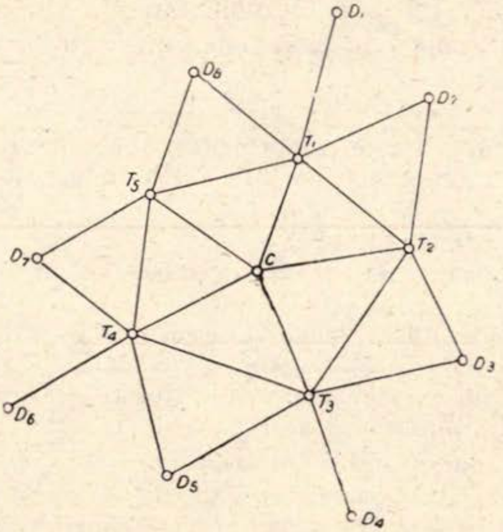
O JEDNOM KOMBINOVANOM NAČINU IZRAVNANJA TRIGONOMETRISKIH MREŽA

Vasil BOJČEVSKI, dipl. inž. — V.G.I. — Beograd

Prilikom izravnanja trigonometrijskih mreža, u praksi se najčešće primenjuje tvz. grupno izravnanje na principu posrednih merenja, a u skladu sa metodom najmanjih kvadrata. Taj način zadržava od početka izravnanja pa do kraja svu strogost, pa je samim tim i najtačniji. Međutim, u praksi mogu nastupiti i takvi slučajevi gde nije neophodno primenjivati najstrožiji način, jer on između ostalog zahteva prilično truda i vremena, pa samim tim i poskupljuje radove u birou.



Sl. 1

Ovde će biti prikazan jedan takav način izravnanja, koji ustvari predstavlja kombinaciju uslovnih i posrednih merenja. Iako je baziran na metodi najmanjih kvadrata, on ne pretendira na maksimalnu strogost, te predstavlja u tom smislu približan način grupnog izravnanja. Vreme potrebno za izravnanje po ovom načinu je mnogo kraće, a rezultati treba da budu vrlo bliski onima dobijenim strogim izravnanjem, pa su prema tome u mnogim slučajevima i sasvim prihvatljivi.

Ideja ovoga načina sastoji se u sledećem: Neka je kao na slici 1 potrebno izravnati koordinate tačaka T_1, T_2..., T_5 i neka su C, D_1, D_2..., D_8 date tačke.

Samo izravnanje vršiće se u dve etape. U prvoj etapi izravnavamo centralni sistem sastavljen od traženih tačaka sa centrom u tački »C« na principu uslovnih merenja. Nakon toga preuzimamo jednu proizvoljnu dužinu (napr. duž. strane CT_1) i na osnovu nje i već izravnatih uglova u sistemu, sračunavamo sve ostale strane.

U drugoj etapi preuzimamo proizvoljni direkcioni ugao neke strane (napr. strane CT_1) i na osnovu njega i već sračunatih približnih dužina kao i izravnatih uglova u vidu zatvorenog poligonskog vlaka sračunavamo približno koordinate svih traženih tačaka. Posledica svega ovoga jeste to, da je sada ceo sistem ili suviše povećan, ili suviše smanjen što zavisi od izbora prve proizvoljne strane. Pored toga ceo sistem je i zaokrenut za neki ugao »k« u odnosu na prvi proizvoljni direkcioni ugao.

Zadatak se sada sastoji u sledećem: Ne menjajući već izravnate uglove u centralnom sistemu, treba pronaći modul »M« pomoću koga ćemo množenjem svih prethodno sračunatih strana dobiti definitivne (najverovatnije) strane. Takođe je potrebno pronaći i ugao zaokreta »K« za koga je potrebno ceo sistem rotirati a sve to pod uslovom da suma kvadrata popravaka pravaca sa datih prema traženim tačkama i obratno, bude minimum tj.

$$[vv] = \text{minimum}$$

U tu svrhu potrebno je izraziti popravke pravaca »v« u funkciji »M« i »K« tj. tako da je

$$v_i = F_i\ (M, K) \qquad 1$$

Za dobijanje ovih funkcija poslužićemo se slikom 2 koja šematski prikazuje kretanje tražene tačke »T« od njenog približnog do definitivnog položaja.

