.

Uglovi su mereni instrumentom tipa Willd T-3, po metodi zatvaranja horizonta. Tačke su signalisane metalnim cevima prečnika 3 cm. Uglavi su mereni uglavnom do 9 časova i posle 16 časova. Srednja greška sračunata po Fererovoj formuli iznosi $\pm 1'',05$,

| | |
|---|---|
| Osnovica 1/0— 2/0: | 1: 5 800 000 |
| Osnovica 3/0— 4/0: | 1: 2 500 000 |

Merenje osnovice je obavila ekipa Instituta za građevinarstvo pri Građevinskom fakultetu — Beograd.

Na osnovu ovih terenskih merenja obavljeno je izravnavanje i uklapanje gradske mreže bez merenih osnovica i sa merenim osnovicama. U prvom slučaju slobodna mreža je izravnata preko 16 uslovnih jednačina a u drugom slučaju je, pored istih jednačina, iskorišćen i osnovički uslov. U tabeli broj 1 su dati slobodni članovi ovih uslovnih jednačina.

Tabela br. 1

| Uslovna jednačina | f | Uslovna jednačina | f |
|---|---|---|---|
| Trougao br. 1 | —1,9 sek. | Trougao br. 10 | —1,3 sek. |
| » » 2 | +2,4 » | » » 11 | +2,9 » |
| » » 3 | +1,6 » | » » 12 | +0,1 » |
| » » 4 | +0,3 » | » » 13 | —1,4 » |
| » » 5 | —0,6 » | Sin. uslov kod tačke 12 | +0,000 0008 |
| » » 6 | +2,9 » | » « » » 11 | +0,000 0146 |
| » » 7 | +2,7 » | » » » » 10 | +0,000 0151 |
| » » 8 | —1,6 » | Osnovički uslov | —0,000 0032 |
| » » 9 | +0,8 » | | |

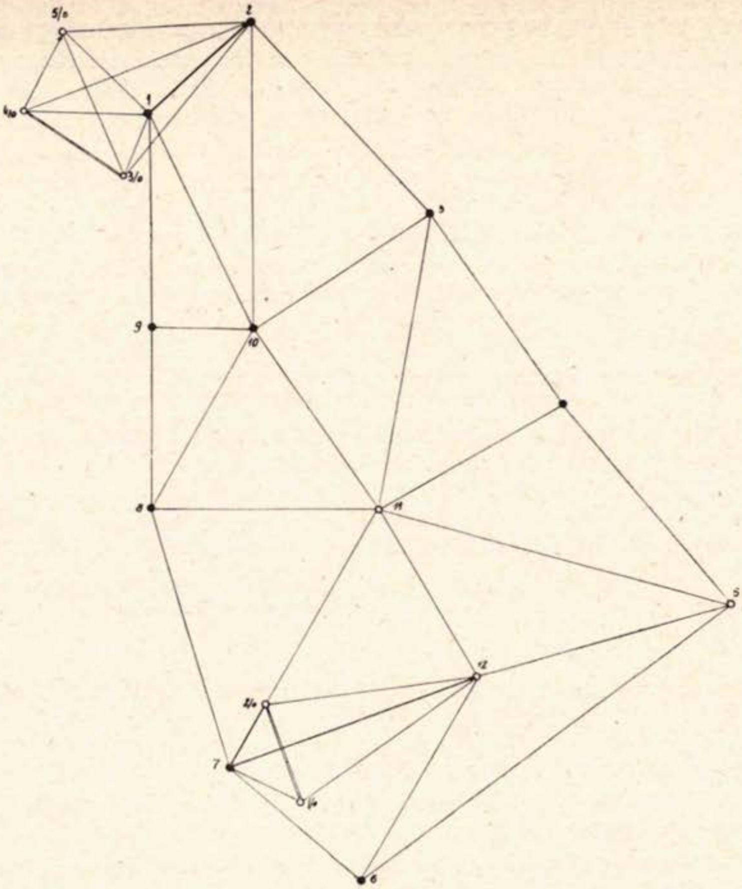
Na osnovu popravaka pravaca pri izravnavanju sračunata je srednja greška opaženog pravca:

Izravnavanje bez osnovičkog uslova: m = ±0,94″
Izravnavanje sa osnovičkom uslovom: m = ± 0″,88

Na osnovu izravnatih pravaca su formirane uslovne jednačine uklapanja u skladu sa napred navedenim jednačinama. U tabeli br. 2 su dati slobodni članovi ovih uslovnih jednačina.

Tabela br. 2

| Uglovne osnovne jednačine | | | Uslovne jenačine strana | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Ugao | Slobodni članovi | | Strana | Slobodni članovi u metrima | |
| | Bez osn. uslova | Sa osn. uslovom | | Bez osn. uslova | Sa osn. uslovom |
| 10—1—2 | +11,7 sek. | +11,7 sek. | 10—1 | +0,048 | +0,028 |
| 1—2—3 | — 3,0 » | — 3,2 » | 1—2 | +0,050 | —0,059 |
| 2—3—4 | +14,8 » | +14,8 » | 2—3 | —0,005 | —0,025 |
| 3—4—5 | —26,4 » | —26,4 » | 3—4 | +0,138 | +0,119 |
| 4—5—6 | + 6,1 » | + 6,1 » | 4—5 | —0,047 | —0,069 |
| 5—6—7 | — 8,9 » | — 8,8 » | 5—6 | strana P—Q | —0,040 |
| 6—7—8 | +23,3 » | +23,4 » | 6—7 | —0,075 | —0,091 |
| 7—8—9 | — 5,3 » | — 5,4 » | 7—8 | —0,029 | —0,050 |
| 8—9—10 | —11,7 » | —11,8 | | | |



*Slika 7*

Koristeći ove uslovne jednačine uz uslov minimuma koji je dat jednačinom br. 32, određene su popravke koordinata tačaka, koje su ranije bile određene kao tačke trećeg i četvrtog reda. U tabeli br. 3 su date ove popravke.

