REŠENJE HANZENOVOG PROBLEMA I PROBLEMA PRESECANJA NAZAD SINUSNIM USLOVOM

Jovan STEVANOVIĆ, dipl. inž. — Bor*

Kao što je poznato, postoje više mogućnosti za rešavanje i Hanzenovog problema i određivanja približnih koordinata presecanjem nazad. Međutim, kako u literaturi koju sam imao na raspolaganju nisam naišao na rešavanje gornjih problema korišćenjem sinusnog uslova u geodetskom četvorouglu, smatram da će biti korisno izložiti i ovu mogućnost za rešavanje gornjih problema.

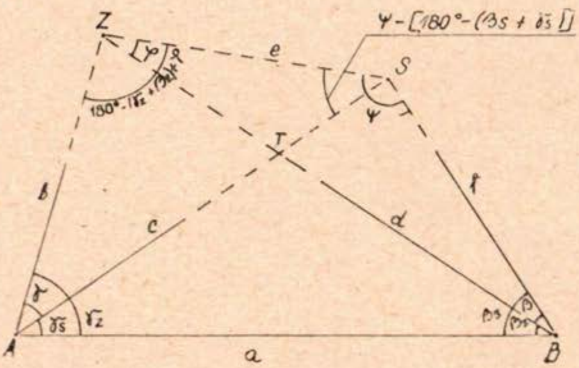
REŠENJE HANZENOVOG PROBLEMA

Suština Hanzenovog problema je sadržana u tome da se, na osnovu merenih uglova $\gamma, \gamma_z, \gamma_s, \beta, \beta_z$ i β_s i strane a, odrede uglovi φ i ψ i strana e.

Uglovi φ i ψ su vezani jednačinom:

$$\varphi + \psi + \beta = 180^0 \qquad \ldots 1$$

te se lako može naći jedan od njih, ako je poznat drugi, a ako poznajemo ove uglove, lako se može naći strana e, te se problem sastoji u određivanju jednog od ovih uglova.



Sl. br. 1

Sa slike br. 1 vidimo da je figura koju obrazuju pravci između odnosnih tačaka geodetski četvorougao. U ovom četvorouglu nisu po-

* Rudarsko-metalurški fakultet — Bor

znati svi uglovi, ali se svi ti nepoznati uglovi mogu izraziti preko uglova φ i ψ i merenih uglova.

Ako formiramo sinusni uslov u ovom četvorouglu na primer sa polom u tački S dobijemo:

$$\frac{f}{c} \cdot \frac{c}{e} \cdot \frac{e}{f} = 1 \quad \ldots\ldots 2$$

odnosno:

$$\frac{\sin\gamma_s}{\sin\beta_s} \cdot \frac{\sin\left[180^0 - (\gamma_z + \beta_z) + \varphi\right]}{\sin\gamma} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\varphi} = 1 \ldots 3$$

U ovoj jednačini nepoznat je ugao φ. Rešenjem ove jednačine po uglu φ imamo ujedno i rešenje Hanzenovog problema. Iz ove jednačine dalje sledi:

$$\sin(\gamma_z + \beta_z)\,\mathrm{ctg}\varphi - \cos(\gamma_z + \beta_z) = \frac{\sin\gamma \sin\beta_s}{\sin\beta \sin\gamma_s}$$

pa definitivno dobijamo:

$$\mathrm{ctg}\varphi = \mathrm{ctg}(\gamma_z + \beta_z) + \frac{\sin\gamma \sin\beta_s}{\sin(\gamma_z + \beta_z)\sin\beta \sin\gamma_s} \quad \ldots 5$$

Rešenje se može dobiti ako se pol postavi u bilo kojoj tački A, B, Z ili S, pa i u tački T-preseku pravaca AS i BZ, samo će formule biti drugojačije, a u izvesnim slučajevima i komplikovanije.

Ako se formira sinusni uslov sa polom u tački Z dobiće se formula za ψ:

$$\mathrm{ctg}\psi = -\,\mathrm{ctg}(\gamma_s + \beta_s) - \frac{\sin\gamma \sin\beta_z}{\sin(\beta_s + \gamma_s)\sin\beta \sin\gamma_z} \quad \ldots 6$$

Na ovaj način se mogu nezavisno sračunati uglovi φ i ψ, a preko jednačine br. 1 se može obaviti kontrola računanja ovih uglova.