Na slici 2 su prema tome:

T_0....... položaj tražene tačke definisan približnim koordinatama Y_0, X_0

T'....... položaj iste tačke dobijen nakon rotacije sistema za ugao »K«.

T....... definitivni (najverovatniji) položaj tražene tačke nakon rotacije i uvođenja modula »M«.

Definitivne dužine ćemo dobijati po obrascu:

$$CT = r = r_0 M \qquad 2$$

Ovaj obrazac važi za sve strane unutar centralnog sistema.

Iz slike 2 vidi se da je:

$$v = \nu - \varphi \qquad 3$$

Definitivne koordinate tražene tačke »T« biće:

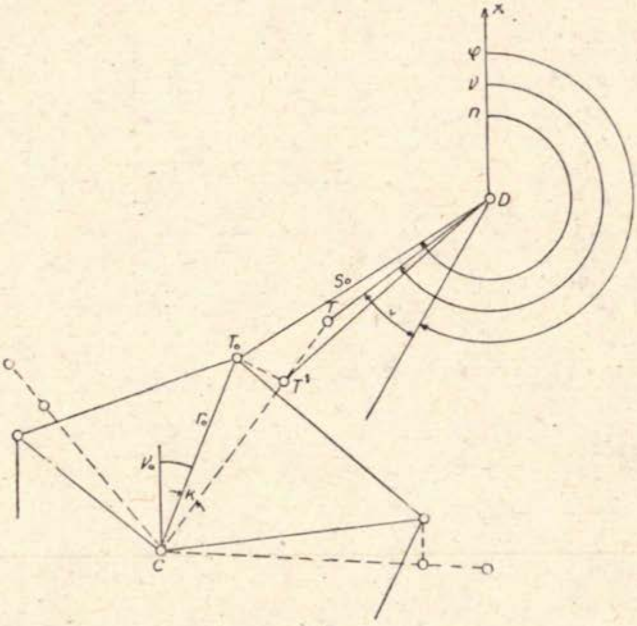
$$y = y_c + r_o M \sin(\nu_o + K)$$
$$x = x_c + r_o M \cos(\nu_o + K)$$

pa je prema tome

$$\nu = \text{arc tg}\,\frac{y_c + r_o M \sin\,(\nu_o + K) - y_D}{x_c + r_o M \cos\,(\nu_o + K) - x_D} \tag{4}$$

Napišimo sada Tajlorov red za gornju funkciju

$$\begin{aligned}\nu = {} & f(M_o, K_o) + \left(\frac{\partial f}{\partial M}\right)_o (M - M_o) + \left(\frac{\partial f}{\partial K}\right)_o (K - K_o) + \\ & + \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial M^2}\right)_o (M - M_o)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial M \partial K}\right)_o (M - M_o)(K - K_o) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial K^2}\right)_o (K - K_o)_2\right] + \end{aligned} \tag{5}$$



Sl. 2

Bilo je sasvim dovoljno da u gornjem redu zadržimo samo prve članove. U tom slučaju potrebno je da početne vrednosti »r_0« i »v_0« ne budu baš sasvim proizvoljne već što je moguće bliže stvarnim vrednostima, te će i razlike $(M - M_0)$ i $(K - K_0)$ biti dovoljno male.

Ako razvijemo u red 5 našu konkretnu funkciju 4 i pri tome usvojimo da je $M_0 = 1$ i $K_0 = 0$ dobijamo:

$$f\,(M_0, K_0) = n \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial M}\right)_o = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{y_c + r_o M \sin \nu_o - Y_P}{x_c + r_o M \cos \nu_o - X_D}\right)^2} \cdot \frac{r_o \sin \nu_o\,(x_c + r_o \cos \nu_o - x_D) - r_o \cos \nu_o\,(y_c + r_o \sin \nu_o - y_D)}{(x_c + r_o \cos \nu_o - x_D)}$$

no kako je

$$(x_c + r_0 \cos \nu_0 - x_D)^2 + (y_c + r_0 \sin \nu_0 - y_D)^2 = S_0^2$$

i sređujući izraze u malim zagradama i vršeći zamenu za sin ν_0 i cos ν_0 dobijamo:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial M}\right) = \frac{(y_0 - y_c)(x_0 - x_D) - (x_0 - x_c)(y_0 - y_D)}{S_0^2} \qquad 7$$

Zbog praktičnog i bržeg računanja koeficijenta $\left(\frac{\partial f}{\partial M}\right)_0$ gornji izraz se transformiše i preuređuje.