Tabela br. 3

| Tačka broj | Popravke dy | | Popravke dx | |
|---|---|---|---|---|
| | Bez osn. uslova | Sa osn. uslovom | Bez osn. uslova | Sa osn. uslovom |
| 1 | —0,007 | —0,014 | —0,034 | —0,019 |
| 2 | +0,041 | +0,038 | +0,004 | +0,012 |
| 3 | +0,055 | +0,059 | —0,012 | —0,004 |
| 4 | —0,107 | —0,097 | +0,030 | +0,031 |
| 5 | +0,009 | +0,026 | +0,049 | +0,042 |
| 6 | +0,049 | +0,050 | —0,036 | —0,057 |
| 7 | —0,072 | —0,077 | —0,043 | —0,058 |
| 8 | —0,014 | —0,020 | +0,013 | +0,009 |
| 9 | +0,004 | —0,023 | +0,006 | +0,010 |
| 10 | +0,042 | +0,039 | +0,031 | +0,034 |

Može se reći da ove popravke uglavnom karakterišu realnu tačnost koordinata tačaka državne mreže, pošto se može smatrati da su one posledica samo netačnosti datih koordinata, jer su merenja za gradsku mrežu obavljena sa znatnom tačnošću, a što je iskazano ranije navedenim srednjim greškama opažanog pravca.

Uklapanje bez merene osnovice i sa merenom osnovicom daje mogućnost ocene sistematske greške dužine u državnoj mreži u reonu Bora. Koristeći izravnate uglove i koordinate svih poznatih tačaka, tj. na osnovu uklapanja bez merene osnovice, određena je dužina strane 5—6, koja iznosi 3 111,201 m., a na osnovu izravnatih uglova sa osnovičkim uslovom i merene osnovice, ista dužina iznosi 3 111,223 m. Razlika ovih vrednosti od 0,022 m. predstavlja sistematsku grešku ove strane, a relativna sistematska greška bi bila 1:140 000.

## REZIME

Da bi se postiglo da tačnost gradske trigonometriske mreže ne zavisi od tačnosti državne trigonometrijske mreže, kao i da se obim radova na gradskim mrežama smanji bez štete po kvalitete mreže, predlaže se da se gradska mreža osloni na tačke svih redova državne trigonometrijske mreže uljkučujući i četvrti red. Prethodno je bilo nužno, analizom tačnosti određivanja tačaka državne mreže, ukazati da tačnost dužine i direkcionog ugla između dve bilo koje tačke ne zavisi od reda kome odnosne tačke pripadaju, već od rastojanja između njih u koliko su zadovoljeni uslovi:

$$\frac{m'^2_p}{d_1} = \frac{m''^2_p}{d_2} = \frac{m'''^2_p}{d_3} = \frac{m^{IV2}_p}{d_4}$$

a ovi uslovi su za našu državnu trigonometrijsku mrežu približno zadovoljeni. Na osnovu ovoga je izveden zaključak da ne treba smatrati da je tačnost tačaka četvrtoga reda tako nepovoljna u odnosu na tačke viših redova te se gradska mreža može osloniti i na tačke četvrtog reda.

Posle ovoga je predložen postupak određivanja gradske mreže, koji je sadržan u sledećem: Prvo se gradska mreža, razvijena samo na odnosnom gradskom području a u koju je uključeno što više tačaka državne mreže, izravna kao slobodna mreža. Posle ovoga se ovoj mreži računaju koordinate na osnovu koordinata državne mreže uz uslov da uglovi i dužine slobodno izravnate mreže ne pretrpe nikakve promene, a da suma odstupanja novih od državnih koordinata bude minimalna.

Ako se gradska mreža mora oslanjati samo na prvi i drugi red, predlaže se da se prvo gradska mreža izravna kao slobodna mreža, a zatim da se uklopi u državnu mrežu uz uslov da slobodno izravnata mreža ostane nedeformisana, a da suma kvadrata popravaka pravaca bude minimalna.

Na kraju je navedena gradska trigonometrijska mreža Bora, kao primer gradske mreže koja se oslanja na treći i četvrti red.

## LITERATURA:

1. J. Baturić: »Rudarska mjerenja« I deo — Zagreb 1957.
2. G. Reissman: »Die Ausgleichungs-rechnung« — Berlin, 1962.
3. Savezna Geodetska uprava: »Referat o osnovnim geodetskim radovima« — Beograd, 1953.
4. Savezna Geodetska uprava: »Pravilnik za državni premer II-A deo — Beograd, 1965.