Ako je odnos tačaka Z i S takav da pravci ne formiraju geodetski četvorougao već centralni sistem, način rešavanja se u osnovi ništa ne menja. U principu, pol se isto može postaviti u bilo kojoj tački, ali je najjednostavnije ako se formira sinusni uslov sa polom u centralnoj tački.

U sledećem primeru je po jednačini br. 5 sračunat ugao φ, po jednačini br. 6 ugao ψ, a jednačinom br. 1 je izvršena kontrola računanja ovih uglova, za isti primer koji je obrađen u »Pravilniku za državni premer, I deo: Triangulacija; knjiga druga — Beograd 1951.« na strani 70.

Primer 1

	°	'	"								
$\beta_2 =$	14	09	50	$\sin\gamma \ldots$	8	50	042	$\sin\gamma \ldots$	8	50	042
$\beta_5 =$	14	51	52	$\sin\beta_5 \ldots$	9	40	915	$\sin\beta_2 \ldots$	9	38	863
$\beta =$	0	42	02	$1/\sin(\beta_2+\gamma_2) \ldots$	0	36	665	$1/\sin(\beta_5+\gamma_5) \ldots$	0	34	936
$\gamma_2 =$	140	22	34	$1/\sin\beta \ldots$	1	91	269	$1/\sin\beta \ldots$	1	91	269
$\gamma_5 =$	138	33	44	$1/\sin\gamma_5 \ldots$	0	17	927	$1/\sin\gamma_2 \ldots$	0	19	536
$\gamma =$	1	48	50	$\Sigma_1 =$	0	36	818	$\Sigma_2 =$	0	34	646
$\beta_2+\gamma_2 =$	154	32	24	$\sqrt{\Sigma_1} =$	+	2	33 442	$-\sqrt{\Sigma_2} =$	−	2	22 055
$\beta_5+\gamma_5 =$	153	25	36	$\mathrm{ctg}(\beta_2+\gamma_2) =$	−	2	10 030	$-\mathrm{ctg}(\beta_5+\gamma_5) =$	+	1	99 930
$\beta =$	0	42	02	$\mathrm{ctg}\,\varphi =$	+	0	23412	$\mathrm{ctg}\,\psi =$	−	0	22 125
$\varphi =$	76	49	23								
$\psi =$	102	28	34								
	179	59	59								

U ovom primeru sračunat ugao φ je za 2'54" manji, a ugao ψ za 2'53" veći od odgovarajućih uglova u pravilniku. Da bi se dobilo bolje slaganje treba primer u pravilniku raditi sa većim brojem decimala. Međutim, kako je ekscentricitet mali navedene razlike nemaju praktičnog značaja. U gornjem primeru nije računat ekscentricitet.

REŠENJE PROBLEMA PRESECANJA NAZAD

Kao što je poznato, problem određivanja približnih koordinata presecanjem nazad je sadržan u tome da se na osnovu poznatih koordinata tačaka A, B i m i merenih uglova α i β na tački T odrede koordinate tačke T.

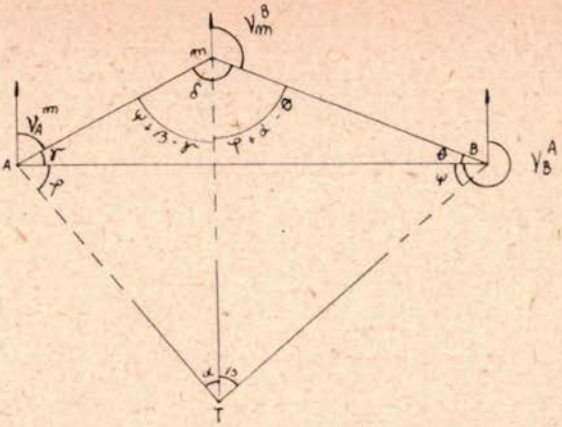
Na osnovu koordinata poznatih tačaka mogu se dobiti odnosni direkcioni uglovi, a na osnovu njih uglovi γ, δ i Θ s obzirom na sliku br. 2.