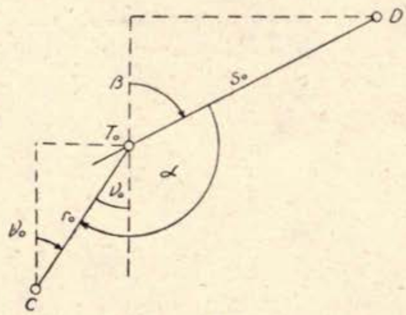
Iz slike 3 imamo:

$(y_0 - y_c) = r_0 \sin \nu_0$

$(x_0 - x_c) = r_0 \cos \nu_0$

$(x_0 - x_D) = -S_0 \cos \beta$

$(y_0 - y_D) = -S_0 \sin \beta$



Sl 3

Uvrštavajući ove jednačine u 7 dobijamo:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial M}\right)_0 = \frac{r_0 s_0 (\sin \beta \cos \nu_0 - \cos \beta \sin \nu_0)}{s_0}$$

no $\qquad \sin \beta \cos \nu_0 - \cos \beta \sin \nu_0 = \sin \alpha$

pa je definitivno:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial M}\right)_0 = \frac{r_0}{s_0} \sin \alpha \qquad 8$$

Na potpuno sličan način dobija se i drugi koeficijent tj.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial K}\right)_0 = \frac{r_0}{s_0} \cos \alpha \qquad 9$$

Zamenjujući sada jednačine pod 6, 8 i 9 u 5 i stavljajući da je

$$(M - M_0) = m$$

$$(K - K_0) = k \text{ jer je } K_0 = 0$$

dobijamo: $\qquad \nu = n + \frac{r_0}{s_0} \sin \alpha \,.\, m + \frac{r_0}{s_0} \cos \alpha \,.\, K$

a zamenom ove jednačine u 3 imaćemo:

$$\hat{v} = \frac{r_0}{s_0} \sin \alpha \,.\, m + \frac{r_0}{s_0} \cos \alpha \,.\, K + (n - \varphi)$$

ili

$$v'' = \sigma'' \frac{r_0}{s_0} \sin \alpha \,.\, M + \frac{r_0}{s_0} \cos \alpha \,.\, K'' + (n - \varphi)'' \qquad 10$$

Za praktično računanje najbolje je ako se uvedu sledeće zamene:

$$100\frac{r_0}{s_0}\sin\alpha = a \; ; \quad 100\frac{r_0}{s_0}\cos\alpha = b \; ; \quad \rho''\frac{M}{100} = x \; ; \quad \frac{K''}{100} = y$$

$$(n - \varphi)'' = f$$

pa dobijamo definitivno:

$$v_i'' = a_i x + b_i y + f_i \qquad 11$$

Takvih jednačina imaćemo onoliko koliko ima spoljnih pravaca.

Što se tiče jednačina popravaka pravaca koji polaze sa centralne tačke »C« one se mogu dobiti na sledeći način:

$$\nu_c = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin(\nu_0 + K)}{\cos(\nu_0 + K)} \qquad 12$$

ili

$$\nu_c = \nu_0 + K$$

odnosno

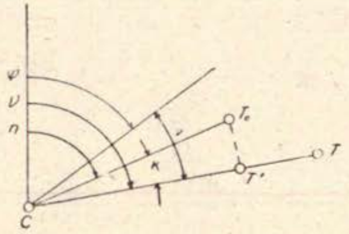
$$v'' = K'' + (n - \varphi)''$$

ili

$$v'' = y + f \qquad 13$$

jer je koeficijent uz »K« jednak 100.