Ako bi bili poznati uglovi φ i ψ može se na lak način izvršiti orijentacija pravaca AT i BT, a zatim odrediti koordinate tačke T istim postupkom kao pri presecanju napred. S obzirom na ovo, problem se, kao i kod do sada praktikovanih postupaka, svodi na određivanje uglova φ i ψ, odnosno na određivanje jednog od njih, jer je:

$$\varphi + \psi + \alpha + \beta = 180^\circ \quad \ldots\ldots 7$$

Sa slike br. 2 vidimo da i u ovom slučaju pravci prema odnosnim tačkama formiraju četvorougao u kome nisu svi uglovi poznati, ali se mogu izraziti preko ugla φ ili ψ. Ako i na ovaj četvorougao primenimo sinusni uslov sa polom u tački B dobijamo:

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\delta} \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\varphi} \cdot \frac{\sin(\varphi+\alpha-\theta)}{\sin\varphi} = 1 \quad \ldots . \quad 8$$



Sl. br. 2

Iz ove jednačine, slično kao u prethodnom slučaju, dobijamo:

$$\operatorname{ctg}\varphi = -\operatorname{ctg}(\alpha - \theta) + \frac{\sin\delta \sin\beta}{\sin(\alpha - \theta)\sin\gamma \sin(\alpha + \beta)} \quad \dots . \; 9$$

Formiranjem sinusnog uslova sa polom u tački A dobijamo:

$$\operatorname{ctg}\psi = -\operatorname{ctg}(\beta - \gamma) + \frac{\sin\delta \sin\alpha}{\sin(\beta - \gamma)\sin\theta \sin(\alpha + \beta)} \quad \dots \; 10$$

Ako su uglovi φ i ψ sračunati nezavisno preko dveju posljedjih jednačina, možemo, isto kao i u prethodnom slučaju, jednačinom br. 7 obaviti kontrolu računanja ovih uglova.

Ako se tačke A, B, m i T nalaze na jednom krugu biće:

$$\theta = \alpha$$
$$\gamma = \beta$$
$$\delta = 180^0 - (\alpha + \beta)$$

pa se za ove vrednosti uglova u gornjim jednačinama dobija neodređen izraz, što znači da problem nema rešenja.

U niže navedenom primeru je dato kompletno računanje privremenih koordinata presecanjem nazad za primer, koji je u navedenom pravilniku obrađen na strani 227. Uglovi φ i ψ su nezavisno računati i kontrolisani preko gore navedenih jednačina. S obzirom da uglovi φ i ψ nemaju u našem razmatranju isti smisao kao u primeru u pravilniku, to su i koordinate računate prema nešto drugojačijim formulama. Razlike u uglovima i koordinatama rezultuju uglavnom zbog korišćenja svega pet decimala pri računanju.

Primer 2

$y_m =$	±	81	988	75	1
$y_A =$		83	561	10	6
$y_B =$		81	226	90	1
$y_m - y_A =$	−	1	572	35	5
$y_m - y_B =$	+		761	85	0
$y_B - y_A =$	−	2	334	20	5

$X_m =$	±	108	299	01	3
$X_A =$		108	764	63	8
$X_B =$		109	648	64	2
$X_m - X_A =$	−		465	62	5
$X_m - X_B =$	−	1	349	63	8
$X_B - X_A =$	+		884	01	3

$(y_m - y_A) \ldots$	3	19	655n
$(X_m - X_A) \ldots$	2	66	803
$tg\,\nu_A^m \ldots$	0	52	852n
$(y_m - y_B) \ldots$	2	88	187
$(X_m - X_B) \ldots$	3	13	021n
$tg\,\nu_B^m \ldots$	9	75	166n

$(y_B - y_A) \ldots$	3	36	814n
$(X_B - X_A) \ldots$	2	94	646
$tg\,\nu_A^B \ldots$	0	42	168n
$\sin\nu_A^B \ldots$	9	97	089
$\cos\nu_A^B \ldots$	9	54	922
$a \ldots$	3	39	725

	°	'	"
$\nu_A^m =$	253	30	16
$\nu_B^m =$	150	33	20
$\nu_A^B =$	290	44	34
$\delta = \nu_m^A - \nu_m^B =$	102	56	56
$\gamma = \nu_A^B - \nu_A^m =$	37	14	18
$\theta = \nu_B^m - \nu_B^A =$	39	48	56
	180	00	00
$\alpha =$	60	21	30
$\beta =$	60	40	02
$\alpha - \theta =$	20	32	34
$\beta - \gamma =$	23	25	44
$\alpha + \beta =$	121	01	32
$\varphi =$	26	33	31
$\psi =$	32	24	56
	179	59	59

$\sin\delta \ldots$	9	98	881
$\sin\beta \ldots$	9	94	041
$1/\sin\gamma \ldots$	0	21	815
$1/\sin(\alpha-\theta) \ldots$	0	45	481
$1/\sin(\alpha+\beta) \ldots$	0	06	705
$\Sigma_1 =$	0	66	923
$N\Sigma_1 =$	+	4	6691
$ctg(\alpha-\theta) =$	−	2	6685
$ctg\,\varphi =$	+	2	0006
$\varphi =$	26°	33'	31"
ν_A^B	290	44	34
$\nu_A = \nu_A^B + \varphi$:	317	18	05
$\nu_B - \nu_A = \alpha + \beta =$	121	01	33

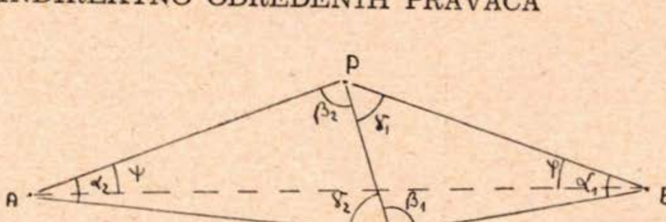
$\sin\delta \ldots$	9	98	881
$\sin\alpha \ldots$	9	93	909
$1/\sin\theta \ldots$	0	19	361
$1/\sin(\beta-\gamma) \ldots$	0	40	054
$1/\sin(\alpha+\beta) \ldots$	0	06	705
$\Sigma_2 =$	0	58	910
$N\Sigma_2 =$	+	3	8825
$-ctg(\beta-\gamma) =$	−	2	3077
$ctg\,\psi =$	+	1	5748
$\psi =$	32°	24'	56"
ν_B^A	110	44	34
$\nu_B = \nu_B^A - \psi$	78	19	38

$\sin\nu_A \ldots$	9	83	132n
$a \ldots$	3	39	725
$1/\sin(\alpha+\beta) \ldots$	0	06	705
$\sin\psi \ldots$	9	72	921
$\cos\nu_A \ldots$	9	86	625
$\Delta y_A \ldots$	3	02	483n
$\Delta X_A \ldots$	3	05	976
$\sin\nu_B \ldots$	9	99	092
$a \ldots$	3	39	725
$1/\sin(\alpha+\beta) \ldots$	0	06	705
$\sin\varphi \ldots$	9	65	042
$\cos\nu_B \ldots$	9	30	605
$\Delta y_B \ldots$	3	10	564
$\Delta X_B \ldots$	2	42	075

y_A		83	561	10	6
Δy_A	−	1	058	83	7
$y_0 =$		82	502	27	8
$X_A =$		108	764	63	8
$\Delta X_A =$	+	1	147	53	3
$X_0 =$		109	912	16	2
$y_B =$		81	226	90	1
$\Delta y_B =$	+	1	275	38	8
$y_0 =$		82	502	28	0
$X_B =$		109	648	64	2
$\Delta X_B =$	+		263	49	6
$X_0 =$		109	912	13	8

SLUČAJ INDIREKTNO ODREĐENIH PRAVACA

Sl. br. 3



Razmotrimo još i ovaj sličan slučaj u kome, pošto nije moguće ostvariti pravac između tačaka A i B, a kako je on s obzirom na ostale pravce u mreži neophodan, biraju se pogodne pomoćne tačke P i Q, koje se uključuju u mrežu pri opažanju. Pored ostalih mere se i uglovi α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2 i γ_2, pa se, pošto se ovi uglovi izravnaju za uslov trougla, računaju φ i ψ.