Jednačina 13 može se dobiti i iz 11 ako se zameni da je $\alpha = 0$ i $r_0 = s_0$ a također i na osnovu slike 4.



Sl 4

Važno je napomenuti da se prilikom orijentacije pravaca na centralnoj tački »C« trebaju uzimati prethodno (još u prvoj etapi) izravnati pravci a ne opažani. Ovo s toga da nebi došlo do promene pravaca odnosno uglova u centralnom sistemu.

Što se tiče jednačina popravaka za unutrašnje pravce koji polaze od traženih ka datim tačkama, njih možemo dobiti također na osnovu jednačina 3 i 5 s tim što bismo ih okrenuli za 180°. No to bi nas dovelo do istog rezultata kao i za spoljne pravce. Drugim rečima ove jednačine će biti u suštini iste, jedino sa tom razlikom što prilikom orijentacije ovih pravaca nemamo definitivni orijentacioni ugao »O« već približni »O_0« te je zbog toga potrebno da se njemu doda popravka za orijentaciju $\Delta 0$ tj.

$$0 = 0_0 + \Delta 0$$

U tom slučaju unutrašnje orijentisane pravce bismo računali:

$$\varphi_i = (a_i) + O_o + \Delta O \qquad 14$$

gde su (ai) opažani pravci sa tražene na date tačke.

Uvrštavanjem 14 u 11 dobijamo:

$$v_i'' = a_i x + b^i y + (n_i - (a_i) - O_o) - \Delta O$$

ili

$$v_i'' = a_i x + b_i y + f_i - \Delta O \qquad 15$$

gde je ni — (ai) — 0_0 = fi.

Kako vidimo u jednačini 15 nalazi se sada još jedna nepoznata veličina $\Delta 0$.

Imajući u vidu da suma popravaka za unutrašnje pravce mora biti nula tj.

$$[v] = 0$$

možemo ovu nepoznanicu lako isključiti pa će definitivne jednačine glasiti:

$$v_i'' = \left(a_i - \frac{[a]}{u}\right) x + \left(b_i - \frac{[b]}{u}\right) y + \left(f_i - \frac{[f]}{u}\right) \qquad 16$$

gde je »u« broj pravaca na svakoj pojedinoj tački.

Uzimajući sada sve izvedene jednačine popravaka tj. 11, 13 i 16 i imajući u vidu uslov

[vv] = minimum, dobijamo dve normalne jednačine sa dve nepoznate tj.

$$[aa]x + [ab]y + [af] = O$$

$$[ab]x + [bb]y + [bf] = 0$$

Rešenjem ovih jednačina dobijamo nepoznate x i y, a iz njih i »M« i »K« tj. $K'' = 100y;\ m = \frac{100x}{\rho''};\ M = m + 1$

Množeći sada sve dužine u centralnom sistemu sa modulom »M« dobijamo definitivne strane, a dodavanjem ugla »K« početnom direkcionom uglu tj. $\nu = \nu_0 + K$ dobijamo i definitivni direkcioni ugao prve strane.

Koristeći definitivne dužine i prethodno izravnate uglove, izračunavanjem zatvorenog poligonskog vlaka dobićemo definitivno koordinate svih traženih tačaka.

Iz upoređenja ovog načina izravnanja sa strogim načinom zaključujemo sledeće:

Ako imamo »n« traženih tačaka kod strogog načina moramo formirati 2n normalnih jednačina, dok kod ovog načina ukupan broj normalnih jednačina je (n + 3) od čega se (n + 1) formiraju i rešavaju kao celina (uslovno izravnanje centralnog sistema), dok se ostale dve formiraju i rešavaju posebno. Može se dakle tvrditi da će se, kad god je n 3, do konačnog rezultata doći brže ako se upotrebi tretirani način izravnanja. Sa druge strane uvek je lakše rešiti »S« jednačina na jednoj strani i dve na drugoj, nego odjednom (S + 2) jednačine.

Radi ilustracije ovoga načina izravnanja, u jednom od sledećih brojeva našega lista, biće prikazan primer izravnanja jedne mreže po ovom kao i po strogom načinu i izvršena potrebna upoređenja.