Formiranjem sinusnih uslova prvo sa polom u tački A, a zatim u tački B, dobijamo, postupkom koji je sličan ranije objašnjenjem po stupcima, sledeće izraze:

$$\mathrm{ctg}\varphi = \mathrm{ctg}\alpha_1 + \frac{\sin\beta_2 \sin(\beta_1 + \gamma_2)}{\sin\alpha_1 \sin\gamma_2 \sin(\beta_2 + \gamma_1)} \quad \ldots 11$$

$$\mathrm{ctg}\psi = \mathrm{ctg}\alpha_2 + \frac{\sin\gamma_1 \sin(\beta_1 + \gamma_2)}{\sin\alpha_2 \sin\beta_1 \sin(\beta_2 + \gamma_1)} \quad \ldots 12$$

pri čemu za kontrolu isto mora biti:

$$\varphi + \psi + \beta_2 + \gamma_1 = 180^0 \quad \ldots\ldots 12$$

U trećem primeru je obrađen, preko gornjih jednačina, slučaj koji je uzet iz navedenog pravilnika, strana 65.

Primer 3

	°	'	"								
$\alpha_1 =$	10	05	15,52	$\sin\beta_2 \ldots$	9	998	5182	$\sin\gamma_1 \ldots$	9	999	8344
$\beta_1 =$	81	29	39,84	$\sin(\beta_1+\gamma_2) \ldots$	9	424	1526	$\sin(\beta_1+\gamma_2) \ldots$	9	424	1526
$\gamma_1 =$	88	25	03,79	$1/\sin\alpha_1 \ldots$	0	756	5688	$1/\sin\alpha_2 \ldots$	0	695	7235
$\alpha_2 =$	11	37	29,02	$1/\sin\gamma_2 \ldots$	0	003	1516	$1/\sin\beta_1 \ldots$	0	004	8031
$\beta_2 =$	85	16	10,34	$1/\sin(\beta_2+\gamma_1) \ldots$	0	958	7836	$1/\sin(\beta_2+\gamma_1) \ldots$	0	958	7840
$\gamma_2 =$	83	06	20,64	$\Sigma_1 =$	1	141	1748	$\Sigma_2 =$	1	083	2976
$\beta_1+\gamma_2 =$	164	36	00,48	$N\Sigma_1 =$	+	13	841 233	$N\Sigma_2 =$	+	12	114 307
$\beta_2+\gamma_1 =$	173	41	14,13	$\mathrm{ctg}\alpha_1 =$	+	5	620 855	$\mathrm{ctg}\alpha_2 =$	+	4	860 965
$\varphi =$	2	56	28,97	$\mathrm{ctg}\varphi =$	+	19	462 088	$\mathrm{ctg}\psi =$	+	16	975 272
$\psi =$	3	22	16,89								
	179	59	59,99								

Sličnim formulama se može rešiti i problem u poligonometriji, ako je, s obzirom na sliku br. 3, izmerena strana PQ i uglovi γ_1, β_2, β_1 i γ_2, a treba sračunati stranu AB. U ovom slučaju su:

$$\alpha_1 = 180^0 - (\beta_1 + \gamma_1); \quad \alpha_2 = 180^0 - (\beta_2 + \gamma_2)$$

pa se može jednačinama br. 11 i 12 odrediti φ i ψ, a zatim sračunati strana AB.

Ovakav način rešavanja ovih problema može biti naročito pogodan u Rudarskim merenjima pri orijentaciji jame. Poznato je da se na dnu okna može laške izmeriti sa potrebnom tačnošću za orijentaciju ugao nego dužina, a obzirom na kvalitet sadašnjih instrumenata, a u posebnim uslovima na dnu okna. Zbog ovoga je poželjno da priključni trougao bude što razvučeniji, jer tada greške merenja strana ne utiču na tačnost orijentacije jame.

Ako je nemoguće priključivanje jamske poligonske mreže za viskove obaviti razvučenim trouglom, praktikuje se priključak četvorouglom, ili se pak ponekad priključivanje obavlja presecanjem nazad, na osnovu tri spuštena viska u oknu, pri čemu se za orijentaciju koriste samo mereni uglovi. I u jednom i u drugom slučaju se problem orijentacije svodi na određivanje nepoznatih uglova φ ili ψ, dok je računanje koordinata daleko jednostavnije, jer se sve dužine mogu vrlo lako izmeriti i sa većom tačnošću od one koja je potrebna za računanje koordinata, te su, ako su izmerene, poznate. U ovakvim situacijama su napred navedene formule naročito pogodne, jer daju mogućnost direktnog određivanja uglova potrebnih za orijentaciju.

Molimo cijenjene pretplatnike da podmire dužnu pretplatu. O tome zavisi uredno izlaženje lista

Uredništvo